

《信息、控制与系统》系列教材

信息理论基础

常 迥

清华大学出版社

73.821
612

《信息、控制与系统》系列教材

信息理论基础

常 迥



清华大学出版社

9310169

内 容 简 介

信息理论是应用十分广泛的基础学科。它随着通讯技术的发展而成熟起来,其影响几乎遍及所有的应用领域。

本书着重介绍信息理论的基本概念和基本方法,如有关信息及其度量,信源及其编码,信道及其编码的基本概念和基本理论。其次,作为应用例子,介绍了数据的传输码、压缩码、检错及纠错码,多端信息网络,估计理论,试验假设及条形码等专题。

本书可作高等院校的信息理论基础课程的教材或参考书,也可供在各种应用领域中对信息理论感兴趣的工程技术人员参考。

D036/04

(京)新登字 158 号

《信息、控制与系统》系列教材

信息理论基础

常 週

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/16 印张: 20.25 字数: 493 千字

1993年3月第1版 1993年3月第1次印刷

印数: 0001—6 000

ISBN 7-302-01103-6/TP·415

定价: 5.60 元

0001 55415

《信息、控制与系统》系列教材

出版说明

《信息、控制与系统》系列教材是一套关于信息、控制和系统学科的基本理论和应用技术的高等学校教材。选题范围包括信号和信息处理、模式识别、知识工程、控制理论、自动化技术、传感技术、自动化仪表、系统理论、系统工程、机器人控制、智能控制、计算机应用和控制等方面。主要读者对象为自动控制、计算机、过程自动化、无线电等系科的高年级大学生和研究生,以及在这些领域和部门工作的科学工作者和工程技术人员。

信息、控制与系统科学是在本世纪上半叶形成和发展起来的新兴学科。它们的应用和影响已经遍及众多的部门和领域,贯穿其中的许多思想和方法已用于经济和社会现象的研究,而以这些学科为理论基础的自动化技术的广泛应用更是实现现代化的重要标志之一。这套系列教材,正是在这样的客观要求下,为适应教学和科研工作的需要而组织编写和出版的。它以清华大学自动化系、电机系等近年来经过教学实践的新编教材为主,力求反映这些学科的基本理论和最新进展,并且反映清华大学在这些学科领域中科学研究和教学研究的成果。我们希望这套系列教材,既能为在校大学生和研究生的学习提供较为系统的教科书,也能为广大科技人员提供有价值的参考书。

编辑和出版这套教材是一次尝试。我们热忱欢迎选用本系列教材的老师、学生和科技工作者提出批评、建议。

《信息、控制与系统》系列教材编委会

《信息、控制与系统》系列教材编委会

主 编	常 迥			
编 委	常 迥	童诗白	方崇智	韩曾晋
	李衍达	郑大钟	夏绍玮	徐培忠
责任编辑	蔡鸿程	王仁康		

前 言

信息理论是一门理论性很强、应用很广泛、有几十年发展历史的科学技术。1984年我为研究生开设了“信息理论基础”课，讲的内容仅限于最基本的概念和方法。从此每年讲授一次，前后共讲授了五遍。在此期间，与同学们相互切磋，得到不少启发；又阅读了不少资料。使我对信息理论有了一点认识。但由于缺乏这方面的实际科研工作，所以理解得不够深入，还有不少问题未能理解。但我有一种想法，即信息理论的基本概念和基本方法的确是非常重要的。不是还有不少人到现在仍分不清什么是信息、什么是消息、什么是信源、什么是信道，也不清楚为什么要编码、为什么要抽样。由于缺乏准确的科学的论断，往往产生错误，也就不可能有创新和发展。这样很容易对信息论产生神秘感和深奥感，缺乏实践的勇气，这就影响信息理论的应用和推广。其实，信息理论和控制理论、系统理论相似，都是最基础的科学技术理论。我认为只要不断思考，努力掌握住它的基本概念、基本特性和基本方法就能够在不断的实践中逐渐懂得其中的奥妙了。

