大学物理实验

茅林川　钟　鼎　刘德平　　等编

天津大学出版社

内容简介

本书是按照国家教委1992年10月颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》(修订稿)编写的物理实验教材。全书共分六部分,包括42个实验,涉及到力学、热学、电磁学、光学和近代物理各领域的基本内容。本书在实验选题、原理叙述、操作方法、仪器使用、数据处理等方面适合工科院校的教学要求,力求深浅适当,重点突出,强调实验技能的培养,注意使用新的计量标准和法定计量单位。

本书可作为高等工业学校物理实验教材或教学参考书。

大学物理实验

茅林川 钟 鼎 刘德干 等编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

邮编.300072

天津市宝坻县第二印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本:787×1092 毫米1/16 印张:12 3/4 字数:286千

1997年2月第一版 1997年2月第 次印刷

印数:1—6000

ISBN 7-5618 0951-4

O·92 定价:14.00元

目　录

绪 言

物理学是工程技术学科的理论基础，从本质上说，物理学是一门实验科学。物理规律的研究都是严格建立在实验事实的基础上并不断受到实验的检验，在物理学理论的每一步发展中，物理实验都起着决定性的作用。

在理工科大学独立开设物理实验课，有利于对学生进行系统的科学实验的基本训练。物理实验课是学生进入大学后受到系统实验方法和实验技能训练的开端。它和物理理论课既有密切的联系又有各自的侧重与分工。因此物理实验课和物理理论课都是理工科大学生必修的基础课。

本课程应在中学物理实验的基础上，循序断进地学习物理实验的基本知识、方法和技能，使学生初步了解科学实验的主要过程和方法，为今后的学习和工作奠定良好的实验基础。

一、物理实验课的任务

根据国家教委颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》的规定，本课程的具体任务如下。

(1) 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

(2) 培养与提高学生的科学实验能力。其中包括：

能够自行阅读实验教材或资料，做好实验前的准备；

能够借助教材或仪器说明书，正确使用常用仪器；

能够运用物理学理论，对实验现象进行初步分析判断；

能够正确记录和处理实验数据、绘制曲线、说明实验结果、撰写合格的实验报告；

能够完成简单的设计性实验。

(3)培养与提高学生的科学实验素养。要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风、严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神和遵守纪律、团结协作、爱护公共财产的优良品德。

二、怎样做好物理实验

物理实验是一门实践性课程，它的教学方式以实践训练为主。学生应在教师指导下，充分发挥主观能动性，加强自己的独立实践能力的训练。因此，要做好物理实验，必须抓好如下三个环节。

1. 课前预习

每次实验前，都要明确本次实验的目的，理解实验原理，熟悉实验内容和步骤。根据自己的理解，写好实验的预习报告。预习报告的内容包括：实验名称、目的、原理、仪器装置、内容和步骤、数据表格。上述内容可预先写在实验报告纸上。预习的好坏是能否做好实验的关键。实验前，每人还要准备一个数据记录本并画好数据记录表格，用来记录测量数据。

2. 课堂操作

课堂操作是实验的中心环节。学生应充分利用实验课的时间，进行操作练习，完成原始数

据的测量。在实验操作过程中，如何用理论指导自己的实践，如何正确地调整和使用仪器，实验现象是否正常，测量数据是否合理，实验条件是否得到满足等等，这些都是学生做实验时，每时每刻要考虑的问题。要特别重视实验操作的基本功训练，如仪器的零位调整，水平、铅直调整，读数视差的消除，电路的回路连接法，光路的共轴调整等，这些基本实验操作技术要切实掌握。实验结束后，应将测量数据交给教师检查，经教师同意后，整理好仪器方可离开实验室。

3. 实验总结

撰写实验报告是对实验工作的全面总结。实验报告要求书写工整，格式规范，文字叙述简明、通顺，数据齐全、清晰，图表规矩、正确。实验报告的前一部分是预习报告的内容，后一部分的内容包括：实验数据的处理、实验结果的表示、误差的分析和计算、思考题的回答和需要讨论的问题（如实验中发现的异常现象及解释，对实验装置和方法的改进意见）。后一部分内容在课后完成。

实验报告要每人独立撰写，同组人也不允许互相抄袭。因为，即使用同样的测量数据，每人处理的结果也不一定完全相同。实验报告应在实验后一周内交给任课教师。任课教师应认真批改报告，根据课堂操作和书面报告的情况，综合评定实验成绩。在下次课上应对实验报告中存在的普遍问题进行讲评。学生应及时改正实验报告中的错误。

