

测 试 技 术

刘 惠 彬 主 编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书比较全面地介绍了测试技术的基本内容。其中对测试技术的基础——测试系统的组成、静态特性及主要静态性能指标、测试信号分析和测量误差分析作了重点阐述；对位移、速度、加速度、振动、转速、应力、应变、力、转矩、压力、温度、流量等常用参数和数据采集系统的测量原理、测试系统的组成、静态特性、误差分析及其补偿方法都作了比较详细的阐述；对测试数据的显示和记录装置、测试系统的静态测试数据处理和静态性能指标的计算作了专门的阐述。为便于读者掌握测试技术的基础知识，在有关章节中配有实例。

本书还对参数的数字化测量技术、特别是以微型机为中心的计算机测试系统的硬软件作了较详细的阐述。

本书可作除测试专业外各专业（如自动控制类各专业）所设测试技术方面课程的教材。可供测试专业研究生、大学生及从事测试技术工作的科研工程技术人员作为重要的参考书。测试专业大专生也可选用本教材有关章节作教材。

测 试 技 术

CESHI JISHU

刘惠彬 主编

责任编辑 曾昭奇

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京航空航天大学印刷厂印装

787×1092 1/16 印张，27 字数，691 千字

1989年6月第一版、1989年6月第一次印刷 印数：4500册

ISBN 7-81012-108-5/TB-021 定价：5.30元

目 录

第一章 概述

- §1.1 测试技术的功能····· (1)
- §1.2 测试技术研究的主要内容····· (1)

第二章 测试信号分析

- §2.1 概述····· (5)
- §2.2 周期信号····· (6)
- §2.3 非周期信号····· (17)
- §2.4 周期信号的付里叶变换····· (30)
- §2.5 褶积····· (32)

第三章 测量系统的基本特性及其主要性能指标

- §3.1 测量系统的组成····· (37)
- §3.2 测量系统的静态特性及其主要静态性能指标····· (40)
- §3.3 测量系统的动态特性及其主要动态性能指标····· (47)

第四章 测试误差分析基础

- §4.1 测量误差····· (68)
- §4.2 测量误差分类····· (68)
- §4.3 测量误差的表示方法····· (69)
- §4.4 精密性、准确度、精确度····· (70)
- §4.5 直接测量和间接测量····· (71)
- §4.6 原理误差和构造误差····· (72)
- §4.7 随机误差····· (74)
- §4.8 系统误差····· (86)
- §4.9 过失误差····· (89)
- §4.10 不等精度测量····· (91)
- §4.11 误差的合成····· (93)
- §4.12 误差分配和标准测试仪器的选择····· (99)

第五章 相对位移测量

- §5.1 概述····· (102)
- §5.2 电位器式位移传感器····· (103)
- §5.3 电感式位移测量系统····· (109)

§5.4	互感式位移测量系统	(113)
§5.5	旋转变压器类角位移测量系统	(120)
§5.6	电涡流式位移测量系统	(125)
§5.7	霍尔式位移传感器	(130)
§5.8	电容式位移测量系统	(135)
§5.9	纤维光学位移传感器	(141)
§5.10	激光位移测量系统	(143)
§5.11	计量光栅系统	(146)
§5.12	编码器系统	(151)
§5.13	感应同步器系统	(153)

第六章 运动速度、转速、加速度和振动测量

§6.1	运动速度测量	(160)
§6.2	转速测量	(163)
§6.3	加速度测量	(171)
§6.4	振动测量	(188)

第七章 应力和应变、力和转矩测量

§7.1	应力和应变测量	(192)
§7.2	半导体应变片和压阻式传感器	(203)
§7.3	力的测量	(205)
§7.4	转轴转矩测量	(216)

第八章 压力测量

§8.1	概述	(219)
§8.2	液柱压力计和活塞压力计	(221)
§8.3	开环压力测量系统	(224)
§8.4	伺服式压力测量系统	(230)
§8.5	数字式压力测量系统	(243)
§8.6	真空测量	(254)
§8.7	压力测量系统的动态标定	(257)

第九章 温度测量

§9.1	概述	(260)
§9.2	膨胀式温度计	(263)
§9.3	热电偶测温系统	(266)
§9.4	热电阻测温系统	(280)
§9.5	热敏电阻器	(285)
§9.6	P-N 结与集成电路温度传感器	(290)

