

疏散的馬尔可夫鏈

B. И. 罗曼諾夫斯基著

科学出版社



疏散的马尔可夫链

王世强 著

科学出版社



疏散的馬尔可夫鏈

В. И. 罗曼諾夫斯基 著

梁 文 騏 譯

科 学 出 版 社

В. И. РОМАНОВСКИЙ
ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Гостехиздат
Москва Ленинград
1949

內 容 提 要

疏散的馬尔可夫鏈是一般随机过程的一个重要的特殊情形，而其詳尽深入的研究則主要是应用矩陣方法。本書的著者、苏联已故数学家罗曼諾夫斯基(В. И. Романовский)在这一方面有許多創造性的工作。本書系其晚年所著，綜合了其本人及其他研究者在疏散的馬尔可夫鏈方面的許多研究成果。除了1938年 M. Fréchet 的書之外，本書是有系統地、用矩陣方法講述具有有穷个状态及疏散時間的馬尔可夫鏈的唯一专著。

疏散的馬尔可夫鏈

В. И. 罗曼諾夫斯基 著
梁 文 騏 譯

*

科学出版社出版(北京朝陽門大街117号)
北京市書刊出版業營業第051号

中国科学院印刷厂印刷 新华書店总經售

*

1958年4月第一版 書号: 1091 印張: 13⁵/₈
1958年4月第一次印刷 开本: 850×1168 1/32
(京) 0001—1,265 字數: 332,000

定价: (10) 2.50元

序

呈献在讀者面前的这本书，其目的并不是要对馬尔可夫鏈的理論給出某种程度的完整闡述，馬尔可夫鏈的理論在今日已發展得非常广闊，但是还远沒有發展到尽头。在这本书中所講述的仅只是有关具有有穷个状态及疏散時間的鏈的，以及能够用矩陣研究方法得出的那些基本事实。至于讀者可在 M. Fréchet 的概括性著作⁽⁴³⁾及許多其他馬尔可夫鏈的研究者的論著中找到的材料，本书中包含得并不多，但在本书中考察了許多 M. Fréchet 及其他研究者完全沒有涉及到的問題：双循环鏈与复循环鏈、馬尔可夫-布倫斯(Марков-Брунс)鏈、相关的鏈、复杂鏈、馬尔可夫鏈的随机应用以及其他問題。在本书中，充分注意了鏈理論的創始人、著名俄罗斯数学家 A. A. 馬尔可夫的某些論著及其思路，而这些在概率論方面的数学文献中則还没有得到足够的估价。

本书的最主要的特色在于推进了鏈的矩陣研究方法，据我看来，在疏散的馬尔可夫鏈理論的研究中，矩陣乃是基本的和最有力的工具。

如果本书能够对于苏維埃科学以及对于本书范疇內的年青的苏維埃研究工作者有所裨益，則著者将至感荣幸。

В. И. Романовский

以此紀念

偉大的導師

安德烈·安德烈維奇·馬爾可夫

目 录

第一章 一些基本概念与基本定理	(1)
1. 状态数目有限并且时间疏散的简单的均匀马尔可夫链	(1)
2. 随机矩阵	(4)
3. 非负矩阵的基本性质	(5)
4. 随机矩阵的基本性质	(8)
5. Perron 公式	(16)
6. 关于链 C_n 的一些基本公式	(19)
7. 链 C_n 的基本公式的若干推论	(22)
8. 体系 S 的状态的主要类与次要类以及矩阵 P 的 可分解性与不可分解性	(27)
9. 体系 S 的主要状态的子组与循环矩阵	(29)
10. 链 C_n 的分类	(33)
第二章 可分解与不可分解的非循环链 C_n	(35)
11. 可分解与不可分解的随机矩阵	(35)
12. 矩阵 P 可分解与不可分解的条件	(38)
13. 正则链 C_n	(47)
14. 链 C_n 的正则性的其他条件	(54)
15. 正则链 C_n 中体系 S 的状态彼此之间的影响	(56)
16. 例: 原始的马尔可夫链	(58)
17. 链 C_n 的留守子块与转移子块	(62)
18. 对于可分解的链 C_n , 概率 $P_{\alpha\beta}^{(v)}$ 的独立表达式	(71)
第三章 不可分解的循环链 C_n	(82)
19. 循环随机矩阵	(82)
20. 关于不可分解的循环矩阵的根的基本定理	(86)