第一章　测量误差和实验数据处理

第一节　测量误差

一、测量与误差

物理实验是以测量为基础来定量研究物理现象和规律。测量时，将被测量和标准量直接比较而得到测量值，这种方法称为直接测量。如用米尺测量物体的长度，用天平和砝码测量物体的质量，用秒表测量时间等。但多数情况是被测量需通过几个直接测量值和一定的函数关系间接求得，这种方法称为间接测量。如测量物质的密度，由公式 $\rho = m/V$ 知，先要测出物体的质量 m 和体积 V，再按上式计算出密度的数值。

由于测量中使用的仪器精确程度有限、实验理论和方法不尽完善、测量环境不能绝对稳定、实验者经验和分辨能力的不足，都可能得不到被测量的客观实际值——真值。即测量值和真值之间有一定的差值，这一差值称为误差。

设被测量的真值为 x_0，测量值为 x，则误差

$$\delta x = x - x_0 \tag{1-1}$$

测量的目的是使被测量的数值尽可能接近它的真实值，也就是尽量减小误差。但是误差不可能完全消除。

二、误差的分类

在实际测量中，由于产生误差的原因不同，误差的性质也不同，对不同性质的误差处理方法亦不同。通常将它们分为系统误差和随机误差两大类。

1. 系统误差

系统误差一般具有确定性。即对同一被测量进行多次重复测量时，误差的大小和符号（正或负）保持不变或有规律地变化。其来源主要有以下几方面：①实验理论和实验方法不完善带来的误差，例如，理论公式的近似性或实验条件达不到理论的要求；②实验仪器不准确或使用不当造成的误差，例如，仪器本身存在某些缺陷，或没有在规定条件下使用仪器；③环境条件有规律地变化所引起的误差，例如，温度、气流、电压的变化对测量结果带来一定影响；④实验者的某些不足也会产生系统误差，例如，由于生理或心理的特点，有人估计读数时总是偏大或偏小。

系统误差产生的原因和规律不见得都能被实验者掌握。凡能被确定大小和符号的系统误差，称为可定系统误差，它可以被消除或修正。对于大小和符号不能被确定的系统误差，称为未定系统误差，对它一般难以作出修正，只能估计出极限范围。这里主要讨论可定系统误差。由于系统误差的确定性，因此，在相同的实验条件下，多次重复测量不可能发现系统误差。而在许多情况下，系统误差是影响测量结果精确程度的主要因素。所以，发现、修正和消除系统误差是误差分析的一个重要内容。

系统误差的修正和消除，一般没有固定不变的方法。对于一个实验来说，要考虑从实验理论、实验方法、实验仪器到环境条件中的每一个因素的影响，然后，针对具体情况，找出不同的解决方法。我们可以从产生系统误差的几个主要原因，举例讨论如何修正和消除系统误差。

(1)**理论上的修正** 如果系统误差来源于测量公式的近似性，首先应进行理论上的修正或使实验条件符合理论公式的要求。例如，单摆测重力加速度的理论公式

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

仅适用于摆角很小的情况。当摆角 $\theta > 5°$时，测量结果便产生不可忽视的系统误差。为了消除摆角对测量结果的影响，或者实验条件应满足 $\theta \leqslant 5°$的要求，或者在测量结果中予以修正，其修正公式为

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

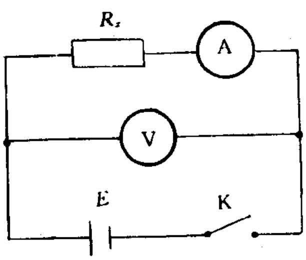


图 1－1 伏安法测电阻的电路图

又如，用伏安法测量电阻的实验，测量电路如图 1－1 所示。根据电压表、电流表的测量值 U 和 I，由欧姆定律得被测电阻值

$$R = \frac{U}{I}$$

考虑到电流表内阻 R_A 的影响，被测电阻的实际值应为

$$R_x = R - R_A = \frac{U}{I} - R_A$$

式中 R_A 即为测量结果的修正值。

(2)**测量方法的改进** 对同一物理量，用不同的测量方法和仪器将测量结果进行比较，可以了解是否存在系统误差，从而进一步限制和消除它。例如，用秒停表测时间，由于实验者反应灵敏程度不同，使得手控计时的测量误差可能大于停表的精度 0.05s。改用光电计时法，用数字毫秒计测量时间的精度可提高到 0.0001s。测定半导体材料的霍尔系数 R_H 时，为消除副效应的影响，将电流和磁场分别换向再进行测量，可以消除附加电势差。使用光点检流计测电流常数时，要测量光点向正反两个方向偏移格数的平均值，以消除悬丝在两个方向上扭转力矩的不同而产生的零点漂移。类似的情况很多，不一一列举。