§9.7	数字式温度计与多点温度测量系统	(293)
§9.8	辐射测温系统	(297)
第十章 流量测量		
§10.1	概述	(304)
§10.2	流体力学的基本知识	(305)
§10.3	转子流量计	(308)
§10.4	节流式流量计	(312)
§10.5	靶式流量计	(315)
§10.6	涡轮流量计	(317)
§10.7	电磁流量计	(319)
§10.8	其它流量计	(321)
§10.9	质量流量测量	(324)
§10.10	流量标准与标定	(326)
第十一章 数据采集系统		
§11.1	概述	(328)
§11.2	多路微机数据采集系统转换接口	(328)
§11.3	数模和模数转换器	(329)
§11.4	采样定理	(343)
§11.5	干扰及抗干扰	(346)
第十二章 显示和记录装置		
§12.1	磁电系测量机构	(349)
§12.2	半导体发光二极管(LED)	(353)
§12.3	阴极射线管(CRT)	(355)
§12.4	笔式记录仪	(362)
§12.5	光线示波器	(366)
§12.6	自动平衡记录仪	(371)
§12.7	波形显示——照像记录方式	(372)
§12.8	瞬态记录仪及波形存储示波器	(373)
§12.9	磁带记录器	(375)
第十三章 静态测试数据处理		
§13.1	概述	(383)
§13.2	一元线性回归——直线拟合	(384)
§13.3	线性仪表、传感器或测量系统静态性能指标计算	(389)
§13.4	非线性仪表、传感器或测量系统静态性能指标计算	(403)

第十四章 动态测试数据处理

§14.1 概述.....	(407)
§14.2 由测量系统的时域响应计算频率特性.....	(408)
§14.3 由实验过渡过程曲线求传递函数的回归分析法.....	(411)
§14.4 由实验频率特性求传递函数的回归分析法.....	(419)
参考文献.....	(424)

第一章 概 述

§1.1 测试技术的功能

测试是测量与试验(实验)的简称。

客观世界是一个物质世界。物质以不同的形式不断地运动着。运动着的物质是以一定的能量或状态表现出来的,这就是“信号”。人们为了认识物质世界,就必须寻找表征物质运动的各种信号以及信号与物质运动的关系。这就是测试的任务。

自古以来,测试技术早就渗透到人类的生产活动、科学实验和日常生活的各个方面,如计时、产品交换、气候和季节的变化规律等等。

在生产斗争这个领域内,广泛地应用测试技术,如生产过程中产品质量的检测、产品质量的控制、提高生产的经济效益、节能和生产过程的自动化等等。这些都要测量生产过程中的有关参数和(或)进行反馈控制,以保证生产过程中的这些参数处在最佳最优状态。

在科学研究领域内,人们通过观察、试验,并用已有的知识和经验,对试验结果进行分析、对比、概括、推理。通过不断的观察、试验,从中找出新的规律,再上升为理论。因而能否通过观察试验得到结果,而且是可靠的结果,这就决定于测试技术的水平,所以从这个意义上说,科学的发展、突破是以测试技术的水平为基础的。例如人类在光学显微镜出现以前,只能用肉眼来分辨物质。而16世纪出现了光学显微镜,这就使人们能借助显微镜观察细胞,从而大大地推动了生物科学的发展。而到20世纪30年代出现了电子显微镜,又使人们的观察能力进入微观世界,这又推动了生物科学、电子科学和材料科学的发展。当然,科学技术的发展又反过来促进测试技术的发展。

又如现代航空航天技术的发展水平,在很大程度上与测试技术的水平密切相关,如果没有精确的、可靠的测试技术,航空器要能正确地进入预定轨道,完成各种任务是不可能的。

现代人们的日常生活,亦愈来愈离不开测试技术。例如现代化起居室中的温度、湿度、亮度、空气新鲜度、防火、防盗和防尘等等的测试、控制,以及由视觉、听觉、嗅觉、触觉和味觉等等感觉器官,并有思维的机器人来参与各种家庭事务管理与劳动等等,都需要各种测试技术。

综上所述,测试技术归纳起来,有如下三种功能:

1. 过程中参数测量功能;
2. 过程中参数监(测)控(制)功能;
3. 科学试验中测量分析功能。

§1.2 测试技术研究的主要内容

测试技术研究的主要内容是被测量的测量原理、测量方法、测量系统和数据处理四个方面。

一、测量原理

测量原理是指用什么样的原理去测量被测量。不同性质的被测量用不同的原理去测量，同一性质的被测量亦可用不同的原理去测量。例如压力与温度两个被测量性质不同，它的测量原理就不同。又如飞行高度这一被测量可以用测量大气静压、无线电波的反射特性、垂直加速度积分和激光测距等原理去测量。因此测试技术首先要研究被测量的测量原理。

由于被测量的性质五花八门，因此测量原理非常广，其知识面涉及物理学、电子学、热学、流体力学、光学、声学 and 生物学等的基础知识。要选择好测量原理必须充分了解被测量的物理化学特性、测量范围、性能要求和外界环境条件等。所以，要求测试技术人员知识面广，且有较扎实的基础知识和专业知识。

二、测量方法

测量原理决定后，就要考虑用什么方法去测量被测量。常用的测量方法有直接测量法和间接测量法。

直接测量法是借助于测量系统，将被测量与同性质的标准量进行比较，以确定被测量。但是被测量直接与标准量比较的场合不太多，大多数情况下都要将被测量和标准量转换为某一便于比较的中间量来测量。例如用水银温度计测量体温或用水银血压计测量血压，体温或血压（被测量）被转换为玻璃管内水银柱的位移量，而温度或压力的标准量则被传递到玻璃管上的标尺分度，这样被测量与标准量都被转换成同性质的位移量（中间量），这样就可以比较了。直接测量法是工程技术中用得最广泛的一种测量方法。

有的被测量无法或不使用直接测量法测量，这就要用间接测量方法。间接测量法是对与被测量有确定函数关系的其它物理量（常称原始参数）进行直接测量，然后根据函数式计算出被测量。例如飞机的飞行高度，无法直接测量，只得通过与飞行高度有确定函数关系的大气静压来间接测量。因此间接测量比直接测量复杂，测量误差要大。

三、测量系统

确定了被测量的测量原理和测量方法后，就要设计或选用装置组成测量系统。

目前的测量系统，从信息传输的形式看，主要有模拟式和数字式两种。

模拟式测量系统是由传感器、信号调理器、显示记录装置和（或）输出装置组成，如图1-1所示。



图1-1 模拟式测量系统组成原理

传感器是测量系统的信息敏感和检测部件。它感受被测量并将其转换成与被测量成一定函数关系的另一种物理量，这种物理量通常为电量。

信号调理器是将传感器的输出信号转换成便于传输、显示、记录和输出的电路或装置。显示记录和（或）输出装置是用来显示、记录被测量的大小和（或）输出与被测量有关的控制信号，以供对象所用。

