HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

运筹学(OR)的原理和方法

YUNCHOUXUE DE YUANLI HE FANGFA

邓成梁　主编

华中理工大学出版社

运筹学的原理和方法

邓成梁 主 编

王 棠 诸克军 副主编

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

运筹学的原理和方法/邓成梁　主编
武汉:华中理工大学出版社,1996 年 3 月
ISBN 7-5609-1279-6
Ⅰ. 运…
Ⅱ. ①邓…　②王…　③诸…
Ⅲ. 运筹学—统筹方法—排序问题
Ⅳ. O223

运筹学的原理和方法

邓成梁　主编
责任编辑:林化夷　李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山　邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
武汉市新洲县印刷厂印刷
*
开本:787×1092　1/16　印张:19　字数:453000
1996 年 3 月第 1 版　1996 年 3 月第 1 次印刷
印数:1-5 000
ISBN 7-5609-1279-6/O・149
定价:15.00 元

内容提要

运筹学是近几十年发展起来的一门新兴学科，主要运用数学方法研究各种系统的优化途径和方案，为决策者提供各种决策的科学依据. 它也是高等院校经济管理类专业的一门重要专业基础课.

本书基于运筹学这门学科的理论体系，同时考虑到经济管理类专业的特点，选编了线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、图与网络分析、存贮论等运筹学的基本内容. 论述了这些分枝的基本原理和基本方法，同时注意了它们的应用. 本书力求深入浅出、通俗易懂，每章后面都附有习题，便于自学.

本书可作为高等院校经济管理类专业本科生或研究生的教材或教学参考书，也可供应用数学、系统工程、理工类专业本科生及各类经济管理工作者和科技人员参考.

前　言

运筹学是近几十年发展起来的一门新兴学科，是管理科学和现代化管理方法的重要组成部分，主要运用数学方法研究各种系统的优化途径和方案，为决策者提供各种决策的科学依据．它也是高等院校经济管理类专业的一门重要专业基础课．

为适应高等院校经济管理类专业教学的需要，作者在原自编讲义的基础上，总结多年来的教学经验，编写了本书．

本书基于运筹学这门学科的理论体系，同时考虑到经济管理类专业的特点，选编了线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、图与网络分析、存贮论等运筹学的基本内容．编写的指导思想是以线性规划为重点，系统地介绍这些分枝的基本概念、基本原理和基本方法．首先，注意到本学科理论上的严谨性，对有关的原理和方法，给予了必要的推导和论证，有些用几何直观来加以说明；其次，从实例入手建立数学模型，着重介绍一些经济管理中比较实用的模型和方法，并配合大量的计算实例，讲清其原理和步骤，便于编制程序和上机计算；再者，还尽量结合一些经济管理中的实际问题，给计算结果以经济解释，尽量做到理论联系实际．同时，注意培养学生建立数学模型、求解模型以及分析解答结果并进行经济评估的能力．论述力求深入浅出、文字通俗易懂，只要学过微积分、线性代数的读者都可以看懂．每章后面都附有习题，便于自学．

本书可作为高等院校经济管理类专业的本科生或研究生的教材或教学参考书，讲授全书约需80学时左右．也可供应用数学、系统工程、理工类专业本科生及各类经济管理工作者和科技人员参考．

作者要感谢华中理工大学工商管理学院的领导，特别是院长陈荣秋教授，还有信息管理系的老师们，没有他们的大力支持和帮助，本书是很难问世的；还要感谢华中理工大学出版社的领导和编辑，本书得以出版是与他们的支持和辛勤劳动分不开的．