我一直想在我讲课的基础上，总结几年来的体会，写一本基础性的信息理论教科书，苦于无足够时间做这项工作。在公务烦忙之际，我不幸于1987年12月18日突患脑血栓症，致使左半身不遂。幸而右半身和思维能力未受影响，后渐渐康复，每天能工作二、三小时。于是开始动笔写这本《信息理论基础》，大约用了一年时间，写成初稿。因在病中写作，不免粗糙，很可能有不少错误，则待以后修正和加工了。

由于全书内容较多，故分为基础与专题两大部分。我的意见是：在教学中，只讲授基础部分就可以了；专题部分在需要时，可作为参考内容，不必列为讲授内容。

在写这本书时，参考过许多日文、俄文和英文的有关资料，不一一列举。只是将美国D. S. Jones 所著 *Elementary Information Theory* 和 Richard E. Blahut 所著 *Principles and Practice of Information Theory* 两本比较有特色的参考书，介绍给读者，以供在必要时参考。

最后，我必须说明的是，在本书的编写过程中，从开始到完成一直得到我的老伴王漱瑛老师的支持和帮助。此外，我深感在我从事教学和科研事业几十年来，她给了我非常大的帮助，特将这本书献给她，以此表达我的一点心意。为纪念我们共同生活60年，特写小诗一首，随同本书一起作为我们钻石婚纪念的礼物。

人生难得一知己，同甘共苦六十年；
坎坷路上相扶持，赢得黄昏霞满天。

常 迺

1991. 6. 30 写于清华园

目 录

前言	iii
第一章 概论	1
1.1 信息理论的基本内容	1
1.2 信息理论的发展简史	3
1.3 控制论、信息论与系统论	7
1.4 信息理论的应用	9
1.5 本书的结构	12
第二章 有关信息的基本概念与问题	13
2.1 引言	13
2.2 自信息与熵	14
2.3 互信息	17
2.4 多系统	22
2.5 凸性定理	24
2.6 唯一性定理	25
2.7 马科夫过程与马科夫熵	29
2.8 热熵与信息熵	31
第三章 信源及其编码的一些基本概念和理论	33
3.1 引言	33
3.2 自然语言和文字作为信源	35
3.3 信源熵	35
3.4 信源编码	37
3.5 无记忆信源	38
3.6 定长码	39
3.7 变长码	42
3.8 码字的平均长度	45
3.9 最优编码	47
3.10 记忆信源	49
3.11 平稳信源	51
3.12 遍历性信源	53
第四章 信道及其编码的一些基本概念和基本理论	59
4.1 引言	59
4.2 信道理论	59
4.3 信道编码	60

4.4	信道容量	60
4.5	通信系统	61
4.6	无记忆信道容量	62
4.7	凸性	66
4.8	信道容量方程的解	69
4.9	唯一性	70
4.10	传输特性	73
4.11	仙农定理	73
4.12	级联信道	74
4.13	无限级联问题	75
4.14	并联信道	81
	附录	82
	习题	83
第五章	连续信源与连续信道	86
5.1	连续随机变量的熵	86
5.2	连续信源与连续信道	86
5.3	连续随机变量的微熵	87
5.4	高斯信号的信息度量	88
5.5	无记忆的高斯信道和高斯信源	92
5.6	有记忆的高斯信道和信源	97
5.7	抽样定理	99
5.8	高斯波形信道与信源	100
5.9	比特能量与比特误差率	104
5.10	具有频带限制的信号	106
5.11	无频带制约的信号	110
5.12	熵功率不等式	112
5.13	中心极限定理	117
	习题	120
第六章	有关编码的一些基本概念	124
6.1	引言	124
6.2	变长码	124
6.3	变长码定理	125
6.4	克拉夫特定理	126
6.5	最优码	127
6.6	检错码	129
6.7	纠错码	130
6.8	汉明码	130
6.9	加权码	131