模拟式测量系统中，信息传输大都为电量。

数字式测量系统，目前主要是带微机的测量系统。它是由传感器、信号调理器、输入接口、中央处理器组件、输出接口和显示记录等外围设备组成，如图 1-2 所示。

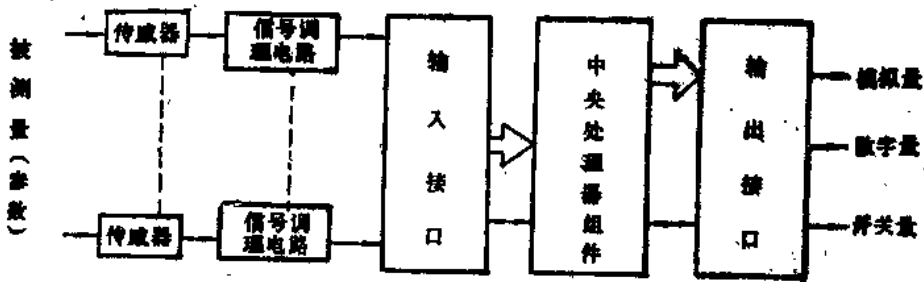


图1-2 带微机的数字式测量系统组成原理

输入接口是将传感器经信号调理后的输出信号转换成数字量信息，经总线传输给中央处理器组件。

中央处理器组件是数据处理、对输入接口、输出接口等进行管理的主要组件。它包括中央处理器、存储器 and 总线驱动器等。

输出接口，主要将数字信息转换成外设所需的信息，如交直流电压、电流、开关量和一定格式的数字量等等，以供显示、记录和控制在用。

数字式测量系统中信息传输均为数字信息，故抗干扰能力强。数字式测量系统具有测量速度快、精度高、实现的功能多等优点，是目前测量系统的发展方向。

从测量系统本身的测量方法来看，测量系统主要有两种测量方法：偏差测量法和零位测量法。

偏差测量法的原理如图1-3所示。

图中被测量为流体的压力，压力作用在活塞上产生集中力，集中力使活塞杆位移，压缩弹簧，弹簧产生反作用力以平衡被测压力所产生的集中力。当两力平衡时，活塞杆停止位移，指针相对刻度盘零刻度的读数就是被测压力的大小。被测压力愈大，弹簧的压缩量愈大，反作用力愈大，故指针的偏转角愈大。

零位测量法的原理如图 1-4 所示。

图中被测量为流体的压力，在砝码盘上加上合适的标准砝码，使其重力与被测压力产生的集中力相平衡。平衡时，砝码盘处在上下止挡的中间位置，根据标准砝码的重力、活塞杆

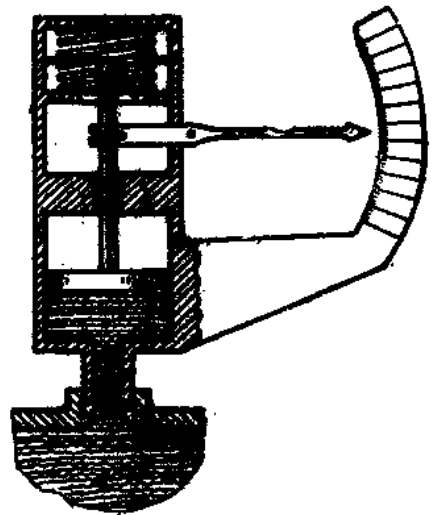


图1-3 偏差测量法

的面积，就可折算出被测压力的大小。砝码盘偏离上下止挡的中间位置，相当于一个偏零检测器，只用来指示被测压力产生的集中力是否已被标准砝码的重力所平衡。

零位测量法有如下优点：

(1) 测量精度高。标准砝码的重力可以测定得很精确，目前已可达 10^{-6} 之内，而反作用弹簧必须由标准砝码加以标定。所以不是原始基准。

(2) 因为偏零检测器只用来指示集中力是否已被平衡，故偏零检测器经常工作在零位附近，灵敏度可以做得很高，而且不用校正，有利于提高测量精度。而在偏差测量法中，反作用弹簧的性能必须稳定，而且如果被测压力的测量范围很大时，灵敏度就不可能做得很高。

但零位测量法在平衡过程中需要一定的时间，因此不适合快速变化的，特别是脉动的压力测量，即使采用自动平衡装置，亦难以测量快速变化的被测量。

零位测量法在工程测试技术中应用更广。

设计或选择测量系统时，必须知道其静态和动态性能，以满足测量被测量的要求。

四、数据处理

有了已标定过的测量系统，就可以实施实际的测试工作。在实际测试中得到的数据必须加以处理，以得到正确可信的测试结果。

本教材的主要任务就是介绍上面四个方面的内容。由于被测量的面很广，不可能、亦没有必要全面介绍。本教材除了对测试技术中的基础知识进行较详细的介绍外，在被测量中着重对运动量、力、应力、压力、温度、流量等的测量原理和测量系统进行较为详细的介绍，使读者通过学习后能有较扎实的测试技术的基础知识，为实施实际的测试工作打下基础。

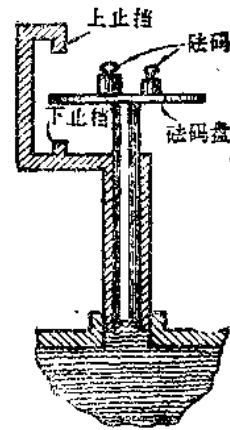


图1-4 零位测量法

第二章 测试信号分析

§2.1 概 述

测试技术的主要任务是利用测量系统精确地测量出测试信号。因而测量系统的特性与测试信号的特性有密切的关系。特别在动态测试中更需要了解测试信号的特性。所以对测试信号进行分析具有重要的意义。

