

金屬結構的屈曲強度

F. 柏拉希著

同濟大學鋼木結構教研室譯

F. BLEICH
BUCKLING STRENGTH OF
METAL STRUCTURES
McGraw-Hill Book Co. Inc. 1952

內 容 簡 介

本书共分十二章，主要論述直杆和矩形薄板在各种边界条件下的弹塑性稳定問題。各章內并扼要地介紹了各项理論发展的历史，和一些有关实验結果。本书的特点是理論观点和实际問題及实验結果密切結合，此外并制备若干表格，以供实际工作者应用。本书适合土木、造船及航空結構工程师及研究工作者参考。

金属结构的屈曲强度

F. 柏拉希著
同济大学鋼木結構教研室譯

*

科学出版社出版

北京朝阳門內大街 117 号

北京市书刊出版业营业许可证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965 年 4 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1965 年 4 月第一次印刷 印张: 17 11/16

精装: 0001-3,450 插页: 3

平装: 0001-3,150 字数: 467,000

统一书号: 15031·170

本社书号: 3119·15-1

定价: [科七] 精装本 3.50 元
平装本 3.00 元

目 录

譯者序	iii
原书編者序	v

第一章 中心或偏心受压柱子的屈曲

1. 引言	1
2. 直柱的弹性屈曲	4
3. 直柱的非弹性屈曲	8
4. 非弹性屈曲的双模量理論	10
5. 非弹性屈曲的切綫模量理論	14
6. 压杆非弹性工作的香萊理論	17
7. 柱子曲綫	22
8. 剪应力对屈曲荷载的影响	24
9. 偏心受压和承受横向荷载的柱子. 历史的发展	26
10. 矩形截面的偏心受压柱子. 卡門和許瓦拉法	28
11. 韦斯脫伽和奧斯古特的方法	34
12. 稳定問題的近似解	36
13. 偏心受压柱子的設計方法	45
14. 截面形状对柱子强度的影响	48
15. 正割公式	49
16. 偏心受压柱子的試驗	51
17. 偏心受压柱子理論的今后发展	55
18. 作为結構組成部分的柱子. 柱子設計原則	56
19. 安全系数	60

第二章 稳定問題的数学分析和稳定准則

20. 引言	67
--------------	----

21. 作为特征值問題来研究的屈曲問題	68
22. 正交关系	71
23. 能量法和势能不变定理	75
24. 李茲法	78
25. 鉄木森柯求解屈曲問題的概念	81
26. 李茲法的扩展	83
27. 用逐次漸近法求解柱子問題	88
28. 利用有限差分法求解屈曲問題	94
29. 变分法的簡單介紹	99
30. 包含一个独立变数的一个函数的积分	101
31. 包含一个独立变数的几个函数的积分	104
32. 包含二个独立变数的一个函数的积分	105
33. 边界条件	107

第三章 中心受压柱的弯扭屈曲

34. 引言	112
35. 具有开口薄壁截面的杆件在弯扭作用下的势能	115
36. 弯扭的微分方程	121
37. 与古第尔理論的比較	124
38. 截面性质	129
39. 中心受压柱的势能	132
40. 屈曲的微分方程式	137
41. 剪力中心与形心重合的柱子	138
42. 具有一个对称軸的柱子	141
43. 具有强迫轉动軸的扭轉屈曲	148
44. 腹板变形对 T 形加勁杆扭轉屈曲的影响	153
45. 試驗对理論的驗證	157

第四章 梁的側向屈曲

46. 引言	160
47. 工字形梁在軸向和橫向荷載作用下的側向屈曲	164
48. 无橫向荷載的梁	171
49. 无軸向力的梁	172

50. 具有强迫转动中心的侧向屈曲以及对理论的其他改进	176
51. 非弹性范围内的侧向屈曲	178

第五章 组合柱和变刚度柱

52. 引言	181
53. 缀条柱的屈曲强度	188
54. 缀板柱	190
55. 组合柱的局部破坏	196
56. 缀条柱中的次应力	200
57. 变惯矩的组合柱	203