第七章 数据传输码	133
7.1 引言	133
7.2 离散含噪信道	133
7.3 距离与分量的表示方法	135
7.4 互信息函数	136
7.5 数据传输的块码	139
习题.....	140
第八章 数据译码与紧缩码	145
8.1 数据译码	145
8.2 数据紧缩码	149
8.3 离散信源的信息容量	150
8.4 熵函数	151
8.5 为数据紧缩的前束码	157
习题.....	159
第九章 数据压缩码	165
9.1 引言	165
9.2 大于信道容量的传输速率	165
9.3 信息的压缩	166
9.4 压缩数据的信息容量	167
9.5 信息传输定理	170
习题.....	172
第十章 试验假设	175
10.1 引言	175
10.2 内曼-皮尔逊定理	175
10.3 诺思滤波器	177
10.4 判别函数	181
10.5 在性能上的初步极限	186
10.6 在性能上的渐近界限	187
10.7 误差-指数函数	191
10.8 逆定理	196
10.9 切尔诺夫界限	197
习题.....	200
第十一章 估计理论	205
11.1 引言	205
11.2 参数的估计	205
11.3 费希尔 (Fisher) 信息矩阵.....	208
11.4 多重并行估计	210
11.5 脉冲到达时间的估计	212

11.6	脉冲到达频率的估计	216
11.7	推理原理	218
11.8	谱估计	220
	习题	221
第十二章	多端信息网络	224
12.1	引言	224
12.2	反馈信道	224
12.3	多用户信道	226
12.4	广播信道	230
12.5	双向信道	232
12.6	相关数据的远程紧缩	237
12.7	具有旁信息的数据紧缩	241
12.8	具有旁信息的数据压缩	247
12.9	分布系统的数据压缩	250
第十三章	检错码与纠错码	256
13.1	引言	256
13.2	定长码与变长码	257
13.3	最优码	260
13.4	纠错码	261
13.5	线性误差纠错码——二进对称信道	262
13.6	卷积编码器	274
13.7	状态图与梯形图	275
13.8	最大相似解码与 Viterbi 算法	276
第十四章	信息率失真理论	278
14.1	引言	278
14.2	根据真实度准则的信源编码	278
14.3	信息率失真函数及其特性	281
14.4	信息率失真理论的基本定理	282
14.5	逆定理	284
	习题	285
第十五章	条形码	287
15.1	引言	287
15.2	通用生产码符号的特性与可解码性	289
15.3	条形码的可靠性	300
附录 A	凸函数的最小化	307
附录 B	K-L 展开式	310
附录 C	Toeplitz 分布定理	313
	后记	314

第一章 概 论

当今,信息已经成为现代社会的一项重要资源。信息的概念在自然科学和社会科学中均已被广泛地采用。研究信息的产生、获取、检测、传输、处理、识别及其应用的信息科学技术,在近几年里得到了迅速发展。有关信息的理论越来越为人们所重视。

1.1 信息理论的基本内容

信息理论是研究信息的产生、获取、度量、变换、传输、处理、识别及其应用的一门科学,所研究问题应该是带有根本性的、基础性的问题;所给出的方法应该是具有普遍性的、令人信服的,可以解决实际问题的方法;所得结论和定理应该是严谨的、经得起考验的结论。

信息理论的基本问题是信源和信宿、信道以及编码问题。

信息的获取或产生主要依赖于信息源,简称信源。信源大致可分为三大类:一是自然信源。包括给出物理、化学、天体、地学、生物等方面的自然信息。获取信息的主要工具是传感器和传感设备,有时也称为敏感器或换能器,其种类繁多,型式不一,不胜枚举,主要有物理型(热、光、磁、电、声、力)传感器、化学型(气体、化合等)传感器和生物型(神经、感觉、嗅觉、视觉、听觉、触觉等)传感器。物理型传感器通常利用压电效应(晶体、陶瓷)测量力、形变、位移、速度、振动、风速、流速等。还有利用光敏半导体测量光、光通、照度、光色等。利用选择性电极可制成化学敏感器。利用光纤可制成测量电磁量、力学量、温度、图象及分光等的光学敏感器。光纤有很多优点:传送功率损耗小,传送信息容量大;电绝缘性能好;抗干扰性能强;环境适应性强;便于安装、成本低、工艺简单,因此光纤敏感器是最近发展很快的一种传感器。二是社会信源。包括管理、金融、商情以及各种情报等,采集信息主要靠社会调查,利用统计方法加以整理。三是知识源。古今中外记录下来的知识和专家的经验都蕴含大量的信息。研究知识的获取,表示以及应用的构成所谓知识工程。