(3)**仪器的调整和校准** 仪器误差是产生系统误差的重要原因。仪器在使用前要进行调整，以满足规定的条件。如仪器的零位调节，水平、铅直的调整，调焦等。仪器的使用条件如不符合要求，则需要进行校准。如某饱和式标准电池的电动势在 20℃的环境温度下为 1.01863V，在其它温度时对其电动势的数值需进行修正。对等级低的仪器可用等级高的仪器进行校准，以确定它对测量结果带来的系统误差。如用电位差计校准电压表的示值，根据校准曲线可得到电压表测量结果的更准确值。

(4)**消除实验操作过程中各种因素的影响** 应该注意在测量过程的每一步骤和操作中，都要尽量避免系统误差的引入。例如，用拉伸法测钢丝的杨氏模量的实验，钢丝不直将给其微小伸长量的测量带来很大的系统误差，我们就在测量前先给钢丝加上一定的砝码，使其伸直再进行测量。在牛顿环的实验中，所用测微仪的丝杠和螺母间有间隙，往往在刚开始或刚反向转动时会产生空程误差，即测微鼓轮已有读数，但测量机构尚未产生位移，造成虚假读数。应待丝杠和螺母啮合后进行测量。在测量过程中，只能朝一个方向转动鼓轮，切勿反转，以避免空程误

差。

以上几例仅说明修正和消除系统误差的一般方法。在实际测量中，根据对实验各个环节的周密考虑，对不同类型的系统误差还有许多具体的处理方法。这需要实验者有一定的理论水平和较丰富的实际经验。对于初学者来说，应该逐步学习分析系统误差的方法，积累处理系统误差的经验，以提高自己的实验素养。

2. 随机误差

随机误差的特点是具有偶然性。即在同一条件下对同一被测量进行多次测量时，每次出现的误差大小和符号呈无规律的变化，亦称偶然误差。但经过足够多次的重复测量以后，随机误差的分布服从一定的统计规律。

随机误差主要由实验中各种因素以不可预知的方式产生的微小变动所引起的：①环境因素的随机变动，例如，空气流动、温度起伏、电压波动等；②实验者感官分辨能力的局限性，例如，仪器调整和操作上的不一致，读数的估计上产生的差异等。

在多数物理实验中，随机误差服从正态分布（高斯分布）的统计规律，其特点如下。

①有界性：绝对值很大的误差出现的机会为零。

②单峰性：绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多。

③对称性：绝对值相等的正负误差出现的机会均等。

④抵偿性：正负误差的代数和为零。

这一统计规律在数学上可用高斯误差分布函数来描述。

$$p(\delta x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\delta x)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1-2)$$

式中，$p(\delta x)$为概率密度函数，即误差值 δx 在其附近单位区间内出现的概率；$\delta x=x-x_0$ 为测量值的随机误差；σ 是高斯分布函数中的唯一参量，表示在一定条件下随机误差的离散程度。

高斯分布曲线如图 1－2 所示。横坐标表示误差值，纵坐标表示概率密度的大小。坐标原点相当于 $\delta x=0$，对应着真值 x_0 的位置。曲线下的总面积表示各种可能误差值都出现的总概率，当然是 100％。由式（1－2）可计算出 $\pm\sigma$ 之间曲线下的面积为总面积的 68.3％，它表示随机误差在区间$[-\sigma,\sigma]$内出现的概率为 68.3％，或者说测量值 x 在区间$[x_0-\sigma,x_0+\sigma]$内出现的次数占总测量次数的 68.3％（当总测量次数无限多时），它还表示被测量的真值包含在上述区间内的可能性（置信概率）是 68.3％。同样计算得到，在区间$[\pm 2\sigma]$内随机误差出现的概率为 95.4％。在区间$[\pm 3\sigma]$内随机误差出现的概率为 99.7％，也就是说，随机误差超出这个范围的概率仅为 3‰，而在一般的测量次数（10 次）中，几乎不可能出现这种情况，所以 3σ 称为极限误差。上述根据即是剔除具有粗大误差 $|\delta x|>3\sigma$ 数据的拉依达准则。

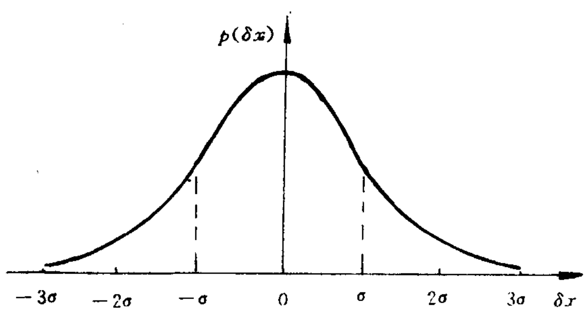


图 1－2　正态分布

σ 是高斯分布曲线拐点的横坐标，它的大小确定曲线的形状，如图 1－3 所示。对于某被测量 x，实验条件不变时，用不同的测量方法和测量仪器会使随机误差的大小不同。σ 大，表明随

