

# 工程结构数值 分析方法与程序设计

罗定安 编著



天津大学出版社

TU311.4  
L94

389746

# 工程结构数值分析方法与程序设计

罗定安 编



天津大学出版社



## 工程结构数值分析方法与程序设计

罗定安 编

\*

天津大学出版社出版

(天津大学内 邮编:300072)

永清县第一胶印厂印刷

新华书店天津发行所发行

\*

开本:787×1092毫米 1/16 印张:15 1/4 字数:378千

1995年9月第一版 1995年9月第一次印刷

印数:1-4000

ISBN 7-5618-0769-4  
TU·78 定价:18.00元

## 前 言

本书是根据编者从1981年起在天津大学为工程结构硕士研究生和部分工程结构本科大学生讲课时的讲义加以改编而成的。编者希望本教材对本学科的普及和进一步提高都能有所帮助。

本书叙述的结构数值分析方法是指近十几年来盛行的有限单元法。自从1960年 Clough 提出“有限单元法”以来,这种方法的研究工作蓬勃发展,并已经成为结构分析中必不可少的工具,被广泛地应用于解决土木工程、机械工程结构、水工结构和其他连续介质力学的各类问题中。

本教材在编写时,结合以往的教学经验,力求做到循序渐进,深入浅出,难点分散,从物理概念上说明问题。每章基本原理后随即介绍如何设计框图、编写程序,以达到学以致用目的。为了减少初学者上机与编程中的困难,本书附录后还提供了弹性力学基本概念、IBM 系列微机使用方法与 FORTRAN77 语言梗概的参考资料。

本书在编写和出版过程中,得到天津大学研究生院和土木系、水利系及建筑设计院的支持和本教研室同志的帮助,特此表示感谢。由于作者水平所限,书中难免有错误和不妥之处,望读者给予批评指正。

编者

1994年8月

# 目 录

<b>第一章</b>	<b>直接刚度法解杆系平面结构</b> .....	1
1.	概述与符号.....	1
2.	局部坐标系中的单元刚度矩阵.....	3
3.	整体坐标系中斜杆的单元刚度矩阵.....	7
4.	结构的结点荷载列阵 .....	10
5.	用直接刚度法形成整体刚度矩阵 .....	14
6.	支承约束条件的引入 .....	16
7.	结点位移、支座反力与杆件内力解答.....	17
8.	直接刚度法解平面刚架示例 .....	17
<b>第二章</b>	<b>平面刚架程序 PM3 设计</b> .....	23
1.	概述 .....	23
2.	PM3 程序结构.....	24
3.	主段框图 .....	25
4.	BAZ 子程序框图 .....	25
5.	PM32 子程序框图 .....	26
6.	PM33 子程序框图 .....	26
7.	PM34 子程序框图 .....	27
8.	PM35 子程序框图 .....	30
9.	GS 子程序框图(全主元素高斯—约丹法解线性方程组,求逆阵) .....	33
10.	PM36 子程序框图.....	37
11.	PM37 子程序框图.....	37
12.	PM38 子程序框图.....	38
13.	PM39 子程序框图.....	38
14.	平面刚架 PM3 的源程序 .....	40
15.	平面刚架程序输入数据文件格式一览表.....	53
<b>第三章</b>	<b>弹性力学平面问题的有限单元法</b> .....	59
1.	平面问题的两种类型 .....	59
2.	弹性力学平面问题的基本方程式 .....	60
3.	弹性力学平面问题的有限单元法 .....	64
4.	平面问题有限元法公式与推导 .....	65
5.	整体刚度矩阵的特点 .....	80
6.	二维等带宽存储与等带宽消去法解方程组 .....	83
<b>第四章</b>	<b>平面问题程序 PLA 的设计</b> .....	86
1.	PLA 平面问题程序说明与应用范围.....	86
2.	程序总框图 .....	86
3.	程序的分框图 .....	87