当然，由于我们水平有限，书中的缺点和疏漏之处在所难免，恳请各方面专家、学者及广大读者批评指正．

参加本书编写的作者及分工如下：

邓成梁（华中理工大学工商管理学院）编写绪论、第一、二、三、八章；

王　棠（华中理工大学工商管理学院）编写第六、七、九章；

诸克军（中国地质大学文管学院）编写第四、五、十章．

最后由邓成梁统稿定稿．

编者

1995年国庆节于

华中理工大学

目　　录

绪　论

运筹学是近几十年形成的一门新兴学科，它主要运用数学方法研究各种系统的优化途径及方案，为决策者提供科学决策的依据.运筹学的主要研究对象是各种有组织系统的管理问题及其生产经营活动，其主要研究方法是定量化和模型化方法，尤其是运用各种数学模型.运筹学的目的在于针对所研究的系统，求得一个合理运用人力、物力和财力的最佳方案，发挥和提高系统的效能及效益，最终达到系统的最优目标.实践表明，随着科学技术的日益进步和生产经营的日益发展，运筹学已成为现代管理科学的重要理论基础和不可缺少的方法，在现代化建设中被人们广泛地应用到经济管理、工业、农业、商业、国防、科技等各个领域中去，发挥着越来越重要的作用.

§1　运筹学的产生和发展

运筹学(Operations Research，简记为 OR)可译为"操作研究"或"作业研究"，我国运筹学前辈从《史记》一书中，摘取"夫运筹策帷幄之中，决胜于千里之外"一语中的"运筹"一词，作为这门学科的名称，既确切地反映了该学科的内涵，同时又显示其军事起源，并且也表明它在我国已早有萌芽.

运筹学的渊源可以追溯到很久以前，甚至可以说自人类诞生以来，一直都在经历着通过运筹作出决策的过程.在我国历史上就有不少的记载.例如，战国时代齐王与田忌赛马的故事，北宋年间丁渭修复皇宫的事例等都具有一些朴素的运筹学思想.在国外也记载有很多早期先驱者致力于这方面研究的成果.例如，1736 年欧拉解决了著名的哥尼斯堡七桥问题；1915 年哈里斯(F. W. Harris)推导出经济订货批量公式；1917 年爱尔朗(A. K. Erlang)进行了关于自动拨号设备对电话需求影响的实验等等.但是，限于生产力发展水平，这些思想方法只是停留在自发地和零星地应用于个别问题上，还没有形成一种系统的科学方法.

运筹学作为一门现代新兴的学科，人们普遍认为，起源于第二次世界大战期间的军事运筹活动.20 世纪 40 年代初是第二次世界大战最紧张的时期，当时英、美两国都发明和制造了包括有雷达、火炮、深水炸弹等一批新式武器，但如何有效地使用这些武器却远远落后于这些武器的制造.为此，英国军事管理部门召来一批具有不同学科和专业背景的科学家，在 1940 年 8 月成立了一个由布莱克特(P. M. S. Blackett)领导的跨学科的 11 人小组，称为"OR"小组.这标志着世界第一次开始正式的运筹学活动.随后，美国于 1942 年 3 月也成立了 17 人的运筹学小组，研究美国海军反潜艇部队的深水炸弹的起爆深度和反潜艇策略等问题.这些早期的运筹工作，由于研究与防御有关的战略技术问题，受到战时军事需要的压力；又由于不同学科的相互渗透产生的协同作用，成功地解决了许多重要的作战问题，为以后运筹学的发展积累了丰富的经验.

二次世界大战以后，当工业逐渐恢复繁荣时，由于迫切需要解决各组织内与日益俱增的复杂性和专门化所面临的问题，一些曾经在军事运筹小组工作过的专家和学者，除了一部分继续从事国防战略、武器规划的研究之外，大部分人转向注意工农业生产等民用部门应用这类方法的可能性，并且探讨了运筹学在工商企业和其它国民经济部门的应用，取得了良好的效果.40

年代后半期，一些原来的运筹学专家，有的重返大学和研究部门，专心致力于运筹学理论基础的研究，寻找各种分析和解决管理问题的新方法. 于是 50 年代以后，随着运筹学关于系统配置、聚散、竞争的运用机理深入研究和应用，进而出现了诸如规划论(包括线性规划、非线性规划、动态规划、整数规划等)、排队论、存贮论、图与网络分析和决策论等比较完备的一套理论和方法，使运筹学作为一门理论性和应用性很强的学科逐渐形成并得到迅速发展.