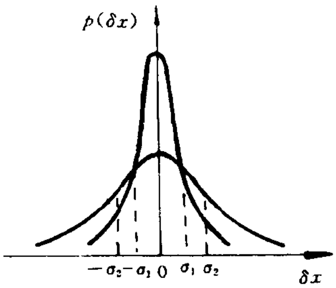


图 1－3 σ 值不同的两个正态分布

机误差离散程度大，测量的精密度低，曲线形状低而宽；反之，曲线形状高而窄。因而参量 σ 可以用来量度测量的精密度。σ 的数学表达式是

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\delta x)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_o)^2}{n}} \qquad (1-3)$$

式中测量次数 n 趋于无限大。σ 称为均方根误差或标准误差。

综上所述，随机误差和系统误差在产生原因、性质、特点和处理方法上是不同的，但是它们又有着密切的联系。在实际测量时二者可能同时出现。一般仪器误差既包含系统误差也包含随机误差。高级精密仪器的测量误差主要表现为随机误差。简单仪器的测量误差主要表现为系统误差。当实验条件变化时，随机误差和系统误差又可能互相转化。由于无法掌握环境因素在短时间内的微小起伏变化，因而它以随机误差的形式影响测量结果。但在长时间内能够掌握其变化规律时，可将它作为系统误差进行修正。这就要求我们根据具体情况分析误差的性质，再做相应的处理。

还有一种误差称为粗大误差，它是由实验者的失误造成的，如在记录和计算数据时写错数，或者实验操作不当、仪器损坏等。这是一种人为因素的错误，实验者必须要避免它。我们所说的误差不应包括这类误差。

三、精密度、正确度、准确度

为了描述测量结果的误差，根据国家计量技术规范，应采用以下的术语。

精密度 表示测量结果中随机误差大小的程度，即在规定条件下，对被测量进行多次测量，所得结果之间的符合程度。精密度又可简称为精度。

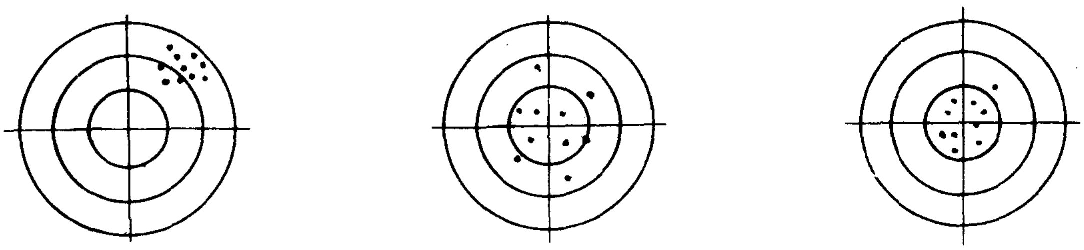
正确度 表示测量结果中系统误差大小的程度。它指的是在规定条件下，测量结果中所有系统误差的综合反映。

准确度 表示测量结果与被测量真值之间的一致程度。它指的是测量结果中系统误差与随机误差的综合反映。准确度亦称精确度。

以打靶为例，可形象理解上述三个概念之间的关系，如图 1－4 所示。图 1－4(a)的弹着点都向一侧偏离靶心，但比较集中，这反映了随机误差较小而系统误差较大的情况，即精密度高而正确度低。图 1－4(b)的弹着点比较分散，但平均值比较接近靶心，这反映了随机误差较大而系统误差较小的情况，即正确度高而精密度低。图 1－4(c)的弹着点比较集中，又都聚集在靶心附近，这反映了系统误差和随机误差都比较小的情况，即准确度高。

四、不确定度

对被测量的测量过程中，测量误差是普遍存在的，测量结果中包含有多种误差因素，如器具误差、人员误差、环境误差、方法误差、调整误差、观测误差、读数误差等等。还要考虑到在很多情况下，人们对于各种误差的信息不能全面了解和掌握，特别是在那些多次重复测量中，不能充分反映出来的随机误差因素和未定系统误差。所有这些因素使得测量结果具有一定程度的不确定性。为了对测量结果不确定程度进行定量的估计，需要引入一个新的概念——不确定度。



(a) (b) (c)

图 1－4 精密度、正确度、准确度之间的关系

不确定度是表征被测量的真值在某个量值范围的估计值。它表示真值在多大的可能性上处于某个范围之内。测量不确定度应该这样来估计：在修正了可定系统误差以后，把剩下的所有误差分成两类，可以用统计方法计算的 A 类分量 Δ_A 和用其它方法计算的 B 类分量 Δ_B，然后，将两类分量按方和根的方法进行合成。合成不确定度可表示为

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \tag{1-4}$$

需要指出的是，A 类分量和 B 类分量不一定与通常讲的随机误差和系统误差存在简单的对应关系。有关不确定度的计算与合成，还有许多问题需要深入讨论，有些问题还有争议，因此，在本书中仍用传统的误差概念来表示测量结果的不确定程度。