21. 不可分解的循环鏈 C_n 的行列式 $P(\lambda)$ 的子式的性質	(90)
22. 不可分解循环矩陣 P 的冪	(99)
23. 不可分解循环鏈 C_n 的轉移概率与絕對概率	(101)
24. 例	(106)
25. 循环鏈 C_n 中概率 $p_{\alpha\beta}^{(s)}$ 的另一計算法	(111)
26. 复循环鏈	(115)
27. 双循环鏈	(119)
28. 第一基本問題对于第一类型的双循环鏈的答案	(120)
29. 第一类型双循环鏈的行列式 $P(\lambda)$ 的子式的性質	(127)
30. 第二及第三基本問題对于第一类型的双循环鏈的答案	(132)
31. 第二类型的双循环鏈	(138)
32. 关于循环过程的一般附注	(140)
33. 具有絕路的循环鏈对于鏈状化学反应的应用的实例	(147)
34. 复循环鏈的基本类	(150)
第四章 疏散的馬尔可夫鏈的特征函数	(161)
35. 导言	(161)
36. 鏈 C_n 的特征函数	(162)
37. 特征函数 Φ_k 的新形式	(170)
38. 鏈 C_n 的各种矩	(173)
39. 鏈 C_n 的标准离差与协方差的研究	(184)
40. 鏈 C_n 的标准离差与协方差的研究(續)	(195)
41. 可分解的鏈 C_n 的标准离差与协方差	(199)
42. 关于具有疏散時間的随机过程的極限分布	(205)
43. 鏈 C_n 中的頻数的極限分布	(213)
44. 体系 S 的状态的平均頻数	(220)
45. 联結成馬尔可夫鏈的疏散随机变量	(222)
46. 鏈 $C_n(X)$ 中变量 u_0, u_1, \dots, u_{s-1} 的和数的分布的研究	(224)
47. 对于不可分解的循环鏈 $C_n(X)$, 和数 S_s 的 标准离差的研究	(231)
48. 不可分解的正則鏈 $C_n(X)$ 中标准离差 σ_s^2 的Fréchet形式	(242)

第五章 鏈状相关	(244)
49. 导言	(244)
50. 两个随机变量的鏈状相关的最简单的情形—— 鏈 $C_1(X, Y)$; 及其基本性質	(245)
51. 鏈 $C_m(Y)$ 与鏈 $C_1(X, Y)$ 的一阶矩及二阶矩	(255)
52. 鏈 $C_m(Y)$ 与鏈 $C_1(X, Y)$ 的特征函数以及关于其中 X 与 Y 的值的和数的分布的極限定理	(262)
53. 鏈 $C_1(X, Y)$ 的反演	(267)
54. 鏈 $C_2(X, Y)$	(269)
55. 馬尔可夫鏈状相关	(272)
56. 鏈状相关的其他类型	(276)
第六章 馬尔可夫-布倫斯鏈	(283)
57. 导言	(283)
58. 馬尔可夫-布倫斯鏈的最简单的情形	(283)
59. 馬尔可夫-布倫斯鏈的推广	(291)
60. 馬尔可夫-布倫斯鏈的一般情形	(298)
61. 在一般的馬尔可夫-布倫斯鏈中个别复杂事件的 頻数分布的研究	(306)
62. 随机变量的馬尔可夫-布倫斯鏈	(314)
第七章 复杂鏈	(317)
63. 馬尔可夫的情形	(317)
64. 双联結鏈的一般情形	(322)
65. 鏈 $C_n^{(2)}$ 的特征函数	(326)
66. 多联結鏈	(328)
67. 無限复杂鏈	(331)
68. 平稳的鏈 C_n^*	(338)
第八章 补充与应用	(342)
69. 对于鏈 C_n 与 $C_n(X)$ 的大数定律	(342)
70. 对于鏈 $C_n(X)$ 的重对数定律	(344)