第六章 构架的稳定

58. 引言	212
59. 平面构架稳定的解析准则——柏拉希法	216
60. 解析法的改变——用节点转角作为未知数	230
61. 利用力矩分配法原理的数字法	233
62. 构架构件中的弯矩对屈曲强度的影响	242
63. 在构架稳定性方面的实验研究	252

第七章 桁架中受压构件的有效长度和

刚架结构的稳定性

64. 引言	254
65. 桁架中受压构件的稳定性	255
66. 桁架的三节间构件群的稳定条件	258
67. 弦杆在桁架平面内的屈曲	260
68. 具有等截面受压弦杆的桁架	261
69. 连续桁架的弦杆	264
70. 腹杆的屈曲	267
71. K 式桁架中的竖向腹杆	271
72. 矩形刚架的屈曲	273
73. 下端铰接的单跨门式构架的屈曲	275
74. 下端固定的单跨门式构架的屈曲	277

75. 下端固定的双层矩形构架 (图 135)	279
76. 多层矩形构架	284
77. 主弯矩对矩形刚架屈曲强度的影响	292

第八章 在特定点上具有弹性支承 的中心受压杆件的稳定

78. 引言	294
79. 恩格塞尔公式	299
80. 弹性支承杆件的精确理论. 通解	303
81. 两端具有刚性支承的杆件	305
82. 两端具有弹性支承的杆件	313
83. 具有变化的压力、跨度、惯矩和弹簧常数的弦杆的稳定	320
84. 扭转作用对矮桁架受压弦杆的屈曲强度的影响	326

第九章 柱子板件的局部屈曲

85. 引言	334
86. 板问题的基本微分方程	337
87. 伊留辛和斯滔威尔的稳定理论	343
88. 微分方程 (601) 的通解	349
89. 第一种情况: 板在 b 边简支, a 边为弹性约束	351
90. 第二种情况: 板在 b 边简支, 一个 a 边为弹性约束, 而另 一 a 边自由	362
91. 简支板和完全固定板的临界应力和半波长度	367
92. 约束系数的确定	367
93. 在非弹性范围内屈曲时临界应力的确定	381
94. 柱子板件所需厚度的计算公式	388
95. 板的屈曲试验	386
96. 摘要和总结评论	394

第十章 有纵向加劲肋的矩形板

97. 引言	397
98. 在中线上具有一个加劲肋的简支板	400
99. 具有两个等距布置的加劲肋的简支板	411

100. 具有一个偏心布置的加劲肋的简支板	413
101. 在非荷载边具有弹性支承的矩形板	417
102. 板条加劲肋和 T 形加劲肋的局部稳定	422
103. 加劲薄板段的极限强度	425

第十一章 梁的腹板的稳定

104. 引言	429
105. 受剪矩形板的屈曲	433
106. 在非均布纵向应力下腹板的屈曲	443
107. 在剪应力和均布纵向压力共同作用下的简支板	448
108. 在剪应力和纯弯曲应力共同作用下的简支板	452
109. 板梁腹板设计公式的总结	454
110. 在剪切力作用下的横向加劲腹板	455
111. 在纵向压力作用下的纵向加劲腹板	464
112. 在剪力和纵向压力共同作用下的加劲板	470
113. 受剪板的极限强度	471
114. 实验研究	473

第十二章 船板设计中的特殊问题

115. 引言	476
116. 荷载边弹性约束、非荷载边简支的纵向受压矩形板	477
117. 四边嵌固的矩形板的屈曲	485
118. 具有格状截面的受压构件的稳定性	489
119. 搭接对板的屈曲强度的影响	503
120. 在压力和法向荷载作用下矩形板的极限强度. 引言	510
121. 薄板的大挠度理论的基本方程式	514
122. 纵向受压矩形板的马格耳大挠度理论	517
123. 马格耳理论用于正方形板的結果	523
124. 马格耳理论用于矩形板的結果	528
125. 极薄板的马格耳理论	530
126. 板的极限强度的试验	533
127. 马格耳理论扩展到在纵向压力和法向荷载作用下的板	535
128. 外部船板的设计	540