系统误差的特点和处理方法前面已有讨论，以下仅讨论随机误差的处理方法和测量结果的表示方法。

五、直接测量的误差估算

1. 仪器误差

直接测量值是用仪器直接得到的测量结果，因此进行直接测量时，首先要考虑仪器的误差。仪器误差是指在正确使用仪器的条件下，测量值和被测量的真值之间可能产生的最大误差。它是测量结果中系统误差和随机误差的综合反映。实际测量的误差总是小于或等于它，不会超过它，并且符号是不确定的。

仪器误差一般根据生产厂家仪器说明书所规定的示值误差或准确度等级来确定。例如，50 分度的游标卡尺，测量范围在 0～300mm 内，其示值误差为±0.02mm；150mA 量程的 0.5 级电流表的允许误差限为 0.75mA，它也是各示值的仪器误差。在物理实验中，还可以简化约定一些仪器的误差限，即取其最小分度值的一半。例如：米尺为 0.5mm，千分尺为 0.005mm，物理天平为 0.03g 等。

有时用仪器对被测量进行多次测量，会出现测量值完全相同的情况，好像不存在随机误差，其实这正说明仪器灵敏度太低，不能反映出多次测量的差异。在这种情况下，可以用仪器误差表示测量值的误差。

在实际工作中，有时不需要也不可能进行多次重复的测量，只要一次测量的结果就可以了。对于单次测量值，可用仪器误差作为它的误差限。如果认为测量的随机误差在这个极限范围内服从正态分布，则单次测量值的标准误差为

$$\sigma_x = \frac{\Delta_{仪}}{3} \tag{1-5}$$

式中。$\Delta_{仪}$ 代表仪器误差，σ_x 的置信概率仍为 68.3%。

2. 多次测量的算术平均值和误差的估算

(1)**算术平均值** 设在同一测量条件下进行多次测量，得到一组测量值 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$。被测量的真值为 x_0，各测量值的误差为 $\delta x_1 = x_1 - x_0, \delta x_2 = x_2 - x_0, \cdots, \delta_{x_n} = x_n - x_0$，则算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-6}$$

平均值并非真值，但比任一测量值更接近真值，因此是测量结果的最佳值。当测量次数无限多时，算术平均值就无限接近于真值。因为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_o + \delta x_i) \\ &= x_o + \frac{1}{n}\sum \delta x_i \end{aligned} \tag{1-7}$$

由随机误差的抵偿性，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum \delta x_i = 0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x} = x_0 \tag{1-8}$$

在实际测量中，只进行有限次数的测量，因此可用算术平均值作为近似真值。误差指测量值与真值之差，测量值与平均值之差则称为偏差，二者有所不同。实际测量中只能得到偏差。当测量次数很多时，也可不做区别。

(2)**平均偏差** 平均偏差可用各测量值偏差的绝对值求出平均值表示，即

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots |x_n - \bar{x}|}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \end{aligned} \tag{1-9}$$

平均偏差 Δx，表示在一组多次测量中，各个数据之间的分散程度。

对于一组测量数据，其平均值的平均偏差 $\Delta\bar{x}$ 与任一测量值的平均偏差 Δx 之间的关系为

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} \tag{1-10}$$

可以认为，平均值比任一测量值更接近于真值，它与真值的离散程度要小得多。

当测量次数 n 趋于无限大时，平均偏差就表示平均误差。这时任一测量值的误差落在区间[$\pm\Delta\bar{x}$]内的概率为 57.5%。

(3)**标准偏差** 我们还可以用标准偏差来表示测量值的随机误差。由式(1－3)标准误差的表达式可以得到在有限次测量中，标准偏差的表达式为

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-11}$$

上式亦称贝塞尔公式。一般地说，只要测量次数不是很少(例如不少于 10 次左右)，σ_x 表示任一测量值的误差 δx_i 落在[$\pm\sigma_x$]区间内的概率也是 68.3%。可以证明，当测量次数 n 趋于无限大时，式(1－11)即是标准误差 σ 的表达式(1－3)。

对于一组测量数据，其算术平均值的标准偏差是任一次测量值的标准偏差的 $1/\sqrt{n}$ 倍。

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \qquad (1-12)$$

当测量次数很少时，测量数据的平均值 $\bar{x}$ 和标准偏差 σ_x 将严重偏离正态分布的真值和标准误差，这时测量值的随机误差遵从另一分布——t 分布。在 n 为不同的测量次数时，可用相应的 t 因子乘以平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$，从而使得在[$\pm t\ \sigma_{\bar{x}}$]区间内随机误差的分布仍有 68.3%的置信概率。表 1—1 列出常用 t 因子数。

表 1—1　t 因子表

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0.683}$	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06