值得指出的是，运筹学方法之所以能迅速推广并取得成功，这与 40 年代末电子计算机的问世及其平行发展是分不开的. 由于随着运筹学应用范围的不断扩大，所处理的问题的复杂性也大为增加. 在研究解决这些大型复杂问题的过程中，电子计算机的应用起了重要作用，一开始就成为运筹学分析工作者用来处理十分棘手的大量数学计算的有力工具. 随着时间的推移，一方面由于计算机能快速产生运算结果，为解决各种实际的运筹学问题提供了有力的支持；另一方面，由于计算机能快速利用各种类型的管理信息系统，实现各种运筹模型的设计，并能提供各种运筹学试验手段(例如模拟技术)，从而开创了运筹学应用的新局面，大大促进了运筹学的发展.

进入 60、70 年代，随着社会实践不断提出更高的要求，运筹学发挥的作用也越来越大，取得了一系列成就. 在企业管理、工程设计、生产计划、财政金融、资源配置、物资存贮、公共服务、医疗保健、交通运输、教育科研、国防军事、航天技术等社会各个领域，到处都有运筹学应用的成果. 到了 80、90 年代，运筹学已处于兴旺发达时期，面对当今世界亟待解决的人口、能源、粮食、裁军、经济发展等诸多重大问题，运筹学都有用武之地. 可以预见，在不远的将来，运筹学将会作出更为积极的贡献.

在 50 年代中期，钱学森、许国志等教授将运筹学由西方引入我国，并结合我国的特点在国内推广应用，60～70 年代，由华罗庚教授领导的一批运筹学工作者，在全国大力推广和普及统筹法、优选法，取得了一批可喜的成果. 当前，随着我国改革开放政策的贯彻以及全国工作重点转移到以经济建设为中心的轨道上来，国民经济与社会的各个领域，特别是企业组织的科学管理，日益受到人们的重视，运筹学作为现代化管理的重要工具，必将为加速我国的现代化建设作出更为积极的贡献.

§2　运筹学的研究对象及特点

运筹学是一门新兴的学科，至今还没有公认统一且确切的定义. 现提出以下几个定义来说明运筹学的研究对象及特点.

英国运筹学会给运筹学下的定义是：

运筹学是一系列科学方法的应用. 在工业、商业、政府部门及国防中，用这些方法处理大量的人员、机器、材料和资金等复杂问题. 这种方法的特点是科学地建立系统模型，包括度量各种因素，例如分析机会和风险，以此预测和比较各种决策、策略或控制的结果，使管理机构科学地确定它的政策及其行动.

美国运筹学会下了一个比较简短的、与上述相类似的定义：

运筹学的研究内容是，在需要对有限的资源进行分配的情况下，作出人机系统最优设计和操作的科学决策.

虽然这两个定义尚存某些不足之处，但运筹学的研究领域如此广泛，人们下这样的定义还是有用的. 值得注意的是，这两个定义都强调推动实际工作，即帮助决策者处理复杂问题. 另

外，上述两个定义还涉及到了方法论，但只提了一下“科学性”，由于科学方法多种多样，这个术语就显得太一般了，运筹学方法论的更精确描述是建立在“模型”基础上的. 这一点我们将在下面说明.

还有莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)曾对运筹学下的定义：

为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法.

它首先强调的是科学方法，这含义不单是某种研究方法的分散和偶然的应用，而且可用于整个一类问题上，并能传授和有组织的活动. 它强调以量化为基础，必然要用数学. 但任何决策都包含定量和定性两方面，而定性方面又不能简单地用数学表示，如政治、社会等因素，只有综合多种因素的决策才是全面的. 运筹学工作者的职责是为决策者提供可以量化方面的分析，指出那些定性的因素.

还有人认为：运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据.

这个定义表明运筹学具有多学科交叉的特点，如综合运用经济学、心理学、物理学、化学. 当然还有数学中的一些方法，为管理者提供决策依据.