129. 用于外部船板設計的綫性化理論	545
130. 法向压力对矩形板屈曲强度的影响	551

第 一 章

中心或偏心受压柱子的屈曲

1. 引 言

在材料力学的研究工作中，没有一个領域会象金属結構 压杆屈曲强度理論那样，具有那么复杂变化的历史。虽然在过去几十年中已进行了很多研究，但在今天对于这一特殊領域的研究仍未結束。从本世紀初起，許多复杂問題的解答在理論方面获得了重大进展。但是大多数的理論解答，还有待于实验研究的証实，方能作为可靠的科学財富。

在屈曲問題研究工作中所遇到的困难，部分是由于問題本身的特殊性，同时也由于金属結構所用材料的特殊性所造成的。結構設計通常是根據內力和外力之間存在穩定的平衡这一假定来求出应力的。这就是說，要达到这样的平衡状态：即在一定範圍內，荷載情况有任何微小的改变时，不会使系統中产生不按比例增加的应力或弹性变形。因此，結構物安全度的保証依賴于某一定应力（称为容許应力）。屈曲問題表現出一个完全不同的性质——要查出外界荷載与結構內部抗力之間可能发生的不穩定平衡。其次，更复杂的問題是：屈曲現象一般是由所研究材料的应力应变的复杂关系来控制，因而引起了理論研究方面和实验研究方面的很多困难。

在确定压杆强度时，并不是使結構物或其中某一个杆件的应力适当地低于某一特定的应力，而是要防止一种特殊的不穩定平衡状态的发生。这种状态的特征是，当荷載有微小的增加时，应力和应变不按比例显著地增长，而其增长的数量是无法确定的。这种內部抗力的突然崩潰就是屈曲現象的特征，不管破坏瞬間弹性极

限是否超过。因此，金属结构的屈曲问题必须作为稳定问题来考虑，19 世纪的研究工作者的错误和失败的主要原因是没有重视这个事实；他们徒劳无益地试图考虑在稳定平衡状态中的弯曲应力以确定柱子的强度，这种想法使柱子强度问题迟迟未能解决，虽然第一个研究柱子问题的欧拉(Euler)^[1]已经指出了这一问题的真正性质和理论解决的正确途径。拉格朗日(Lagrange)(1770 年)证实了和扩展了欧拉的结论，并提出了一个改进的分析方法。

由于欧拉公式不能成功地用于短柱及中等长度的柱子中，使这一公式及推导此公式的理论几乎完全被后来的研究者所抛弃。当时没有足够清楚地认识到这些公式不能应用的原因是由于这些柱子在发生屈曲前已超过了弹性极限。在欧拉的原始理论中自然是沒有考虑到这一个事实。

在沙尔門(Salmon)所著的“柱子”^[2]一书的第三章中，生动地叙述了第 19 世纪中所有试图使欧拉理论和柱子试验所观察到的事实一致而产生的困惑情况。

早在 1845 年，比利时研究者 E·拉馬利(E. Lamarle)就指出了欧拉公式只是在弹性极限内有效。但是，他也没有对在屈曲以前，应力已超过弹性极限的柱子的工作性质有明确的认识。兹引用沙尔門的话：

“他(拉馬利)指出，当理想的柱子挠曲时，在最大纤维应力作用下的材料将会立即超过弹性极限。所以欧拉极限荷载不仅可看成是开始发生挠曲时的荷载，同时也是试件的破坏荷载。此外，假使弹性极限荷载小于欧拉极限荷载，那么理想柱子就会由于直接受压而破坏，而不是由于弯曲而破坏。根据这种情况可以确定一个长细比 l/r 值，小于此值时欧拉公式就不能应用”。

直至 1889 年，法国的康西德尔(Considère)和德国的恩格塞尔

[1] Euler, Leonhard, “De curvis elasticis”, Lausanne and Geneva, 1744 年。欧拉公式是在下列论文中推导出来的：“Sur la force de colonnes”，发表于 Mémoires de l'Académie de Berlin, 1759.