测试信号通常表示为一个时间的函数。因此按照测试信号随时间变化的规律性来分类，可分成确定信号和随机信号。

当测试信号是一个确定的时间函数时，给定某一个时间值，就可以确定测试信号一相应的函数值，这就是确定信号。

当测试信号不是一个确定的时间函数时，给定某一个时间值，测试信号的函数并不确定。而只知道此测试信号取某一数值的概率。这就是随机信号。

严格的讲，一般测试信号都是随机的，特别是测试信号一般多夹杂着噪声、干扰等（噪声干扰带有更大的随机性）。但是工程上为了使处理分析问题简化，常把一些实际测试信号近似地作为确定信号来处理。所以分析确定信号仍然具有重要的意义。

确定信号分为连续信号和离散信号。如果在某一时间间隔内，对于所有连续的时间值，信号除了若干不连续点外，都给出确定的函数值。这就是连续信号。如图 2-1 (a)、(b) 都是连续时间信号。

和连续信号相对应的是离散信号，信号只是在某些不连续的时间值上给定函数值，如图 2-2 所示。信号 $f(t_k)$ 只在 $t_k = -1, 0, 1, 2, 3 \dots$ 等等离散的时刻给出函数值。离散时间信号可以在均匀的时间间隔上给出函数值，也可以在不均匀的时间间隔上给出函数值。但一般都采用均匀的时间间隔。

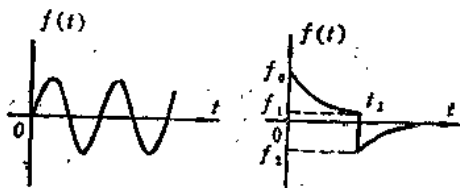


图2-1 连续信号

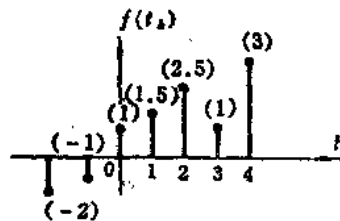


图2-2 离散信号

确定信号又可以分为周期信号和非周期信号。

一个信号 $f(t)$ 如果对所有时间 t 有下列关系

$$f(t) = f(t + nT) \quad (2-1)$$

式中 n —— 任意整数；

T —— 周期信号的周期。

则这一信号就是周期信号。也就是说在一定时间内重复着某一变化规律。若在一定的时间内

不重复着某一变化规律的信号，则就是非周期信号。

本书只对确定信号进行分析。而且分析的重点是连续时间信号。随机信号的分析要用概率论和数理统计的理论和办法。对随机信号的分析可参考有关书籍。

下面我们讨论连续时间信号。在讨论时，“信号”与“函数”这两个词常互相通用。

§2.2 周期信号

一、付里叶级数 (Fourier Series)

周期信号 (函数) 如果满足狄里赫利 (Dirichlet) 条件, 那么都可分解为一个收敛的三角级数, 这是付里叶提出的。

狄里赫利条件为:

(1) 在一个周期内, 函数 $f(t)$ 是绝对可积的。即 $\int_{t_1}^{t_1+T} |f(t)| dt$ 应为有限值。

(2) 在一个周期内, 函数 $f(t)$ 的极值数目为有限。

(3) 在一个周期内, 函数 $f(t)$ 或者为连续的、或者具有有限个间断点 (即当 t 从较大的时间值和较小的时间值分别趋向间断点时, 函数具有两个不同的有限的极限值)。

测试技术中常见的周期信号, 一般均能满足上述条件。

设函数 $f(t)$ 的周期为 T , 则在 (t_1, t_1+T) 区间内函数 $f(t)$ 可展开成

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t + \cdots + a_n \cos n\Omega t + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin \Omega t + b_2 \sin 2\Omega t + \cdots + b_n \sin n\Omega t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \end{aligned} \quad (2-2)$$

式 (2-2) 就是函数 $f(t)$ 的三角形式的付里叶级数表示式。式中 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 为角频率;

系数 a_0 、 a_n 、 b_n 为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos n\Omega t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin n\Omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

当 $n=0$ 时, $a_n = a_0$ 。即直流分量。

将式 (2-2) 的 $a_n \cos n\Omega t$ 和 $b_n \sin n\Omega t$ 合成一余弦分量, 即令

$$a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t = A_n \cos(n\Omega t - \varphi_n)$$