4.	平面问题 PLA 的源程序 .....	99
<b>第五章</b>	<b>薄板弯曲问题的有限元法</b> .....	<b>108</b>
1.	薄板小挠度弯曲的基本方程式 .....	108
2.	薄板弯曲的有限单元法 .....	113
3.	三角形薄板弯曲单元 .....	128
4.	整体刚度矩阵的变带宽存储法 .....	134
5.	大型对称、正定变带宽方程组解法 .....	139
<b>第六章</b>	<b>等参数单元</b> .....	<b>146</b>
1.	线性单元与双线性单元 .....	146
2.	四结点四边形等参数单元 .....	151
3.	高斯积分的应用 .....	158
4.	四结点二维等参数单元刚度矩阵计算框图 .....	160
5.	八结点曲边四边形等参数单元 .....	161
6.	三维八结点六面体等参数单元 .....	166
7.	三维 20 结点曲六面体等参数单元 .....	169
8.	三维应力分析 .....	171
<b>附录 A</b>	<b>弹性力学的概念与基本方程式</b> .....	<b>178</b>
A-1.	常用的记号与正负号 .....	178
A-2.	主应力及应力主向 .....	179
A-3.	几何方程与刚体位移 .....	181
A-4.	物理方程与弹性矩阵 .....	183
A-5.	虚功及虚功方程 .....	184
<b>附录 B</b>	<b>IBM 系列微机的使用</b> .....	<b>187</b>
B-1.	磁盘操作系统的入门 .....	187
B-2.	DOS 基本操作命令 .....	188
B-3.	行编辑程序(EDLIN) .....	191
B-4.	文件管理及硬盘使用 .....	196
B-5.	用 BASIC 语言的算题方法 .....	197
B-6.	用 FORTRAN 语言的算题方法 .....	198
B-7.	程序运行及 FORTRAN 程序中的输入输出 .....	200
<b>附录 C</b>	<b>FORTRAN77 语言梗概</b> .....	<b>202</b>
C-1.	FORTRAN 语言的发展概况 .....	202
C-2.	程序结构 .....	203
C-3.	字符集 .....	205
C-4.	数据类型 .....	205
C-5.	数组与数组元素 .....	207
C-6.	运算符与表达式 .....	209
C-7.	函数 .....	211
C-8.	编译元命令 .....	212
C-9.	IBM FORTRAN 中可执行性语句汇总 .....	213

C-10. IBM FORTRAN 中非执行性语句汇总 .....	222
附录 D 课程练习要求与部分答案 .....	230
参考书目 .....	234

# 第一章 直接刚度法解杆系平面结构

## 1. 概述与符号

### 1.1 概述

本章所述的平面杆系结构，是指组成结构的所有杆件的轴线与载荷作用线均在同一平面上的结构。例如，平面桁架、连续梁与平面刚架等都属这一类结构。

在古典的材料力学和结构力学中，对结构的力学分析是从结构的平衡、几何和物理关系出发，建立结构上单个力学参数之间的函数关系，进一步求解而得到未知数的解答。但是近代的力学分析已经不限于单个力学参数，而是研究一组参数与另一组参数之间的关系，因而不得不引入数组或矩阵的概念，并且利用了线性代数中许多的运算规则和结论。这对于已经广泛地利用电子计算机作为工具的今天，利用这些结论更能发挥出计算机高效率、高速度的特点。

有限单元法应用在杆系结构中时，又称结构矩阵解法。它是目前对结构进行力学分析最有效的数值解法之一。用有限单元法求解结构问题的基本思想是：将一个在荷载作用下的连续结构，分解成各自独立的离散结构（或称单元），那么，原结构就可以看成是由各离散结构在分界点（或称结点）处相互连结而成的。

用有限单元法分析结构可分为如下步骤：



离散化是指对连续结构进行剖分，一般先在连续结构上确定结点，然后将结构从结点处分割成有限个单元。如果我们所研究的杆系是由等截面直杆组成，那么，这些结点应该就是结构上杆件的转折点、汇交点、支承点和截面突变点等。对于曲杆结构（例如拱），可将它化为许多折线来处理，每一线段取作一个单元。如果截面是变化的，则可取该单元中结点处的截面，近似地表示单元的截面，计算时仍按等截面单元进行。显然，对这样的结构，单元分得愈多，其计算结果将愈接近于真实情况。

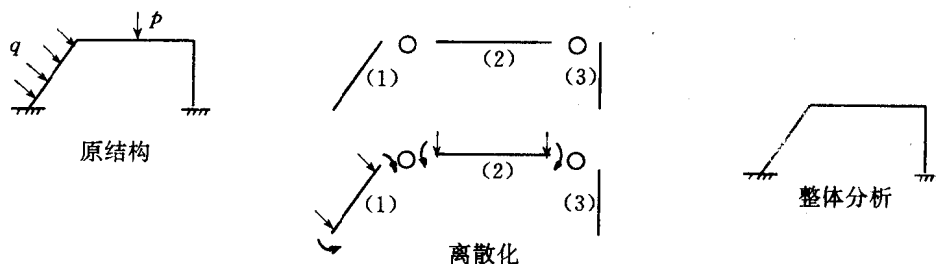


图 1-1

单元分析的任务就是要建立单元结点处力学参数之间的关系。对于杆单元来说，就是建



立杆端处位移与内力的关系，这可以利用单元的平衡条件、几何条件和物理条件来解决。在研究作用在单元上的荷载时，可以利用力的等效的原则，把它们全部移置到杆端处（或结点处）。