[2] Salmon, E. H., “Columns”, Oxford Technical Publications, London, 1921.

(Engesser)^[1]各自独立地指出，以广义形式来表示的欧拉公式在任何情况下都是有效的。恩格塞尔^[2]在1895年发表了他的双模量理论。但他的理论研究在卡门(Kármán)^[3]还没有进行一系列用来证明他的假定是否正确的精密试验以前，仍没有引起重视。恩格塞尔与卡门工作的重要性主要在于他们通过理论方式，求出作为稳定问题来考虑的柱子问题的一般解，并考虑了柱子材料的弹性和塑性性质。此外，恩格塞尔的理论 with 卡门的试验奠定了屈曲方面所有各种问题的理论分析的基础。

显然，为了把上述理论研究结果应用于实际工作中，必须确定某些经验数值。这些数值可表现在由精密的中心受压柱子试验结果或由材料的受压应力应变曲线推导出的柱子公式中。因此，从恩格塞尔和卡门的理论推导出发，并应用表达材料特性的经验数据的柱子公式（或根据这公式编制而成的图表），就可以有希望成功地在理论上研究和解决甚至在整个弹性及非弹性屈曲方面的难题。这就意味着，康西德尔和恩格塞尔的概念以及卡门的实验研究，可以看成屈曲问题在悠久历史过程中的里程碑。

理论上，每一个弹性体系在某种荷载情况下，都可以转为不稳定的平衡状态。但是，由于金属结构的弹性模量要比材料的弹性极限为大，因而很可能出现下列情况；即只有当结构杆件在到达弹性极限以前，就发生巨大的弹性变形时，才可能在弹性范围内失去稳定。当压杆中至少有一个或二个尺寸比第三个尺寸小得多时（例如细长的柱子，薄板或薄壳），上述情况就会出现。但由于超过了弹性极限后弹性模量迅速降低，因此在通常荷载情况下，可能变

-
- [1] Considère, A., *Resistance des pièces comprimées, Congrès international de procédés de construction*, 1889. Engesser, F., *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen*, 1889, p. 455.
 - [2] Engesser, F., *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 26, p. 24, 1895.
 - [3] V. Kármán, T., *Die Knickfestigkeit gerader Stäbe, Physikalische Zeitschrift*, Vol. 9, p. 136, 1908; and *Untersuchungen über Knickfestigkeit, Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, No. 81, Berlin, 1910.

为不稳定系统的整个范围是大大地扩展了。在超过弹性极限后，材料内部结构的部分崩溃使屈曲临界状态加速出现。这一事实说明了在金属结构的设计中稳定问题所占的重要位置。

上面已经作了有关屈曲问题简短的介绍和历史的评述。在下节中将通过一个基本问题，即细长直柱的弹性屈曲问题来说明屈曲现象的本质和特性。在第3—6节中将讨论在弹性极限外破坏的柱子的不稳定现象。

2. 直柱的弹性屈曲

我们来研究一个完全弹性的，在加荷开始前也是完全直的等截面长柱。沿柱的中心轴作用着一个纵向力 P (图1)。如果在柱子上同时作用一个横向力，这一横向力当单独作用时能在 x 点产生弯矩 m_x ，则在 x 处的总弯矩为：

$$M_x = Py + m_x$$

使挠曲面与柱子截面的最小惯矩 I 的平面重合，假定挠度 y 很小，则受挠柱子弹性曲线的微分方程为：

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py + m_x = 0 \quad (1)$$

现在考虑具有自由支承的柱子（端部可以自由转动），设 m_x 是由作用在柱子中部的一个很小的横向集中荷载 Q 所产生。令

$$m_x = \frac{Qx}{2} \text{ 和 } \alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \text{ 则下式}$$

$$y = \frac{m_x}{P} \left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha x \cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \quad (2)$$