从以上几种定义可以看出，虽然每个定义所强调的侧重点略有不同，但总的含义大体是一致的. 一般说来，运筹学的研究对象是各种有组织的系统(主要是经济组织系统)的经营管理问题，运筹学所研究的系统是在一定时空条件下存在，为人所能控制和操纵，有两个以上行动方案可供抉择而需要人们作决策的系统. 运筹学研究的问题是能用数量表示与系统各项活动有关而带有运用、筹划、使用、安排、控制和规划等方面的问题. 运筹学的任务就是在现有条件下，根据问题的要求，对有关活动中的错综复杂的数量进行分析研究，并归纳为一定的模型，然后运用有关原理和方法求得解决问题的最优途径和方案，以求实现预期目的.

运筹学作为一门定量决策科学，利用数学、计算机科学以及其它科学的新成就，研究各种系统尤其是经济管理系统中运行的数量化规律，合理使用与统筹安排人力、物力、财力等资源，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理并获得满意的经济效益和社会效果. 就其理论与应用意义上归纳，运筹学具有如下一些主要特点：

1. 运筹学研究和解决问题的基础是最优化技术，并强调系统整体最优. 运筹学针对研究的实际问题，从系统的观点出发，以整体最优为目标，研究各组成部分的功能及其相互间的影响关系，解决各组成部门之间的利害冲突，求出使所研究问题达到最佳效果的解，并寻找一个最好的行动方案付诸实施.

2. 运筹学研究和解决问题的优势是应用各学科交叉的方法，具有综合性. 运筹学从一开始就是由不同学科专长、多方面专家经过共同协作集体努力而获得成果的. 现在，由于研究对象的复杂性和多因素性，决定了运筹学内容的跨学科性、交叉渗透性和综合性.

3. 运筹学研究和解决问题的方法具有显著的系统分析特征，其各种方法的运用，几乎都需要建立数学模型和利用计算机进行求解. 可以说现在及今后，没有计算机的发展就没有运筹学的发展.

4. 运筹学研究和解决问题的效果具有连续性. 一方面，用运筹学方法获得的解或最优方案，不可能在同一时间内将所有相关的问题都全部解决；另一方面，一旦发现有新的情况或问题时，必须对原有模型进行修正或者需要输入新的数据，以调整原来的解或方案. 因此，只有通过连续研究才能获得新的更好的效果.

5. 运筹学具有强烈的实践性和应用的广泛性. 运筹学的目的在于解决实际问题，它所使用

的全部假设和数学模型无非都是解决实际问题的工具，有助于各种经济活动和管理问题的解决，最终能向决策者提供建设性方案并能收到实效.因此，它的应用并不受行业和部门的限制，已被广泛应用于工商企业、军事部门、服务行业和经济管理部门中.

§3 运筹学模型及其研究方法

运筹学研究和解决问题的核心是正确建立和使用模型.通常，模型可以认为是描述客观世界或现实系统的代表或抽象的观念，是帮助人们认识、分析和解决实际问题的有力工具.人们在管理工作或其他工作中，为了研究某些问题的共性，有助于解决实际问题，经常使用一些文字、数字、符号、公式、图表以及实物，用以描述客观事物的某些特征和内在联系，从而表示或解释某一系统的过程，这就是模型.它具有如下功能：

1. 模型是现实问题某一主要方面的描述或抽象，比现实本身简单和概括，使人易于认识、理解和操作；

2. 模型是由与研究实际问题有关的主要因素所构成，并表明这些因素的相互关系，从而能够更简明地揭示出问题的本质；

3. 通过模型可以进行试验，用以分析和预测所研究事物或系统的特征及性质.尤其在研究工业系统、军事系统、政府或社会系统的最优管理或运行的问题时十分必要，因为这样可以避免由于真实对象的干扰而导致不测的风险.