71. 逆鏈	(353)
72. 逆循环鏈	(358)
73. 無始無終的鏈 C_n	(362)
74. 复循环鏈中环路重复的概率	(364)
75. 与鏈 C_n 有关的一些統計問題	(371)
76. 鏈的剛性系数	(380)
77. 在随机性的研究中馬尔可夫鏈与馬尔可夫-布倫斯鏈的应用	(385)
78. 地球物理学問題中馬尔可夫鏈的应用	(397)
79. 非均匀的馬尔可夫鏈	(403)
譯者附注	(412)
譯者后記	(420)
参考文献	(421)

第一章

一些基本概念与基本定理

1. 状态数目有限并且时间疏散的简单的均匀马尔可夫链。我們講述疏散的马尔可夫(Марков)链的理論，是从建立状态数目有限并且时间疏散的简单的均匀马尔可夫链概念入手。这是疏散的马尔可夫链的最简单的情形，同时也是最基本的以及在下文中講得頂多的。

讓我們来考察某一体系 S ，它具有有限个互不相容的状态：

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

每隔有限一段時間之后状态就要变更一次，这种变更遵守如下的随机規律：在某一初始时刻 T_0 ，这些状态的概率分别等于

$$p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n},$$

其次，無論我們考察其后的那一个时刻 T_k ($k=0, 1, 2, \dots$)，原来处于状态 A_α ($\alpha=\overline{1, n}$) 的体系 S 在下一个时刻 T_{k+1} 轉而呈现状态 A_β ($\beta=\overline{1, n}$) 的概率(当体系 S 在时刻 T_{k+2}, T_{k+3}, \dots 的状态未定时)恒等于一个不依赖于体系 S 在时刻 T_0, T_1, \dots, T_{k-1} 的状态的非負常数 $p_{\alpha\beta}$ 。概率 $p_{\alpha\beta}$ 的这一定义利用通常的条件概率写法就可以写成以下的形状：

$$p_{\alpha\beta} = P(A_\beta, T_{k+1} / A_\alpha, T_k), \quad k=0, 1, 2, 3, \dots$$

这样一来，体系 S 在 T_1, T_2, \dots 等任何一个时刻的状态，与上一个时刻以前的那些时刻的状态無关，而在以后各时刻的状态未定的条件下，被上一个时刻的状态随机地完全确定下来了¹⁾。

1) 这就是說得到完全确定的概率。

我們所定义的体系 S 的状态的变更系一般的随机过程的一个特殊情形，称为状态数目有限并且時間疏散的简单的均匀馬尔可夫鏈，或称狭义的馬尔可夫鏈 (A. H. Колмогоров 命名)。下文为了簡便我們將称之为鏈 C_n 。

我們称矩陣

$$P \equiv \text{Mt}(p_{\alpha\beta}) \equiv \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

为鏈 C_n 的規律而称組成这个矩陣的那些概率 $p_{\alpha\beta}$ 为轉移概率；轉移概率須适合以下的显然等式

$$\sum_{\beta} p_{\alpha\beta} = 1, \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (1.1)$$