整体分析的任务是保证结构从离散状态恢复回原状所必须的。这就要利用到结构的整体平衡条件、几何协调条件和物理条件等等，并由此建立起一系列的关系方程式，求解这些方程式就能得到预定未知数的解答。

### 1.2 记号与符号

在进行有限单元法分析时，经常要遇到两种坐标系以及与这两种坐标系相关的参数。为此，我们规定以下记号。

首先，在进行单元分析时，采用单元局部坐标系  $XY$ ，并假设  $X$  轴与单元的杆轴线重合。

如图 1-2，设任一  $(i)$  号单元  $JK$ ，则单元杆轴线与局部坐标系的关系如图所示，系统方向遵循右手法则。

单元杆端力列阵

$$S^{(i)} = \begin{Bmatrix} S_1^{(i)} \\ S_2^{(i)} \\ S_3^{(i)} \\ S_4^{(i)} \\ S_5^{(i)} \\ S_6^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_J \\ Q_J \\ M_J \\ N_K \\ Q_K \\ M_K \end{Bmatrix} = \{S_1^{(i)} \quad S_2^{(i)} \quad S_3^{(i)} \quad S_4^{(i)} \quad S_5^{(i)} \quad S_6^{(i)}\},$$

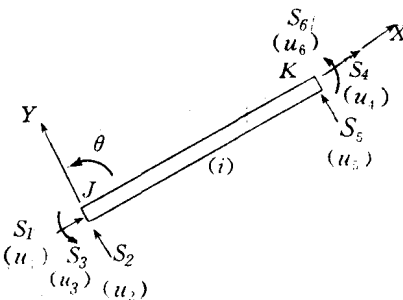


图 1-2

单元杆端位移列阵

$$u^{(i)} = \begin{Bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \\ u_4^{(i)} \\ u_5^{(i)} \\ u_6^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_J \\ v_J \\ \theta_J \\ u_K \\ v_K \\ \theta_K \end{Bmatrix} = \{u_1^{(i)} \quad u_2^{(i)} \quad u_3^{(i)} \quad u_4^{(i)} \quad u_5^{(i)} \quad u_6^{(i)}\}.$$

图 1-2 上所示的杆端力及杆端位移均为正号，反之为负。

其次，在进行整体分析时还涉及到另一个坐标系——整体坐标系  $\bar{X}\bar{Y}$ 。相应的单元杆端力列阵

$$\bar{S}^{(i)} = \{\bar{S}_1 \quad \bar{S}_2 \quad \bar{S}_3 \quad \bar{S}_4 \quad \bar{S}_5 \quad \bar{S}_6\},$$

相应的单元杆端位移列阵

$$\bar{u}^{(i)} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{u}_4 \quad \bar{u}_5 \quad \bar{u}_6\}.$$

其正符号规定如图 1-3 所示，反之为负。

以后约定：凡是按整体坐标系推求的物理量都在上面加“—”，以示区别。

对于结点的位移及结点荷载，也应该在记号上面加“—”，因为它们都是以整体坐标作为参照系统的。但是由于今后它们在整体分析时才会出现，为了表示简便，在书写时，一律略去“—”，写成

$$U_J = \{U_{xJ} \ U_{yJ} \ \theta_J\} = \{U_{1J} \ U_{2J} \ U_{3J}\},$$

$$P_J = \{P_{xJ} \ P_{yJ} \ M_J\} = \{P_{1J} \ P_{2J} \ P_{3J}\}.$$

正负号的规定仍按照右手法则，以图 1-4 所示为正，反之为负。

用有限单元法求解结构时，可按所取的结点未知量的不同而分为刚度法、柔度法和混合法三种。刚度法即取结点位移作为基本未知量，又称位移法；柔度法即取杆端力作为基本未知量，又称力法；混合法取部分结点位移与部分杆端力作为基本未知量。

目前，最常用的是刚度法，本章所推导的公式均是取结点位移作为基本未知量。

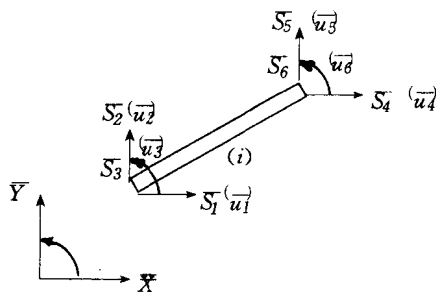


图 1-3

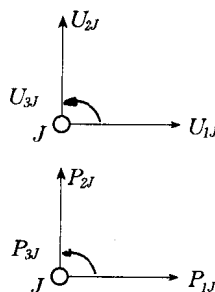


图 1-4

## 2. 局部坐标系中的单元刚度矩阵

### 2.1 平面轴力杆单元刚度矩阵

设 (i) 号单元 JK 的杆长为  $l$ ，截面积为  $A$ ，弹性模量为  $E$ ，在局部坐标系  $XY$  中，作用于单元两端的轴力是

$$S_1, \ S_2.$$

在轴力作用下，JK 杆变成  $J'K'$  杆。杆单元两端的位移分别是

$$u_1, \ u_2.$$

由虎克定律，按叠加原理有

$$S_1 = \frac{AE}{l}(u_1 - u_2),$$

$$S_2 = \frac{AE}{l}(-u_1 + u_2).$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix},$$