4. 利用模型可以在相对短的时间内获得所研究问题的结果.特别对一个复杂问题的研究，利用模型，使研究者不必真的实现计划即可改变其参数，从而不必等待一段较长的时间就可以得到问题的答案.

5. 利用模型可以根据过去和现在的信息进行预测，并可用来培训教育人才.

模型有三种基本形式：形象模型、模拟模型及符号或数学模型，目前用得最多的是符号或数学模型.数学模型是将现实系统或问题中有关参数和因素及其相互关系归纳成一个或一组数学表达式，并可以用一定的分析和计算方法进行求解，以实现反映现实系统变化规律的主要目标.运筹学中所使用的数学模型，一般是由决策变量、约束或限制条件以及目标函数所构成，其实质表现为在约束条件允许的范围内，寻求目标函数的最优解.其中决策变量又称为可控制变量，是模型所代表的系统中受到控制或能够控制的变量，在模型中表现为未知参数，对模型进行分析研究，最后就是通过选定决策变量来实现其最优解；约束条件即决策变量客观上必须满足的限制条件，它反映出实际问题中不受控制的系统变量或环境变量对受控制的决策变量的限制关系；目标函数是模型所代表的性能指标或有效性的宏观度量，在模型中表现为决策变量的函数，反映了实际问题所要达到的理想目标.

数学模型的一般形式可表述为

$$\max(\text{或}\min)\ Z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n);$$
$$\begin{cases} g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant(\text{或}=,\text{或}\geqslant)0,\ i=1,2,\cdots,m;\\ h_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ j=1,2,\cdots,l.\end{cases}$$

其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为决策变量，Z 为目标函数，$g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0$ 和 $h_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 为约束条件.

针对实际问题所建立的运筹学模型，一般应满足两个基本要求：一是要能完整地描述所研究的系统，以便能代替现实供我们分析研究；二是要在适合所研究问题的前提下，模型应尽量

简单.但是，要实现这些要求，在开始建模时，往往不容易做到，而且选择什么样的模型和确定建立模型的范围，在开始阶段也很难判断，需要有丰富的实践经验和熟练的技巧，有时需要多次反复修改，最后确定下来.所以建立模型是一种创造性的劳动.一般来说，这项工作应由运筹学工作者与专业实际工作者共同协作进行最为适宜.

运用运筹学方法分析和解决问题，作为一个过程实际上是一个科学决策的过程，这个过程的核心是建立运筹学模型和对模型进行分析、求解.正确地进行这个过程 一般要经过如下步骤：

1.提出并形成问题.要解问题，首先需要提出问题，明确问题的实质及关键所在，这就要求对系统进行深入的调查和分析，确定问题的界限，选准问题的目标.

2.建立模型.运筹学模型是一个能有效地达到一定目标(或多个目标)行动的系统，因此，目标一经认定，就要用数学语言描述问题，建立目标函数，分析问题所处的环境，确定约束方程，探求与问题有关的决策变量等，并选用合适的方法，建立运筹学模型.

3.分析并求解模型.根据所建模型的性质及其数学特征，选择适当的求解方法.例如经典法、迭代法或模拟法等，求出模型的最优解.

4.检验并评价模型.模型分析和计算得到结果以后，尚需按照它能否解决实际问题，主要考虑达成目标的情况，选择合适的标准，并通过一定的方法，例如灵敏度分析法、参数规划法、相关分析法等，对模型结构和一些基本参数进行评价，以检验它们是否准确无误，否则就要考虑改换或修正模型，增减计算过程中所用到的资料或数据.

5.应用或实施模型的解.经过反复检查以后，最终应用或实施模型的解，就是供给决策者一套有科学依据的并为解决问题所需要的数据、信息或方案，以辅助决策者在处理问题时作出正确的决策和行动方案.

应当说明，以上虽然将运筹学解决问题的过程划分为五个独立的阶段，但在实际应用中，很少能够将它们截然分开并加以区分，各个阶段之间经常是相互影响和彼此重迭，有时要经过多次反复.例如，建立模型这关键的一步就经常受到现有的求解方法的影响，有时甚至当运筹学研究进入到后面几个阶段时，由于对原来形成的问题有了新的认识，也会对前面工作阶段的内容作进一步的修改、补充，甚至推倒重来.