是方程式(1)的解，此解适用于杆件的上半部（ $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ ）。只要干扰弯矩 m_x 不等于零，式(2)的解就永远满足方程式(1)。在式

(2)中,当 P 較小时, $\cos \frac{\alpha l}{2}$ 接近于 1, 但当 P 增加因而 α 也增加时, 式(2)中的分数值也同样增加, 而当 $\frac{\alpha l}{2}$ 趋近于 $\frac{\pi}{2}$ 时, 該分数值增加得很快. 因此, 起先 y 逐漸增加, 直到 αl 接近 π 时, y 就无限制地增长, 这时柱子已經屈曲. $\alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi$ 的条件与欧拉公式所給出的屈曲荷載 P_E 的上限是一致的:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3)$$

弯矩 m_x 愈小, 柱子破坏荷載 P 愈接近于欧拉荷載 P_E .

现在来看当干扰弯矩 m_x 等于零时的情况. 当 $m_x = 0$, 方程式(1)簡化成为齐次微分方程, 这个方程对任意 P 值都有一个 $y = 0$ 的解. 柱子始終保持正直. 这个齐次微分方程除了上述解以外还有下列称为特征解的体系:

$$y = C \sin n \frac{\pi x}{l} \quad (4)$$

相应的特征值为 $P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$, 式中 n 是整数, C 是任意常数. 在这些解中, 只有当 $n = 1$ 时所給出的最小值 $P = P_E$ 以及 $P = 0$ 有重要意义, 因为相应于其他 n 值时柱子的形状只有在某些人为的条件下才可能存在, 这些人为条件目前暫不予以考虑. 当沒有干扰弯矩时, 在 $P < P_E$ 的任何数值下柱子仍然保持正直; 而当 $P = P_E$ 时, 柱子挠曲成为正弦曲綫, 曲綫的幅度 C 具有不定值. 因此欧拉荷載 P_E 的定义就是能够使柱子保持微小弯曲形状的最小荷載.

綜上所述, 完全直的承受中心荷載的柱子的工作性质如下:

当柱子承受一个小于临界荷載 P_E 的軸心荷載 P 时, 柱子将保持正直. 加上干扰弯矩 m_x 后, 柱子将会产生挠曲, 其数值由式(2)决定. 如果弯矩 m_x 停止作用, 則柱子仍回复到原来的直綫状态. 內力和外力是平衡稳定的. 当 $P = P_E$ 时, 如果沒有橫向荷載, 則柱子可能处在挠曲状态, 具有不定幅度的正弦曲綫形状, 但是如果極微小的干扰弯矩, 就会引起柱子非常大的挠曲, 这时即使去掉干扰弯矩, 柱子仍然不会回复到初始状态. 这就是內力与

外力之間不穩定平衡的一種情況。這樣，臨界荷載 P_E 就表征柱子工作性質中不穩定狀態的一點。

但是上面所得到的結果，其中有一部分是從數學上的假想得來的，因為推導上述結論的微分方程(1)只是近似地描述柱子變形的工作性質。如果利用彈性曲線的精確方程式來進行研究：

$$\frac{EI}{\rho} = -M_x$$

式中 ρ 是柱子軸線變形後的曲率半徑，則當去掉橫向荷載後，柱子中部撓度 y_m 的較精確值為：

$$y_m = \frac{2l}{\pi} \sqrt{\frac{P_E}{P} \left(\sqrt{\frac{P}{P_E}} - 1 \right)} \quad (5)$$