概率 $p_{0\alpha}$ ($\alpha = \overline{1, n}$) 称为初始概率；对于初始概率也有

$$\sum_{\alpha} p_{0\alpha} = 1. \quad (1.2)$$

由等式(1.1)与(1.2)显見概率

$$p_{\alpha 1}, p_{\alpha 2}, \cdots, p_{\alpha n}$$

不全是零 (無論 $\alpha = \overline{1, n}$ 是什么)，而且初始概率也不全是零。

以上定义馬尔可夫鏈，用的是 A. H. Колмогоров 的命名系統。至于 A. A. 馬尔可夫本人所研究的就不是那些状态 A_{α} ，而是一系列試驗中的那些互不相容的事件 A_{α} ，它們由上面所講的体系 S 的状态变更所适合的那些条件联结成为鏈鎖；于是 $p_{0\alpha}$ 就是在初始試驗中事件 A_{α} 的概率，而 $p_{\alpha\beta}$ 就是在以后某次試驗中，在已知上次試驗中出現事件 A_{α} 的条件下，出現事件 A_{β} 的概率。A. H. Колмогоров 的命名系統与 A. A. 馬尔可夫的命名系統相較，具有更富于具体感的优点，并且完全摆脱了隱含在試驗这一概念中的某种主观主义色彩。但是應該注意，在概率論中“試驗”这一个

詞是意味着实现某些条件,在这些条件之下某种事件可能發生,并没有包含什么必然的主观因素,它可以只表示不随人的意志为轉移而客观地实现的条件的观察.至于“事件”这个词,比起“体系的状态”这个词来也是较为空泛.虽然如此,但是如果抽象地、广义地来了解 A. A. 馬尔可夫以及 A. H. Колмогоров 的命名系統,则可以認為它們是彼此等价的.

为了闡明以上給出的鏈 C_n 的定义,我們再給出其他可能类型的馬尔可夫鏈的定义.

根据体系 S 的状态的集合,可以把鏈区分成状态的集合是有穷的或無穷的两种;在状态的集合是無穷的这一情形下,这集合又可能是可数的或不可数的.然后在这所有的三种情形之下,時間可能是疏散的或是連續的.在時間疏散的情形下,又分成簡單的鏈与复杂的鏈两种,前者的体系在任何一个时刻的状态是由其紧上一个时刻的状态所随机地完全确定,而后者的体系在任何一个时刻的状态則仅仅是在給定了这个时刻以前的有穷多个或無穷多个时刻的体系状态之后,才能随机地完全确定.最后,鏈还可能是均匀的或是不均匀的,对于前者無論我們考察的是那一个时刻,其体系状态的轉移概率的矩陣保持不变,而后者的轉移概率的矩陣則依时刻的改变而改变.

讀者对于这些定义,應該看成只不过是為了要闡明“状态数目有限并且時間疏散的簡單的均匀馬尔可夫鏈 C_n ”在一般的馬尔可夫鏈系統中的位置而預先給出的.不仅如此,為了要使讀者能够更进一步对馬尔可夫鏈在一般随机过程中的位置在心目中有所了解,我們还引入下面的定义;按随机过程的一般理論的首先創立系归功于 A. H. Колмогоров^[2],以下所引入的定义就是依照他的方法来敘述的.

“設 S 是某一体系,它可以处于状态 x, y, z, \dots ; 而 F 是以 x, y, z, \dots 为元素所組成的各种集合 \mathcal{E} 的系統.如果对于任意选择的

状态 x , 集合 \mathcal{E} , 与时刻 $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$, 事件‘在于时刻 t_1 具有状态 x 的前提之下, 于时刻 t_2 出現 \mathcal{E} 中的一个状态’恒有确定的概率 $P(t_1, x, t_2, \mathcal{E})$ ¹⁾, 則我們就称体系 S 的变化过程对于 F 而言是随机地确定了。”

由 A. H. Колмогоров 所提出的最早的名詞“随机确定的过程”到后来变成了“無后效的随机过程”。A. Я. Хинчин 建議称这种过程为馬爾可夫过程^[42]。

从 A. H. Колмогоров 的定义中可以很清楚地看出, 鏈 C_n 是“可能状态 x, y, z, \dots 的数目有限并且時間疏散的無后效的随机过程”。A. H. Колмогоров 称之为狭义馬爾可夫鏈, 并且把所有那些時間疏散的無后效的过程的概型称之为广义馬爾可夫鏈。