最后需要指出，随着运筹学应用逐渐向更复杂的系统和社会系统渗透，而这些系统又往往存在着大量的不确定因素.因此，运筹学仅仅依靠数学模型作定量分析已很难处理好系统的优化问题.所以其研究方法已开始出现将定量分析、定性分析及计算机模拟等相结合的综合优化分析方法的发展趋势.

第一章　线性规划引论

线性规划(Linear Programming,简记为LP)是运筹学的一个重要分支,是运筹学中研究较早、发展较快、理论上较成熟和应用上极为广泛的一个分支.最早研究这方面问题的是前苏联数学家康托洛维奇(Д. В. Канторович),他在1939年著的《生产组织与计划中的数学方法》一书中,首次提出了线性规划问题.以后美国学者希奇柯克(F. L. Hitchcock,1941)和柯普曼(T. C. Koopman,1947)又独立地提出了运输问题这类特殊的线性规划问题.特别是在1947年,美国学者丹捷格(G. B. Dantzig)提出了线性规划问题的一般解法——单纯形法,为线性规划的发展奠定了基础.40多年来,随着电子计算机的发展,线性规划已广泛应用于工业、农业、商业、交通运输、经济管理和国防等各个领域,成为现代化管理的有力工具之一.

本章将通过管理中的几个实例引出线性规划问题,建立它的数学模型,介绍线性规划的一些基本概念和解的基本性质.

§1　线性规划问题及其数学模型

1.1　线性规划问题的实例

从管理的角度来看,任何一个企业可供利用的资源(包括人力、物力和财力等)都是有限的.如何合理地利用和调配人力、物力,如何充分发挥现有资金和设备的能力,不断提高生产效率,使企业获得最大的效益;或者是在既定任务的条件下,如何统筹安排,尽量做到用最少的人力、物力和财力资源,去完成这一任务.这些都是企业的决策者和管理人员十分关心的问题.其实这是一个问题的两个方面,就是寻求在一定的条件下,使某个指标达到最优的问题.这也正是线性规划所要研究的问题.诸如资源的合理利用问题、生产的组织与计划问题、合理下料问题、配料问题、场址的选择问题、作物的合理布局问题、运输问题、人员的分配问题和投资项目的合理选择问题等等,都属于这类问题.下面通过管理中的几个实例来说明这类问题,并建立它们的数学模型.

例1　资源的合理利用问题

某厂计划在下一个生产周期内生产甲、乙两种产品,要消耗A_1、A_2和A_3三种资源(例如钢材、煤炭和设备台时),已知每件产品对这三种资源的消耗,这三种资源的现有数量和每件产品可获得的利润如表1.1所示.问如何安排生产计划,使得既能充分利用现有资源,又使总利润最大?

表 1.1

单件消耗 资源 \ 产品	甲	乙	资源限制
A_1	5	2	170
A_2	2	3	100
A_3	1	5	150
单件利润(元)	10	18	

为了建立此问题的数学模型,首先要选定决策变量,即决策人可控制的因素.本例中,可令决策变量x_1、x_2分别表示下一个生产周期产品甲和乙的产量.

其次，要确定对决策变量的限制条件，称为约束条件. 本例中，由于资源 A_1、A_2、A_3 都是有限的，故决策变量 x_1、x_2 必须满足下列条件：

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 170 & (\text{对资源 } A_1 \text{ 的限制})； \\ 2x_1+3x_2\leqslant 100 & (\text{对资源 } A_2 \text{ 的限制})； \\ x_1+5x_2\leqslant 150 & (\text{对资源 } A_3 \text{ 的限制}). \end{cases}$$

另外，根据实际问题的需要和计算方面的考虑，还对决策变量 x_1、x_2 加上非负限制，即

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0.$$

第三，要确定问题的目标，即决策人用来评价问题的不同方案优劣的标准. 这种目标总是决策变量的函数，称为目标函数. 本例中，目标函数是使总利润

$$Z=10x_1+18x_2$$

达到最大.