信源的核心问题是它包含的信息到底有多少,怎样将信息定量地表示出来,即如何确定信息量。信宿的问题是能收到或提取多少信息。信道的问题主要是它能够传送多少信息的问题即信道容量的大小。所谓编码,就是用符号来表达信息,即进行信源编码;还需要将符号转换成信道所要求的信号,即进行信道编码。总之,编码是把信息变换成信号的方法、措施,译码是编码的反变换,而信道则是传送、存储信号的具体的物理设施。这些问题的讨论是结合通信系统模型的研究进行的。

现代通信系统的容量越来越大,要求其自动化程度越来越高、功能越来越强。这就更多地需要用信息理论中的数学方法来设计系统,满足所提出的要求。比如,经常碰到的通讯条件是从自然界来的或从其它信源来的干扰,已非常接近于所需传输的信号,这就要求

利用到优化理论来找出合适的消息形式和波形,来保证可靠的通讯。为此目的,又要借助于信息理论。优化理论是信息理论的一个重要途径,信息理论可以用来回答很多十分基本的问题。例如:

- (1) 什么是信息? 如何度量信息?
- (2) 在信息传输中,基本的极限条件是什么?
- (3) 对于信息的压缩和再复的极限条件是什么?
- (4) 从环境中抽取信息极限条件是什么?
- (5) 设计什么样的设备才能达到这些极限?
- (6) 实际上,接近极限的设备是否存在?

从理论上讲,信息理论的成功之处在于尽管以上这些问题都有些含混不清和不十分科学的地方,但还是能够给出确切的解释和答案。实际上,信息理论对于各种系统的设计与发展都起着重要的作用。当我们寻求新而更为先进的通讯系统时,它提出了很有价值的改进方向。

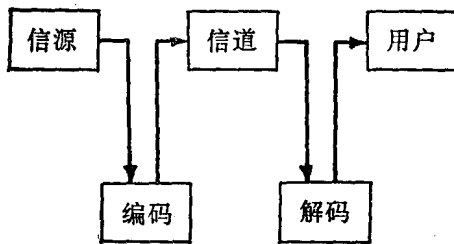


图 1.1

基本的通讯系统如图 1.1 所示。

从信源得来的信息,经过编码送入信道传到用户端,再经解码后即得到用户所想得到的信号或信息。信道是系统的关键部分,

它将信源输出的信号准备送入系统,然后再将输出信号经加工后送给用户,前者称为编码或调制,后者称为解码或解调。正是在研究通讯系统的基础上,1948年,仙农(Claude Shannon)建立了信息理论的基础。可以证明,在一含噪的信道中,利用一适当的编码器和一适当的解码器就可以得到近于无误的通讯。但他没有告诉我们如何设计这样的编码器和解码器,也没有告诉我们它们是如何复杂。从那时以后,做了许多解决这些实际问题的的工作,但迄今还是没有完全解决,仍在继续研究解决这些问题的答案。因而,信息理论仍处在不断的发展之中,它起着愈来愈大的指导作用,研究的问题集中在:

(1) 为了在 T 时间内通过一个离散的无记忆的信道如一个二进制信道传输 K bits 的信息量,这时最佳的波形组,或者说最佳的一组码序列(码字)是什么。例如,通过具有一定平均功率的和具有可加高斯噪声的信道应如何最佳地传送信息(在传输端是有带宽限制的)。

(2) 通过某一离散的无记忆信道传输信息时,最佳波形族(码字组)的近似的功能是什么?