由表中可见，随着测量次数 n 的增加，t 因子趋近于 1，即 t 分布趋向于正态分布。

在物理实验中，随机误差既可以用平均误差也可以用标准误差，还可以用其它误差来表示。至于用哪种误差表示，应根据对测量结果可靠程度（置信概率）的要求而定。目前普遍采用标准误差的表示方法，一般计算器都有计算标准差的功能。

3. 测量结果的表示

根据随机误差的统计意义，可以把测量结果（修正了系统误差以后）写成如下形式：

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}(\text{或 } \Delta\bar{x}) \qquad (1-13)$$

式中，x 为测量值；$\bar{x}$ 是多次测量数据的算术平均值，代表近真值；$\pm$ 号表示每次测量值比 $\bar{x}$ 或大些或小些；$\sigma_{\bar{x}}$（或 $\Delta\bar{x}$）为绝对误差，表示测量结果的误差范围。不同范围内，被测量真值出现的概率不同，不能理解成测量结果只有 $\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$ 和 $\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}$ 两个值。

为了增大测量结果的可靠程度，也可粗略地用任一测量值的平均误差 Δx 或标准误差 σ_x 表示，即

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x(\text{或 } \Delta x) \qquad (1-14)$$

而不必用平均值的平均误差 $\Delta\bar{x}$ 或标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 来表示。因为平均值 $\bar{x}$ 的误差落在[$\pm\sigma_x$]或[$\pm\Delta x$]区间内的可能性更大。在测量次数为 10 次左右时，σ_x 或 Δx 对 $\bar{x}$ 都相当于极限误差，即上述区间相应于 95%以上的置信概率。

绝对误差尚不能完全反映出测量质量的好坏程度，还要看它在测量值中所占的比重。因此可用相对误差来表示测量结果的质量。相对误差的表示式为

$$E = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}(\text{或} \frac{\Delta x}{\bar{x}}) \qquad (1-15)$$

相对误差常以百分数的形式表示，也叫百分误差。对两个不同的测量结果，绝对误差大的，其相对误差不一定大；绝对误差小的，其相对误差未必就小。

六、间接测量的误差传递与合成

间接测量值是由一些直接测量值代入公式计算得到的。因为直接测量值都有误差，所以间接测量值也一定存在误差。也就是说，误差由直接测量值传递给间接测量值。这一规律即误差传递公式。

1. 误差传递的一般公式

设间接测量值 y 是几个互相独立的直接测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，即

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1-16}$$

对上式求全微分，有

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{1-17}$$

在高等数学中，$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}x_i$ 是函数 y 和变量 x_i 的微小增量，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 是函数对独立变量的偏导数。在实验中，通常测量误差远小于测量值，故可将 $\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}x_i$ 看成是误差，式(1－17)即为误差传递的基本公式。

还可以将式(1－16)两边先取对数再求全微分，有

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \tag{1-18}$$

此即间接测量值 y 的相对误差计算公式。

式(1－17)和式(1－18)就是误差传递的基本公式。其中 $\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$、$\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$ 各项叫分误差，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$、$\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}$ 叫误差传递系数。显而易见，对和差的函数，用式(1－17)计算误差方便，对积商的函数，用式(1－18)方便。

2. 误差的算术合成

由分误差求出总误差的过程叫误差的合成。算术合成的方法是将各项分误差取绝对值相加作为总误差，

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i \right| \tag{1-19}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\delta x_i \right| \tag{1-20}$$

这是随机误差在极端条件下的合成。它认为各直接测量值的误差均为同号，因此是间接测量值可能有的最大误差。常用函数误差的算术合成公式如表 1－2 所示。

表 1－2　常用函数误差的算术合成公式

函数表达式	误差合成公式
$y = x_1 + x_2$	$\Delta y = \delta x_1 + \delta x_2$
$y = x_1 - x_2$	$\Delta y = \delta x_1 + \delta x_2$
$y = x_1 x_2$	$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\delta x_1}{x_1} + \frac{\delta x_2}{x_2}$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\delta x_1}{x_1} + \frac{\delta x_2}{x_2}$
$y = kx$	$\Delta y = k\delta x$

续表

$y=\sqrt[k]{x}$	$\frac{\Delta y}{y}=\frac{1}{k}\frac{\delta x}{x}$
$y=\frac{x_1^K x_2^m}{x_3^n}$	$\frac{\Delta y}{y}=k\frac{\delta x_1}{x_1}+m\frac{\delta x_2}{x_2}+n\frac{\delta x_3}{x_3}$

由上述公式，可得到误差的算术合成（传递）规律：和差的绝对误差等于各个直接测量值绝对误差之和；积与商的相对误差等于各个直接测量值相对误差之和。公式中各项均取正值。上述规律可推广到多个直接测量值的情况。