因此，本例的数学模型可归结为：求 x_1,x_2 使得

$$\max Z=10x_1+18x_2;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 170; \\ 2x_1+3x_2\leqslant 100; \\ x_1+5x_2\leqslant 150; \\ x_1,x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

其中“s. t. ”是“subject to”的缩写，意思为“受约束于…”. 这类问题通常称为资源的合理利用问题.

“资源的合理利用问题”的一般提法是：

某厂计划在下一个生产周期内生产 B_1、B_2、…、B_n 种产品，要消耗 A_1、A_2、…、A_m 种资源，已知每件产品所消耗的资源数、每种资源的数量限制以及每件产品可获得的利润如表 1.2 所示. 问如何安排生产计划，才能充分利用现有资源，使获得的总利润最大？

表 1.2

单件消耗 产品 / 资源	B_1	B_2	…	B_n	资源限制
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
单件利润	c_1	c_2	…	c_n	

设决策变量 x_j 表示下一个周期产品 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的产量，则此问题的数学模型可归结为：求 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2; \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m; \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

例 2　生产组织与计划问题

某车间用三种不同型号的机床 A_1、A_2、A_3 加工 B_1、B_2 两种零件. 机床台数、生产效率（每个工作日完成零件的个数）如表 1.3 所示. 问如何合理安排机床的加工任务，才能使生产的零件总数最多？

表 1.3

机床类型	机床台数	生产效率(件/日)	
		B_1	B_2
A_1	4	30	40
A_2	4	55	30
A_3	2	23	37

设决策变量 x_{ij} 表示生产 B_j 种零件的 A_i 型机床的台数($i=1,2,3;j=1,2$)，则问题可归结为：求 $x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2)$ 使得

$$\max Z=30x_{11}+40x_{12}+55x_{21}+30x_{22}+23x_{31}+37x_{32};$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}\leqslant 4 & (\text{对机床 } A_1 \text{ 的台数限制});\\ x_{21}+x_{22}\leqslant 4 & (\text{对机床 } A_2 \text{ 的台数限制});\\ x_{31}+x_{32}\leqslant 2 & (\text{对机床 } A_3 \text{ 的台数限制});\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,3;j=1,2).\end{cases}$$

这类问题通常称为生产组织与计划问题.

"生产组织与计划问题"的一般形式为

某工厂用机床 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 加工 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 种零件，在一个生产周期内，各机床可能工作的机时、工厂必须完成各种零件的数量、各机床加工每个零件的时间(机时/个)和加工每个零件的成本(元/个)如表 1.4 和表 1.5 所示. 问如何安排各机床的生产任务，才能既完成加工任务，又使总成本最低?

表 1.4

加工时间 \ 零件 / 机床	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	机时限制
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
必需零件数	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表 1.5

加工成本 \ 零件 / 机床	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}

设 x_{ij} 为机床 A_i 在一生产周期加工零件 B_j 的数量($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$)，则这一问题的数学模型为：求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij};$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m,\text{对机床 } A_i \text{ 加工机时的限制});\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n;\text{对零件 } B_j \text{ 的需要量必须保证});\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

生产组织与计划问题有多种形式. 例如还可以考虑下面的问题：

某车间用机床 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 生产由 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 这 n 种不同零件构成的机器. 如果每台机器需要各种零件的数目成比例 $\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n$，机床 A_i 生产零件 B_j 的效率(每日生产零件数)为 c_{ij}，问应如何分配机床负荷，才使生产的机器数最多?