所有以上定义出的鏈 C_n 概念的各种扩充, 都被包含在無后效的随机过程这一概念之中, 同时也就构成了这一概念的全部内容。但是所有这些, 就連無后效的随机过程这一个一般概念在內, 都只不过是随机过程一般概念的特殊情形。关于随机过程一般概念, A. Я. Хинчин 定义如下^[43]。

“随机过程系依赖于一个参数的随机变量 $x_t (-\infty < t < +\infty)$ 的总体; 为了要确定这个过程, 必須对于任何有限的一組值 t_1, t_2, \dots, t_n 給出相应的变量 $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$ 的 n 維分布律, 而这样定义出来的分布律在其相互关系上应滿足概率論中的全部要求。”

2. 随机矩陣。在本書所采用的疏散的馬爾可夫鏈的理論的講述系統之中, 非負矩陣中被我們称之为随机矩陣的这一类矩陣, 占有重要位置。因此一开始我們就先来叙述随机矩陣的某一些为我們后来所需要的性質。

正矩陣与非負矩陣是 G. I. Frobenius 的專門論文[44.1], [44.2]与[44.3]的主題。关于正矩陣与非負矩陣的很多材料, 讀者

1) 如遵照一般的表示法, 即給定 A 之后 B 的条件概率記作 $P(B/A)$, 則这一条件概率可用 $P(\mathcal{E}, t_2/x, t_1)$ 来表示。

也可以在 $\Phi. P. \text{Гантмахер}$ 与 $M. Г. \text{Крейн}$ 的書^[1]中找到(參閱譯注 1)。

如果一个矩陣中所有的元素全都是非負的，則称这个矩陣是非負的；如果一个矩陣中所有的元素全都是正的，則称这个矩陣是正的。我們要研究的差不多仅只是正方的矩陣，并对 n 級的非負矩陣采用以下記法：

$$A = \text{Mt}(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

如果 n 級的非負矩陣

$$P = \text{Mt}(p_{\alpha\beta})$$

滿足以下两个条件：

$$1^\circ \sum_{\beta} p_{\alpha\beta} = 1, \alpha = \overline{1, n};$$

2° 在矩陣的每一縱列中至少有一个元素 $p_{\alpha\beta}$ 不等于 0；

則我們就称之为随机的。

当矩陣 P 是鏈 C_n 的規律的时候，以上的条件具有简单的随机意义。根据条件 1°，在矩陣 P 的任何一橫行之內不可能所有的概率都等于 0；这就說明在鏈 C_n 之中，在某时刻 T_k 体系 S 無論發生任何状态 A_α ，到了下一个时刻 T_{k+1} ，它总至少可以轉变成某一个状态。条件 2° 是說矩陣 P 不能有一个 0 列；这就意味着对于体系 S 不存在如下的这种状态：于时刻 T_1, T_2, \dots ，它在任何状态之后都不可能發生，因而它只有在初始时刻 T_0 或許可能發生，假如說它的初始概率不是 0 的話。具有这种状态的体系在过了初始时刻之后也就变成不具有这种状态的体系了，因而这种体系没有什么意思。可見我們对随机矩陣所加的条件 2° 是十分自然的。

3. 非負矩陣的基本性質。設以 $E = \text{Mt}(e_{\alpha\beta})$ 表示 n 級单位矩

陣。我們稱行列式

$$A(\lambda) = |\lambda E - A| \quad \text{与} \quad P(\lambda) = |\lambda E - P|$$

为矩陣 A 与 P 的特征行列式, 而称方程

$$A(\lambda) = 0 \quad \text{与} \quad P(\lambda) = 0$$

为矩陣 A 与 P 的特征方程, 至于这些方程的根, 則称为矩陣 A 与 P 的根或特征数。

3.I. 如果 $A > 0$, 則存在数 $r > 0$, 使得数 r 是矩陣 A 的单根, 并且数 r 大过矩陣 A 的所有其他的根的绝对值。

这个数 r 称为矩陣 A 的最大根。

3.II. 如果 $A > 0$, 則当 $\lambda \geq r$ 时, 全部 $A_{\alpha\beta}(\lambda) > 0$ 。

在这里以及下文中各处, $A_{\alpha\beta}(\lambda)$ 总是表示行列式 $A(\lambda)$ 的对应于元素 $\lambda e_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}$ 的(代数余)子式。