(3) 最佳波形族(码字组)近似传输连续信号时,最佳码字组是什么?无疑,这是很不容易解答的一个问题。所谓“最佳”,是还没有解决的一些问题,现在只能从近似的意义上来考虑这些问题。

信源输出前先通过信源编码器变成信源码字,目的是得到较为紧密的信源码。第二步送入信道编码器将信源码字转变为信道码字,这是一序列新而较长的码字,含有较多的冗余度。信道码字可能由一个或一组二进制符号来表示。然后是送到调制器,它将信道

码字中的每一个符号用一组有限个可能的模拟符号来代替。模拟符号的序列称为波形，波形通过信道传输到接收机端。由于有各种噪声、误差存在，信道的输出不同于信道的输入。解调的作用是将每一收到的模拟符号转变为离散的信道符号。信道噪声可能造成一些误差，接收到的字很可能与信道码字不相符合。信道解码器的功能是利用信道码字中的多余度，纠正信道所产生的误差，从而得到一序列估计的信源码字，最后经过信道解码器，其功能恰与信源编码器相反。其输出为信源字或一组近似的信源字，为用户(接收者)所理解。信源编码器和解码器完成两种功能：将信源的输出变得更紧密些和省去一些多余的符号。前者称为“数据紧密码”，后者称为“数据压缩码”。信道编码器和解码器也完成两个功能实现误差控制，抵消掉信道噪声所造成的效果，使传输符号序列与信道的制约条件相匹配。前者在“数据传输码”(或误差控制码)而后者在“制约的信道码”(或数据译码)中讨论。“调制”与“解调”则在“调制理论”一章中讨论。

本书讲述的信息理论的基本内容是与通信科学密切相关的狭义信息论。我们在回顾信息论发展简史和信息论的应用的过程中，还将对一些重要问题作简要的介绍，并将谈到信息理论的其他有关内容。

1.2 信息理论的发展简史

信息论理论基础的建立，一般来说，开始于仙农研究通信系统时所发表的论文。随着研究的深入与发展，信息论具有了较为宽广的内容。

信息在早些时期的定义是由尼奈斯特(Nyquist, H.)和哈特莱(Hartley, L.V.R.)在20世纪20年代提出来的。1924年尼奈斯特发表的“影响电报速率因素的确定”和1928年哈特莱发表的“信息传输”，最早研究了通信系统传输信息的能力，给出了信息度量方法。

1948年美国工程师仙农发表了“通信的数学理论”，这是一篇关于现代信息论的开创性的权威论文，讨论了信源和信道特性，给出了信息度量的数学公式，为信息论的创立作出了独特的贡献。仙农因此成为信息论的奠基人。

信息理论与通信理论是分不开的，通信理论的发展正是信息理论发展的基础。通信中最重要的问题就是信息量问题和传送信息的速度问题。1267年罗杰·培根(Roger Bacon)提出了利用所谓“共振针”进行远距离的通信。16世纪吉尔伯特(Porta, Gilbert)提出了共鸣电报。1746年，英国沃森(Watson)在两英里的电线上，传送了电信号。1876年贝尔(Graham Bell)发明了电话。1925—1927年，引入了电视，出现宽频带问题及远距离传送图象时的相位问题和噪声问题。噪声问题一直是个大问题，这方面问题研究的先驱者有：爱因斯坦(Einstein(1905))，肖特克(Schottky(1918))，约翰逊(Johnson(1928))和尼奈斯特(Nyquist(1928))。1922年，约翰·卡森(John Carson)研究了调频信号的频带，提出“调频信号”并非窄带而是宽带，他认为“许多问题中往往包含有基本的谬误”，但到1936年，阿姆斯特朗(Armstrong)公布了他的调频试验的结果，指出：“在一组载波中可将最强的一个载波分离出来，许多很靠近的载波不致互相干扰。”这样就改正了卡森的错误结论，于是调频技术得到发展。卡森是位理论家，而Armstrong是