则式 (2-2) 成为

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \varphi_n) \quad (2-4)$$

系数 a_n 、 b_n 和振幅 A_n 、相角 φ_n 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= \text{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} \\ A_0 &= a_0 \\ a_n &= A_n \cos \varphi_n \\ b_n &= A_n \sin \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

或

由式 (2-2) 或式 (2-4) 可见, 一个周期信号可由一直流分量和一系列谐波分量之和来表示。当 $n=1$ 时, $A_1 \cos(\Omega t - \varphi_1)$ 称为一次谐波分量, 其角频率 Ω 就是周期信号的角频率, 所以就是基波分量; 当 n 大于 1 时, $A_2 \cos(2\Omega t - \varphi_2)$ 、 $A_3 \cos(3\Omega t - \varphi_3) \dots A_n \cos(n\Omega t - \varphi_n)$ 都是二次谐波分量、三次谐波分量…… n 次谐波分量。

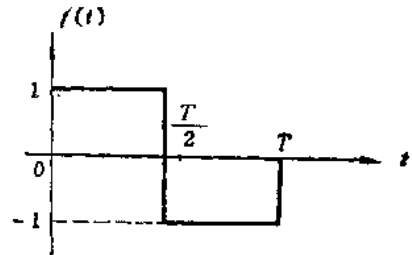


图2-3 方波

例2-1 将图2-3所示一个周期的周期性方波展开成三角形式的付里叶级数。方波在一个周期内表示为

$$\begin{cases} f(t) = 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ f(t) = -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

解: 由式 (2-3) 可得系数为

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_{\frac{T}{2}}^T dt \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\Omega t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \cos n\Omega t dt \right] =$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\Omega t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \sin n\Omega t dt \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

因此, 周期性方波的三角形式的付里叶级数为

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right)$$

图 2-4 分别为用基波、基波和三次谐波、基波和三次、五次谐波来表示该方波的情况。由图可见, 用近似函数表示原方波时均存在误差(图中阴影部分)。如果级数项数取得多, 则近似程度愈趋改善。但是对于不连续的信号, 即使所取级数的项数无限增多, 在不连续处级数之和仍不收敛于方波 $f(t)$, 在跃变点附近, 总不可避免存在起伏振荡, 这种现象称为吉伯斯 (Gibbs) 现象。

二、奇偶函数与谐波含量的关系

当函数满足 $f(t) = f(-t)$ 时，即函数图形与纵轴对称，则称之为时间的偶函数，如图 2-5 (a)、(b) 所示。当函数满足 $f(t) = -f(-t)$ 时，即函数图形与坐标原点对称，则称之为时间的奇函数，如图 2-5 (c)、(d) 所示。

由对称关系可知，两个偶函数相乘或两个奇函数相乘所得的函数都是偶函数；而一个偶函数和一个奇函数相乘所得的函数是奇函数。由于这种关系，很容易得出：

当 $f(t)$ 为偶函数时

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \sin n\Omega t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt \right] = 0 \end{aligned}$$