我們引进这些定理, 但不給出証明¹⁾。

根据連續性原理, 从定理 3.I 可以推知, 对于非負的矩陣 A 也存在有最大根 r , 但这一回可能就不是单根了, 并且仅只是不小于矩陣 A 的所有其他的根的模, 而当 $\lambda \geq r$ 时, 現在就是全部子式 $A_{\alpha\beta}(\lambda) \geq 0$ 。

3. III. 如果 $A > 0$, 則最大根 r 介于以下諸和数

$$a_{\alpha} = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \quad (\alpha = \overline{1, n})$$

中的最小者与最大者之間: $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha} \leq r \leq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha}$, 特別当 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha} \neq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha}$ 时, 以上不等式中的等号可以取消: $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha} < r < \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha}$ 。

实际上, 把行列式 $A(\lambda)$ 的各縱列一齐加到具有附标 β 的那一縱列, 然后再将 $A(\lambda)$ 按照这一縱列的元素而展开, 我們就得到

$$0 = A(r) = \sum_{\alpha} (r - a_{\alpha}) A_{\alpha\beta}(r).$$

因为全部 $A_{\alpha\beta}(r) > 0$, 所以以上等式只有在 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha} \leq r \leq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_{\alpha}$

1) 讀者在[42] 90—92 頁上可以找到簡單的証明。

的情况下才可能成立；而当 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha \neq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ 时，以上等式只有在 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha < r < \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ 的情况下才可能成立。

这个定理可推广如下，这对以后甚为重要。

3. III'. 对于矩阵 $A \geq 0$ ，我们有 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha \leq r \leq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ 。若 A 不可分解则当 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha \neq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ 时，我们有 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha < r < \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ ；若 A 可分解则即使 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha \neq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ ，以上不等式中等号仍可能成立。

一个矩阵我们称为是不可分解的，假使它不可能通过行与列的同样调动（这种调动不改变矩阵的根）而化成以下形状：

$$A = \begin{pmatrix} P & O \\ Q & R \end{pmatrix},$$

其中 P 与 R 是两个异于零的正方子阵， Q 一般也是一个异于零的子阵，但有可能是零子阵，而 O 则是零子阵。反之一个矩阵我们称为是可分解的，假使它可以通过行与列的同样调动而化成以上形状。

这定理的证明完全类似于定理 3. III 的证明，并且主要是根据非负不可分解矩阵 A 的一项性质，这项性质是说 A 的特征行列式的所有子式 $A_{\alpha\beta}(\lambda)$ 当 $\lambda \geq r$ 时都是正的。这一性质在下文中将加以证明。据此立即可以看出，当矩阵 $A \geq 0$ 并且不可分解时，若 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha \neq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ ，则我们仍有 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha < r < \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ 。但若 A 可分解，则即使 $\min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha \neq \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ ，仍然可能 $r = \max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ 或 $r = \min_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ ，为实现这一点，例如只须令矩阵 P 的每一横行元素的和数 a_α 皆等于 $\max_{1 \leq \alpha \leq n} a_\alpha$ 就行了。

3. IV. 为了要使非负矩阵 A 是可分解的，必须而且只须，当 $\lambda = r$ 时行列式 $A(\lambda)$ 的诸主子式之中有一个等于零¹⁾。

3. V. 如果 $A \geq 0$ 是不可分解的，那么当 $\lambda \geq r$ 时，全部子式 $A_{\alpha\beta}(\lambda) > 0$ 。

1) 这个定理的证明可在 G. I. Frobenius 的 [44.3] 第 459 页找到。