实验家;最后证明,实践才是检验真理的标准。

1924年,在美国有尼奈斯特,德国有屈普夫米勒(Küpfmüller),同时提出这样的定理:在速率一定的情况下传输电报信号需要一定的频带。经过4年后到1928年,哈特利(Hartley)将它写成公式,设由 N 个符号组成一条消息,这 N 个符号又是从 S 个符号中选取出来的,因此可有 S^N 条可能的消息。哈特利定义信息量为 $H = N \log S$,他还指出:为传输一定的信息量,需要一定的频带 B 和一定时间 t 。

1946年加博尔 Gabor 利用不定概念指出 $\Delta f \cdot \Delta t \approx 1$,这与海森伯格(Heisenberg)在波动力学中的不定关系很相似。

哈特利曾定义信息量 $H = 2Bt \log S$, S 代表不同的幅度电平。这样出现一个问题,如果信号是连续的,幅度电平数不是变为无穷多了吗?因而信息量也就变成无限大,这显然与实际情况是不相符的。一个办法是将连续波形用一组阶梯波形来代替,设阶梯高为 n ,它可以等于噪声电平。于是信息量可写为 $Bt \log \left(1 + \frac{a}{n}\right)$, a 代表最大信号幅度。若信息量保持不变, Bt 和 a 可以交换,增加 a 可减少 Bt 。

1936年,里夫斯(Reeves)和德洛雷因(Deloraine)提出了时分割多路系统。里夫斯还提出了幅度量化概念。

1948年,仙农和维纳(N. Wiener)提出有关信息的统计理论,设各符号出现的概率为 $p_1, p_2, p_i, \dots, p_n$, 则有:信息量 $H_n = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ 。该式与波兹曼(Boltzmann)的统计公式很相似。

信息与熵的等同关系早在1929年就由西拉德(Szilard)所指出。他在讨论马克斯韦尔的小精灵(Maxwell's demon)时指出。由于高能和低能气体分子的分离所损失的熵等于 demon 所得到的信息。

仙农的另一贡献是关于信道最大容量的表示式

$$I_{\max} = Bt \log \left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

P 和 N 分别代表信号功率和噪声功率。这里就引出了编码问题:当把一消息经过编码变为高斯噪声结构时,就得到最大信息传输速率,因而得到最大熵。

由于噪声的存在,在传送信息时必须有多余量用以克服噪声的影响。

克服噪声的另一方法就是维纳所提出的最佳滤波系统,其响应特性,输入信号与输出信号加噪声的均方误差为最小。时延是减少误差的另一途径,时延愈大则误差将愈小。与最佳滤波有关的一个问题是预测,维纳指出,在领先时间的情况下,可以得到最小平方误差的输出信号,可以设计出这样的预测器。