式中 P 及 P_E 所代表者與前述相同^[1]。

$P < P_E$ 時， y_m 永遠是虛值，因此不會發生真正的撓曲，而柱子保持正直。甚至當 $P = P_E$ 時， $y_m = 0$ ，柱子也沒有發生變形。只有當 $P > P_E$ 時，才會出現一定的撓度，撓度的大小是可以算出的。但是，很容易從計算得知，只要 P 稍為超過 P_E ，就會引起顯著的撓曲。即使 P 只超過 P_E 一點，但所發生的撓曲度就會使柱子發生危險。

例如，設 $P/P_E = 1.001$ ，可得 $y_m = 0.0142l$ ，如果柱子的 $l/r = 120$ 和 $c/r = 2$ (c 為邊緣纖維至柱子中軸的距離) 則最大纖維應力為 $\sigma = 3.41 P_E/A$ (A 為截面面積)。因此，當 P 超過臨界荷載 P_E 的 $\frac{1}{1000}$ 時，邊緣纖維應力就增加到屈曲應力 P_E/A 的 3.41 倍，這個應力是軟鋼所不能承受的。因此，柱子就會在較早時間破壞。

同樣可以指出，當 $P = P_E$ 時，杆件仍能承受一個相當小的干擾彎矩，這時柱子僅是對於干擾非常敏感，在干擾下會產生一定數值的但是很大的撓度。

因此，實際上看來，比較準確的分析結果與早先得出的結果相

[1] Grashof, F., Theorie der Elasticität und Festigkeit, 2d ed., p. 168, Berlin, 1878.

同。在达到欧拉屈曲荷载之后，柱子工作性质变为不定，当荷载有极小的增长或者有很小的干扰时就会引起柱子的破坏。比较精确的分析指出，在 P_E 与引起某一定数值的挠度的实际荷载之间存在着一个狭窄的过渡区，由于这个过渡区的存在，消除了接近屈曲极限时柱子工作性质的不连续性。在以前所推导的公式中，由于基本方程式中忽略了某些高阶项，因此上述的过渡区缩小成为一个不连续点。我们所需要的，只是要求出使柱子的工作性质或多或少地发生急剧变化的临界荷载 P_E 。更准确地說，我们需要确定开始屈曲时的条件，而不是屈曲本身的作用。为了简化分析工作，我们采取了柱子突然破坏的假想。因此，我们可采用线性微分方程

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0 \quad (6)$$

作为研究的基础，这一方程对于具有无穷小的挠度 y 的极限情况是精确的。这一事实说明了为什么方程式(6)和比较精确的方程式

$$\frac{EI}{\rho} + Py = 0$$

给出相同的屈曲荷载 P_E 。

从上面的推理可以得出下述的不稳定(屈曲)准则：当到达临界荷载 P_E 时，可能有两种平衡状态；即直线形式和与直线无限近的挠曲形式，这两种形式是在同样的轴向荷载 P_E 下发生的。我们所谈的就是“平衡状态的分叉”，而这种分叉是不稳定状态的准则。

把式(3)除以截面面积，并以 $A r^2$ 值来代替惯性矩 I (r 是断面迴转半径)，则式(3)变为下列形式：

$$\frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \quad (7)$$

式中 l/r 是杆件的长细比。

在推导欧拉公式(3)以及式(7)时，我们假定弹性模量 E 是不变的。因此，只有当在屈曲发生之前弹性模量 E 不改变时式(7)才有效。也就是说，只有当 P_E/A 值低于弹性极限时，式(7)才有

效。这个条件限制了式(7)只能适用于在弹性范围内的屈曲,而使式(7)只在长細比 l/r 超过某一限值时才有效(这一限值与柱子材料性质有关)。令人难以理解的是,从欧拉到拉馬尔,经历了一个世紀后,这一基本事实方才为人们所发现。

到现在为止,我們只研究了两端簡支的柱子。端部有弹性約束或端部固定的柱子也表现出同样的性质,因此,可把上述結論扩展到一般情况中。用符号 σ_c (临界应力)来表示 P_c/A (P_c 是临界荷載或屈曲荷載),我們可以写出式(7)的普遍形式;