设 x_{ij} 为机床 A_i 生产零件 B_j 的时间(日)($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$)，这一问题的数学模型为：求 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max Z=\sum_{i=1}^{m}c_{i1}x_{i1}\Big/\lambda_1;$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & (i=1,2,\cdots,m;\text{机床 }A_i\text{ 生产各种零件时间总和应为 }1)\\ \sum_{i=1}^{m}c_{i1}x_{i1}:\sum_{i=1}^{m}c_{i2}x_{i2}:\cdots:\sum_{i=1}^{m}c_{in}x_{in}=\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n & (\text{各机床一天生产各种零件总数应成比例});\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

例 3　合理下料问题

设用某种原材料(条材或板材)下零件 A_1、A_2、…、A_m 的毛坯，根据以往的经验，在一件原材料上有 B_1、B_2、…、B_n 种不同的下料方式，每种下料方式可得各种毛坯个数及每种零件需要量，如表 1.6 所示. 问应怎样安排下料方式，使得既能满足需要，又使原材料最省？

表 1.6

零件 个数 方式 / 零件	B_1	B_2	…	B_n	零件需要量
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

设用 B_j 种方式下料的原材料数为 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，则这一问题的数学模型为：求 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n}x_j;$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m;\text{零件 }A_i\text{ 的总数不能少于 }b_i);\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n),\text{且为整数}.\end{cases}$$

这类问题通常称为合理下料问题.

还有所谓"配料问题"也可以归结成类似的形式. 它的一般提法是：

某饲养场用 n 种饲料 B_1、B_2、…、B_n，配制成含有 m 种营养成分 A_1、A_2、…、A_m 的混合饲养，各种饲料所含营养成分的数量、混合饲料对各种成分的最低需要量以及各种饲料的单价如表 1.7 所示. 问应如何配料，才能既满足需求，又使混合饲料总成本最低？

表 1.7

含量 饲料 / 成分	B_1	B_2	…	B_n	最低需要量
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
原料单价	c_1	c_2	…	c_n	

设 x_j 表示第 j 种饲料所用的数量，则此问题的数学模型为：求 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j;$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m\text{ 各种成分的最低需要量必须满足});\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

下面举一个关于食物配料问题的数字例子.

某人每天食用两种食物甲、乙(例如猪肉、鸡蛋)，这两种食物含 A_1、A_2、A_3 三种营养成分(例如维生素、脂肪和蛋白质)，已知这两种食物所含三种营养成分的含量(毫克/两)、人体每天

对这三种营养成分的需要量及这两种食物的单价(元/两)如表 1.8 所示. 问这两种食物各食用多少(两),才能既满足需要量又使总费用最省?

表 1.8

含量 \ 食物 / 成分	甲	乙	最低需要量
A_1	0.10	0.15	1.00
A_2	1.70	0.75	7.50
A_3	1.10	1.30	10.00
单价	2	1.5	

设 x_j 表示 B_j 种食物的用量(两),($j=1,2$),则问题为:求 $x_j(j=1,2)$,使得

$$\min Z=2x_1+1.5x_2;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0.10x_1+0.15x_2\geqslant 1.00;\\1.70x_1+0.75x_2\geqslant 7.50;\\1.10x_1+1.30x_2\geqslant 10.00;\\x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

例 4 运输问题

设某种物资(例如煤炭)共有 m 个产地 A_1、A_2、…、A_m,其产量分别为 a_1、a_2、…、a_m,另有 n 个销地 B_1、B_2、…、B_n,其销量分别为 b_1、b_2、…、b_n. 已知由产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 运往销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的单位运价为 c_{ij},其数据如表 1.9 所示. 问应如何调运,才能使总运费最省?

表 1.9

单位运价 \ 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
原料单价	b_1	b_2	…	b_n	

当产销平衡(即 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$)时,设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 $B_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 的运量,则问题的数学模型为:求 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij};$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m;\text{从产地 } A_i \text{ 运出的物资等于其产量})\\\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n;\text{销地 } B_j \text{ 收到的物资等于其需要量});\\x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

当产大于销(即 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i>\sum\limits_{j=1}^{n}b_i$)时,这一问题的数学模型为:求 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij};$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m);\\\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_i;\\x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

这类问题通常称为**运输问题**.