在信息理论的发展过程中有许多关键问题是应该注意到的。关键问题之一是信息量 I 、传送时间 T 、频带 B 、传输速率 v 之间的关系。

1884年凯尔文(Kelvin)提出海底电缆的平方定律,即信号的传输速度与距离 l 的平方成反比与电缆每单位长度的电阻 R 和电容 C 的乘积成反比,写成

$$v \propto \frac{1}{RCl^2}$$

1928年哈特利在《信息传输》一文中说道：“在一信道中传输的信道量 I 与信道的频带 B 和传输时间 T 的乘积成正比”，即

$$I \propto BT$$

—正弦波是在 $t = -\infty$ 到 $t = \infty$ 全部时间内连续的，取其一小段时间 Δt ，

—理想脉冲的频谱是在 $f = 0$ 到 $f = \infty$ 的全部频域中连续的，取其中一小段频率 Δf 。

到1946年，加博尔在他的《通信理论》一书中指出：信息量是与 Δf 与 Δt 的乘积成正比

$$I \propto \Delta f \Delta t$$

这一关系与海森伯格的不定原理相似

$$h \approx \Delta p \Delta q$$

仙农的抽样定理

如果信号 $f(t)$ 所包括的频率不高于 W 赫，则 $f(t)$ 可由一序列相隔 $\frac{1}{2W}$ 时间的抽样值所确定。设有一波形，其持续时间为 T ，现将该波形展成傅立叶级数，基频等于 $\frac{1}{T}$ ，最高谐波次数等于 $W / \frac{1}{T} = WT$ ，因每项谐波包括有正弦和余弦两个分量，因此需要 $2WT$ 个系数来确定这个波形。反之，给出相隔 $\frac{1}{2W}$ 的点 $f(t)$ 的数值，则仅有一个曲线通过这些点，同时没有大于 W 频率分量存在。所以， $f(t)$ 就由这些点所确定。

窄脉冲是具有无限大的频谱的，而不是限制于 W 内的频带。因此，这就需要定义一个合适的脉冲形状来代表抽样脉冲。

$$f_i(t) = \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)}$$

$$\text{当 } t = \frac{n}{2W} \text{ 时, } f_i = 1$$

$$t = \frac{m}{2W} (m \neq n) \text{ 时, } f_i = 0$$

所以，在点 $n/2W$ 的 f_i 值仅由该点的值所决定，与其它点 $m/2W (m \neq n)$ 的 f_i 值无关，这样就得出抽样函数表示式如下：

$$f(t) = \sum_{n=-T/2W}^{n=T/2W} x_n \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)}$$

信号的传输速率决定于可区分的幅度电平的差值和信道的带宽，这是通信理论中的基本问题之一。这个问题最早于1856年由凯尔文提出的，他建议将脉冲的形状加以改变，利用电位计指针摆动幅度的大小来区别26个字母。正方向13个字母，负方向13个字母，但这种电报受干扰的影响较大，只能用于海底电缆不能用于明线。到1948—1949年，才见诸于仙农和图利奥 Tullior 所发表的理论。1949年，图利奥给出一个例子说明将一个字用单一脉冲来表示是很不现实的。如 *No*，若用莫尔斯 (Morse) 码表示则为 $\cdot - \cdot - \cdot - \cdot -$ ，若用1表示·用111表示—，用0表示符号间空隙，用000表示字间的空

隙,于是有 111010001110111 → 477, 147。显然,要求能分辨出百万分之一的变化是很不实际的,但用符号传输信息的方法是可取的。

仙农-哈特利定律

令 S 代表可以区分的功率电平数

$$S = K \left(1 + \frac{P}{N} \right) \quad K = 1, \text{ (白噪声情况)}$$

P 是信号的最大功率。

N 是噪声的均方根功率。

所以,用功率电平来代替幅度电平,是因为 (1) 功率电平与负载阻抗无关; (2) 功率电平可更为方便地表示随机噪声。

已知一事件的信息量 I 与 $\log \frac{1}{p}$ 成比例。即概率 p 愈大,信息量 I 则愈小。显然,已确定的事件,概率为 1,信息量为零。

在等概率情况下,事件出现的概率与可能的事件数成反比,即 $p \propto \frac{1}{S^n}$, S -电平数,

$$p = \frac{1}{S^n}$$

$$\begin{aligned} I &= n \log S = 2TW \log S = 2WT \log \sqrt{1 + \frac{P}{N}} \\ &= WT \log \left(1 + \frac{P}{N} \right) \end{aligned}$$

信道的信息容量 C 是每单位时间内通过的信息量,即

$$C = \frac{I}{T} = W \log \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

在信道中传输信息时,信道容量必须大于信号的信息量。

信道与信息量的关系,与频带和时间的关系犹如公路上通过汽车。公路的宽度为频带,持续时间即行驶车辆时间,很显然在一定时间 T 内通过汽车数(信息量)必然与宽度和时间的乘积成正比,犹如 I 与 WT 成正比。通过汽车数是不能超过公路的容量的。