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{(kl/r)^2} \quad (8)$$

式中无量綱的系数 k 表示端部情况对临界荷載的影响, kl 值称为“有效长度”或“自由长度”。

在以后的討論中, $k=1$ 的情况将作为屈曲的基本情况,而相应的临界应力 σ_c 則用 σ_E 来表示。

当然,欧拉公式(3)所确定的屈曲荷載 P_E 值不可能在实际情况下达到,因为绝对直的柱子并不存在,而且荷載也不可能象理論中所假定那样精确地作用在重心軸綫上。虽然如此,在精确地进行的小試件試驗中,干扰弯矩尽可能地消除,因此,所观察到的临界荷載十分接近于理論荷載 P_E , 这样,实验誤差实际上就不重要了。

3. 直柱的非弹性屈曲

前节中的討論是以下面的假定作为基础的,这就是当平衡成为不稳定的瞬間,临界应力,也就是沿截面均布的压应力仍然沒有达到弹性极限。但是这个假定只是对細长柱子来說是正确的。在較短柱子中,屈曲开始发生前,应力已經超过了弹性极限,以前认为是常数的弹性模量 E , 現在却成为临界应力 $\sigma_c = P_c/A$ 的函数。

康西德尔和恩格塞尔首先看到,当引入一个变化的弹性模量后,欧拉公式可用在非弹性范围的屈曲中。恩格塞尔^[1]在1889年就提出了他的切綫模量理論。几乎在同时,康西德尔^[2]在巴黎国

际會議提出,在非弹性屈曲的情况下,柱子强度可以利用广义的欧拉公式 $\pi^2 \bar{E} I / l^2$ 来求出,式中变化模量 $\bar{E}$ 值介于楊氏模量与切綫模量之間。虽然康西德尔未曾提出确定 $\bar{E}$ 实际数值的理論,但他已經看出,当中心受压柱子在超过比例极限的应力作用下开始挠曲时,在凹側的应力是根据受压的应力应变曲綫規律增长的,而在凸側的应力則与应变成正比例地减少^[3],后来恩格塞尔同意了康西德尔的論点,并在 1895 年提出了在非弹性范围内柱子屈曲問題的改进的解答,这就是双模量理論^[4]。

以后沒有取得任何进展,一直到 1908 年,卡門^[5]开始致力于非弹性范围内柱子工作性质問題的研究。他根据梅依尔 (Meyer)^[6] 的試驗結果刷新了恩格塞尔的理論。梅依尔的試驗結果証明,大家熟悉的弯曲理論的原理(第 4 节第 2 和第 3 条假定)在弯应力超过比例极限后仍然有效。在 1910 年,卡門通过矩形截面小試件的一系列精确試驗使上述理論获得充分的根据。

值得注意的是,1912 年苏斯威尔 (Southwell) 在他的論文“撑杆强度”中提出了双模量理論^[7],显然,他事先沒有看过恩格塞尔和卡門的論文。

从那时开始,双模量理論被大家认为是非弹性范围内柱子工作的正确理論。但是再过一些时候,对于双模量概念是否正确又引起了一些疑問。各种截面形状試件試驗所得数据表明,实际屈

[1] Engesser, F., *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen*, 1889, p. 455.

[2] Considère, A., *Resistance des pièces comprimées, Congrès international des procédés de construction*, Vol. 3, p. 371, Paris, 1891.

[3] Osgood, W. R., *The Double-modulus Theory of Column Action, Civil Eng.*, Vol. 5, p. 173, 1935.

[4] Engesser, 見本书 3 頁注 [2]。

[5] Kármán, 見本书 3 頁注 [3]。

[6] Meyer, *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, Vol. 52, 1908.

[7] Southwell, R. V., *The Strength of Struts, Engineering*, Vol. 94, p. 249, 1912.