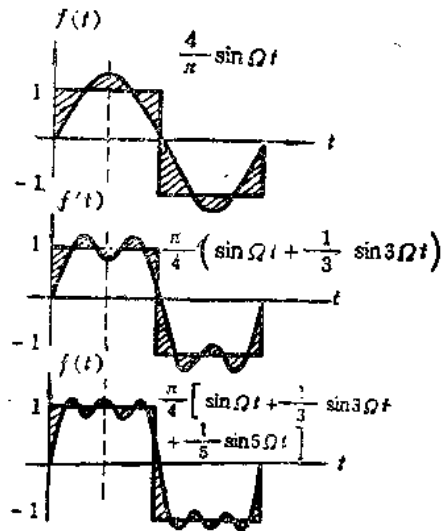


图2-4 谐波合成示意图

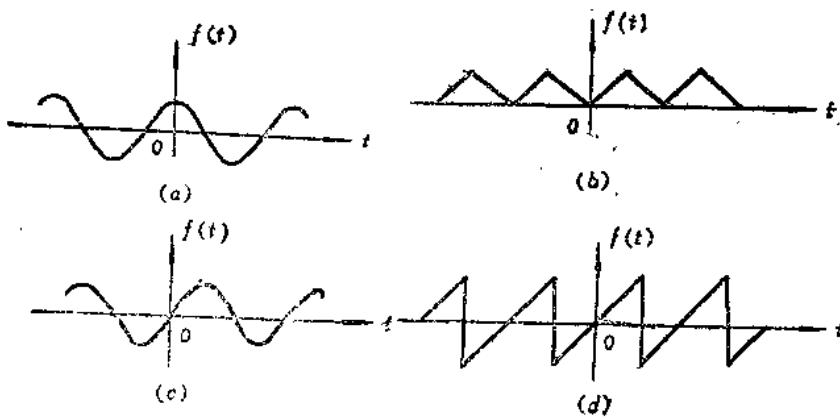


图2-5 周期性的奇偶函数

所以 $f(t)$ 为偶数时，分解的谐波分量只包含余弦项谐波分量 $a_n \cos n\Omega t$ ，并且当函数

的平均值不为零时还存在直流分量 $\frac{a_0}{2}$ ，但无正弦项谐波分量。即

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t \quad (2-6)$$

当 $f(t)$ 为奇函数时

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = 0$$

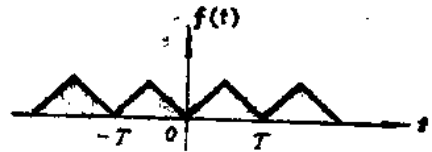
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt$$

所以当 $f(t)$ 为奇函数时，分解的谐波分量只包含正弦项谐波分量 $b_n \sin n\Omega t$ ，而无直流分量和余弦谐波分量，即

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t \quad (2-7)$$

由此可见系数 a_n 和 b_n 都是 n (或 $n\Omega$) 的函数，其中 a_n 是 n 的偶函数，而 b_n 是 n 的奇函数，即 $a_{-n} = a_n$ ， $b_{-n} = -b_n$ 。而由式 (2-5) 可见， A_n 是 n 的偶函数， φ_n 是 n 的奇函数，即有 $A_{-n} = A_n$ ， $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ 。利用这些奇偶关系可以很方便的求出周期信号的谐波分量。

例2-2：图2-6所示为一个周期性三角波，其在
一个周期 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 上的函数为 $f(t) = |t|$ 。



将其展开为三角形式的付里叶级数。

图2-6 三角波

解：由图 2-6 可见， $f(t)$ 是一个偶函数，所以只有直流分量和余弦项谐波分量。故

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t dt = \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos n\Omega t dt$$

$$= \frac{4}{T} \left(\frac{1}{n\Omega} \right)^2 \int_0^{\frac{T}{2}} (n\Omega t) \cos n\Omega t d(n\Omega t)$$

运用分部积分法 $\int_0^{\frac{T}{2}} u dv = uv \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} v du$

$$a_n = \frac{4}{T} \left(\frac{1}{n\Omega} \right)^2 \int_0^{\frac{T}{2}} (n\Omega t) d \sin n\Omega t$$

$$= \frac{4}{T} \left(\frac{1}{n\Omega} \right)^2 \left[(n\Omega t) \sin n\Omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\Omega t d(n\Omega t) \right]$$

$$= \frac{4}{T} \left(\frac{1}{n\Omega} \right)^2 [n\Omega t \sin n\Omega t + \cos n\Omega t] \frac{t}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为非零偶数时} \\ -\frac{2T}{n^2\pi^2} & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

所以图 2-6 所示的周期性三角波的三角付里叶级数为

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \left(\cos n\Omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\Omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\Omega t + \dots \right)$$

实际上, 任意函数都可分解为奇函数和偶函数两部分, 即

$$f(t) = f_{od}(t) + f_{eo}(t) \quad (2-8)$$

式中 $f_{od}(t)$ 表示奇函数部分, $f_{eo}(t)$ 表示偶函数部分, 由于

$$f(-t) = f_{od}(-t) + f_{eo}(-t) = -f_{od}(t) + f_{eo}(t)$$

故有

$$\left. \begin{aligned} f_{od}(t) &= \frac{f(t) - f(-t)}{2} \\ f_{eo}(t) &= \frac{f(t) + f(-t)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