误差的算术合成方法计算比较简单，合成后的总误差可靠性较高，但这样计算的结果将偏大。实际上，各项分误差在合成时可能互相抵消一部分。它常用于误差分析、误差限的粗略估算和实验方案的设计方面。

例题 1　用拉伸法测金属丝的杨氏模量的公式 $Y=\frac{8LD}{\pi d^2 b}\frac{F}{\Delta_n}$，测得金属丝长度 $L=78.40\text{cm}$，反射镜到标尺的垂直距离 $D=96.50\text{cm}$，光杠杆前后足尖的垂直距离 $b=6.90\text{cm}$，金属丝直径 $d=0.0531\text{cm}$，每加 2kg 外力标尺读数差的平均值 $\Delta_n=1.37\text{cm}$，试分析产生误差的主要原因。

解　Y 的相对误差的合成公式

$$E=\frac{\Delta Y}{Y}=\frac{\Delta L}{L}+\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta b}{b}+2\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta(\Delta n)}{\Delta n}$$

在不考虑附加误差的情况下，用米尺测量 L、D 的误差限 $\Delta L=\Delta D\approx 0.1\text{cm}$，测量 b 的误差限 $\Delta b\approx 0.05\text{cm}$；用千分尺测量 d 的误差限 $\Delta d\approx 0.0005\text{cm}$；标尺读数差的平均误差 $\Delta(\Delta\text{n})\approx 0.03\text{cm}$（测量数据略）。对各项分误差的估算可知，$\frac{\Delta L}{L}$，$\frac{\Delta D}{D}$，$\frac{\Delta b}{b}$ 仅为千分之几，$2\frac{\Delta d}{d}$、$\frac{\Delta(\Delta n)}{\Delta n}$ 达到百分之几。所以本实验的测量误差主要来源于标尺读数差和金属丝直径的测量。因此在实验安排上，对 Δn 的测量需进行多次并用逐差法处理数据，对 d 也应在金属丝的不同部位进行多次测量再求平均值，以提高它们的测量精确度。因为 L、D 的误差相对要小一个数量级，对它们只做单次测量就行了，这样安排实验就可以保证总误差小于百分之五。

3. 误差的方差合成——标准误差的传递与合成

标准误差可以更好地反映出测量的离散性，它考虑了正负误差互相抵消的可能性。因此在计算间接测量的总误差时，更多采用标准误差的传递公式。可以证明，总误差由各分误差的平方和再开方求得。

绝对误差

$$\sigma_y=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2+(\frac{\partial f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+(\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2} \tag{1-21}$$

相对误差

$$\frac{\sigma_y}{y}=\sqrt{(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2+(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2} \tag{1-22}$$

常用函数的标准误差的合成公式可由式（1－21）和式（1－22）求出，见表 1－3。

表 1－3　常用函数标准误差的合成公式

函数表达式	标准误差的合成公式
$y = x_1 + x_2$	$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$
$y = x_1 - x_2$	$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$
$y = x_1 x_2$	$\frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{(\frac{\sigma_{x1}}{x_1})^2 + (\frac{\sigma_{x2}}{x_2})^2}$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{(\frac{\sigma_{x1}}{x_1})^2 + (\frac{\sigma_{x2}}{x_2})^2}$
$y = kx$	$\sigma_y = k\sigma_x$
$y = \frac{x_1^k x_2^m}{x_3^n}$	$\frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{k^2(\frac{\sigma_{x1}}{x_1})^2 + m^2(\frac{\sigma_{x2}}{x_2})^2 + n^2(\frac{\sigma_{x3}}{x_3})^2}$
$y = \sqrt[k]{x}$	$\frac{\sigma_y}{y} = \frac{1}{k} \frac{\sigma_x}{x}$
$y = \sin x$	$\sigma_y = \cos x \cdot \sigma_x$
$y = \ln x$	$\sigma_y = \frac{\sigma_x}{x}$

由上述公式可以归纳得到标准误差的传递与合成规律：和与差的绝对误差等于各直接测量值绝对误差的方和根；积与商的相对误差等于各直接测量值相对误差的方和根。上述规律可以推广到多个直接测量值的情况。在计算间接测量值的误差时，除了加、减法运算关系外，一般先计算相对误差 E，再计算绝对误差 $\sigma_y = E\,\overline{y}$，最后将实验结果表示成

$$y = \overline{y} \pm \sigma_y$$

七、有效数字

1. 有效数字的概念

测量仪器都有一定的准确度(最小测量单位)。在准确度以下的测量值需由估计读数来确定，这一位就是测量误差出现的位数。能够从仪器上准确读出的数值是可靠数字，误差所在位的估读数字是可疑数字，可靠数字加可疑数字称有效数字。它们均作为仪器的示值，可以有效地表示测量结果，但是估读数值并不等于测量误差的大小。有时往往只需做单次测量而不需要计算误差，这时有效数字就是表示测量结果的近似数。如图 1－5 所示，用米尺测量物体的长度 L=2.48cm。