显然,频带 W 与信号噪声比 P/N 有着相互的补偿关系。在 C 不变情况下,增大 P/N 比可以减少一定的频带 W ,这一结论与我们一般的认识有矛盾。一般认为信道的带宽不应小于所传输的信号的频带。这是因为:用提高 P/N 比来压缩频带是不现实的。 P/N 要增加很大才能换得频带的一点压缩。举一例说明。设 $P_0/N = 10$,

$$\log_e \left(1 + \frac{P_0}{N} \right) = \log_e 11 = 2.3979$$

如果欲将 W 压缩一半,若保持 C 不变,则

$$\log_e \left(1 + \frac{P_1}{N} \right) \text{ 应等于 } 4.7958, 1 + \frac{P_1}{N} = 89,$$

结果是 $P_1 = 88P_0$, 是很不现实的。

现设 $N = N_0W$, N_0 是每单位频带的噪声功率,

$$C = W \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right),$$

因 P 已确定, 通信效率 η 可定义为每单位频带的传送信息量。

$$\eta = \frac{C}{W} = \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right).$$

最大的通信效率, 可由 $d\eta/dW$ 求得:

$$\frac{d\eta}{dW} = -\frac{\frac{P}{N_0 W^2}}{1 + \frac{P}{N_0 W}},$$

负号的意思是 η 随 W 的增加而减少。这是意料之中的事情, 在一定频带情况下, 传输速度将随功率的增加而增加。这样, 如将功率集中在窄带内, 将会提高每单位频带的传输速率。

仙农提出最大通信速率问题, 设 W_0 是这样一个频带, $N_0 W_0 = P$, 于是有

$$\frac{C}{W_0} = \frac{W}{W_0} \log \left(1 + \frac{N_0 W_0}{N_0 W} \right) = \frac{W}{W_0} \log \left(1 + \frac{W_0}{W} \right)$$

设 $\frac{W_0}{W}$ 比较小, 即 $W \gg W_0$,

根据 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{C}{W_0} = \frac{W}{W_0} \left[\frac{W_0}{W} - \frac{1}{2} \left(\frac{W_0}{W} \right)^2 + \dots \right] = 1$ 当 $W \gg W_0$,

所以, 得到这样的结论 $C = W_0 = 1.443$ 比特/秒·赫。在给定功率情况下, $\lim_{W \rightarrow \infty} C = W_0$, 最大通信速率为 1.443 比特/秒·赫。

到 70 年代 (1970 年), 有关信息论的研究, 从点与点间的通讯转入多端系统的研究。1972 年利弗 (Cover) 发表了有关广播信道的研究, 斯莱皮恩 (Slepian) 和沃尔夫 (Wolf (1973 年)) 研究了多端数据的紧缩编码问题。这些问题比较难, 至今仍有许多尚待解决的课题。在此同时, 决策和估值问题得到发展, 库尔贝克 (Kullback (1959 年)) 将决策与估值理论纳入信息理论的范畴之内, 作为信息论的一个组成部分。他引入判决函数, 与统计学有一定的关系。判决函数是模拟试验和参数估计的一个十分重要的核心函数。判决函数还在信道和信源编码中起着重要作用, 并与仙农信息论中的熵函数和互信息函数有密切的关系。决策和估计理论与信息论中随机数据的最佳利用有着相近的关系。所以近年来, 这些领域发展得很迅速。

1.3 控制论、信息论与系统论

谈到信息论不能不想到控制论与系统论, 称为老三论。

控制论 美国数学家维纳 (N. Wiener 1894—1964) 对自动控制系统感到很大兴趣, 40 年代初, 维纳研究计算机时认识到机器的控制系统与人脑功能有相似之处。

1948 年, 维纳出版了《控制论》(Cybernetics) 一书, Cybernetics 原意是“操舵术”就是掌舵的技术和方法的意思, 柏拉图称之为管理人的艺术。维纳认为: 控制论是“关于动