图 2-7 画出了函数 $f(t)$ 分为偶函数部分和奇函数部分的情况。

需要注意, 某函数是否为奇(或偶)函数不仅与周期函数 $f(t)$ 本身波形有关, 而且与时间坐标原点的选择有关。如图 2-7 的 $f(t)$ 所示, 若坐标原点右移 $\frac{T}{4}$, 显然它就变成偶函数。但如果坐标原点移动某一

时间 t_0 , 而 t_0 又不等于 $\frac{T}{4}$ 的整数倍, 那么该函数既非奇函数, 又非偶函数。

例 2-3, 将图 2-8 (a) 所示的矩形波 $f(t)$ 展开为三角付里叶级数。

图 2-8 所示的矩形波 $f(t)$ 既非奇函数又非偶函数。为了将它分解为奇函数、偶函数两部分, 首先作出 $f(-t)$ 的波形, 如图 2-8 (b) 所示。根据式 (2-9)

可以求得其偶部 $f_{eo}(t)$ 和奇部 $f_{od}(t)$ 。其图形如图 2-8 (c)、(d) 所示。由图 2-8 (c) 可见, $f(t)$ 的偶部 $f_{eo}(t)$ 是幅值为 $\frac{1}{2}$ 的直流分量, 由图 2-8 (d) 可见, $f(t)$ 的奇部 $f_{od}(t)$ 是个奇函数, 故又含正弦谐波分量。故

$$f_{eo}(t) = \frac{1}{2}$$

$$f_{od}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$

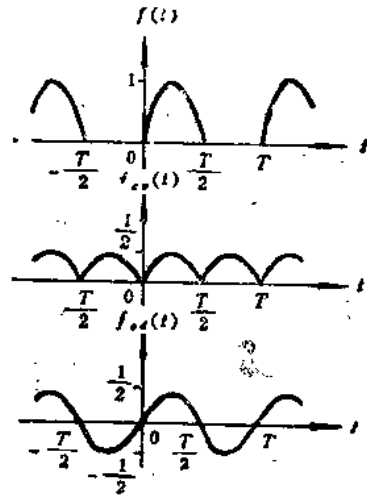


图 2-7 任意函数分解成奇偶函数两部分

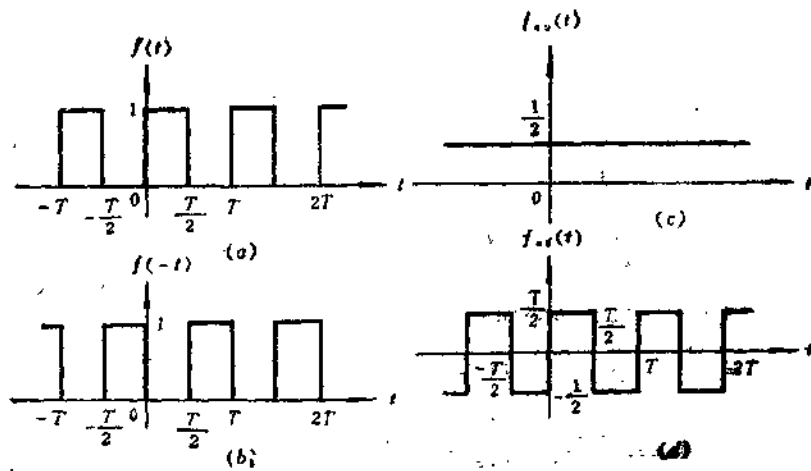


图2-8 矩形波

$$\begin{aligned}
 b_n &= -\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_{od}(t) \sin n\Omega t dt \\
 &= -\frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \sin n\Omega t dt \\
 &= \frac{2}{T} \frac{1}{n\Omega} (-\cos n\Omega t) \Big|_0^{T/2} \\
 &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{当 } n \text{ 为非零偶数时} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}
 \end{aligned}$$

综合上两部分结果，可得图2-8 (a) 所示信号的三角付里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right)$$

三、指数形式的付里叶级数

用式 (2-2) 或 (2-4) 三角形式的付里叶级数表示周期信号含义比较清楚，但运算常感不便。而指数运算方便，故常用指数形式的付里叶级数。

由欧拉公式 (Euler)

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

故式 (2-4) 可写成

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \varphi_n)$$