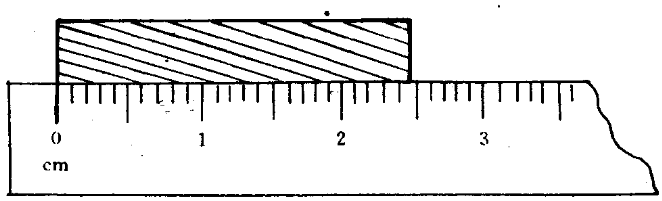


图 1－5　有效数字

其中 2.4cm 是可靠数字，它可以从米尺刻度准确读出；0.08cm 是可疑数字，它是从物体长度 L 在两相邻毫米刻线间的位置估计出来的数值。2.48cm 表示测量结果的大小和误差所在位数。在这一位上误差限为 0.05cm。由于误差本身是一个估计值，在本课程中规定，测量结果的绝对误差只取一位有效数字，并且测量结果的最后一位数字应和绝对误差所在位对齐。如上例，物体长度表示为 L=2.48±0.

05cm。相对误差的有效数字可取两位，以免由它计算绝对误差时引起过大的偏差。

有效数字的位数与十进制单位的变换无关，它只决定于仪器的测量精确度。上例中，用米尺测物体的长度 L，不论用什么单位表示都是三位有效数字，如 $L=2.48\text{cm}=24.8\text{mm}=0.0248\text{m}$。这里应注意，用以表示小数点位置的“0”不是有效数字，而在非零数字后面的“0”都是有效数字，如 0.300V，1.0050cm 的有效数字分别是三位、五位，数据最后的“0”不能随便多写或少写。图 1－5 中物体长度绝不能写成 24800μm。因为米尺测量准确度不会这样高，但是用螺旋测微计测量的结果可以达到这样的精确程度。

为便于表示过大或过小的数值，又不改变测量结果的有效数字位数，常用一位整数加上若干位小数再乘以 10 的幂的形式表示，称为有效数字的科学记数法。如上例，以 μm 为单位表示物体长度时 $L=2.48\times10^4\mu\text{m}$。又如某测量结果 $x=(0.000150\pm0.000003)\text{m}$，可表示为 $x=(1.50\pm0.03)\times10^{-4}\text{m}$。

在有效数字运算和测量结果的表示中，存在数据的截断、尾数的舍入问题。现在通用的规则是：四舍六入五凑偶”。它的依据是使尾数的舍与入的概率相等。例如，12.455 取四位有效数字为 12.46，取三位有效数字为 12.5，取两位有效数字为 12，取一位有效数字为 1×10^1。

2. 有效数字的运算规则

实验结果一般要通过有效数字的运算才能得到。实验结果应保留几位有效数字，在实验数据的处理中是一个十分重要的问题。通常，一个数据的有效数字位数越多，它的相对误差越小；反之相对误差就大。

（1）有效数字的四则运算规则　根据以下原则可确定运算结果的有效数字位数：①可靠数字间的运算结果为可靠数字，可靠数字与可疑数字或可疑数字之间的运算结果为可疑数字；②运算结果只保留一位可疑数字。

对于加减法运算，例如：

$$278.\underline{3}+12.45\underline{1}=290.\underline{8}$$

$$538.\underline{6}-21.3\underline{4}=517.\underline{3}$$

可以看出：和与差的有效数字尾数要和参加运算的诸因子中尾数最靠前的因子取齐。即“尾数取齐”。

对于乘除运算，例如：

$$34.\underline{2}\times2\underline{8}=9.\underline{6}\times10^2$$

$$56\underline{8}\div0.\underline{2}=\underline{3}\times10^3$$

可以看出：积与商的有效数字位数要和参加运算的诸因子中位数最少的因子取齐，即“位数取齐”。

可以证明，乘方或开方运算结果的有效数字位数与其底的有效数字位数相同。

上述结论都是很粗略的，没有考虑到某些特殊情况。为防止在多次运算过程中，因数字的舍入引进附加误差，中间的运算结果要多取一位数字，但在最后结果中仍只保留一位可疑数字。对参与运算的常数，其有效数字的位数可视需要取到任一位。

（2）其它函数运算的有效数字　进行函数运算时，不能搬用有效数字的四则运算规则。严格地说，要用微分公式求出绝对误差，再由误差确定有效数字的位数。这时取被运算数值的改变量为其有效数字最后一位上的 1 个单位，由此决定函数值的绝对误差所在位。

例如 $x=45.8$，为三位有效数字，则 $\ln x=3.824$，在小数点后面取三位有效数字。因为 Δ_x