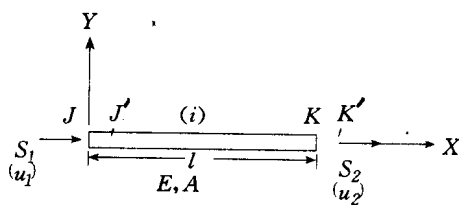


图 1-5

或缩写成

$$S^{(i)} = K^{(i)}u^{(i)}, \quad (1-1)$$

(1-1)式表示了轴力杆单元的杆端力与杆端位移的关系。其中， $u^{(i)}$ 及 $S^{(i)}$ 只考虑轴向变形和轴向力，列阵中并不包括剪切与弯曲变形项，如图1-5所示，亦即

$$u^{(i)} = \{u_1 \quad u_2\}, \quad S^{(i)} = \{S_1 \quad S_2\}.$$

而矩阵

$$K^{(i)} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1-2)$$

称为轴力杆单元刚度矩阵，它是 $2 \times 2$ 阶方阵。

为了运算中的需要，(1-2)式有时也可以写成第二种形式，将Y方向的变形和Y方向杆端力写到矩阵中，变为 $4 \times 4$ 方阵

$$K^{(i)} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1-3)$$

(1-3)式对应的杆端位移及杆端力列阵分别是

$$u^{(i)} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\};$$

$$S^{(i)} = \{s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4\}.$$

如图1-6所示，列阵中各元素的1、2、3、4排列顺序，分别代表J端的X、Y方向及K端的X、Y方向的杆端位移或杆端力。图上所示的向量均为正方向。

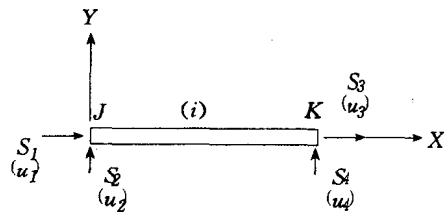


图1-6

同样是为了运算中的需要，(1-2)式有时也可以写成第三种形式。那就是在(1-3)式的情况下，再增加上J端与K端的杆端转角与杆端力矩，变为 $6 \times 6$ 的方阵

$$K^{(i)} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-4)$$

(1-4)式的单元刚度矩阵所对应的杆端位移及杆端力列阵如下：

$$u^{(i)} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\},$$

$$S^{(i)} = \{S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6\}.$$

它们的正负号规定仍然遵守右手法则，转角与力矩以逆时针方向旋转为正号，如图1-7所示。

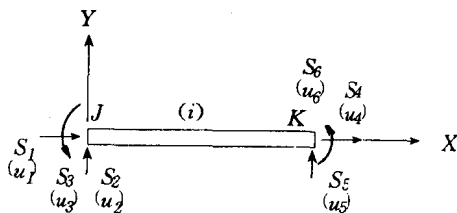


图1-7

实际上, (1-1) 式、(1-2) 式及 (1-3) 式都同样表示轴力杆单元内杆端位移与杆端力之间的转换关系式, 只是在使用时, 由于所考虑的杆端 (亦即结构上的结点) 包含不同数目的未知数, 而表示形式不同而已。

## 2.2 平面梁单元刚度矩阵

一般认为, 对于简单的平面直梁都可以略去轴向力与轴向变形, 只考虑剪切与弯曲变形的影响。设 (i) 号单元 JK 的杆长为  $l$ , 截面惯性矩为  $I$ , 弹性模量为  $E$ 。在局部坐标系  $XY$  中, 作用于单元两端的剪切与弯曲杆端力是

$$S_1, S_2, S_3, S_4.$$

变形后 JK 杆变为  $J'K'$  杆。

杆单元两端的杆端位移分别是

$$u_1, u_2, u_3, u_4.$$

在利用结构力学位移法中, 由单位杆端位移所引起的杆端力的结果, 并利用线性系统的叠加原理, 不难得出

$$S_1 = \frac{12EI}{l^3}u_1 + \frac{6EI}{l^2}u_2 - \frac{12EI}{l^3}u_3 + \frac{6EI}{l^2}u_4,$$

$$S_2 = \frac{6EI}{l^2}u_1 + \frac{4EI}{l}u_2 - \frac{6EI}{l^2}u_3 + \frac{2EI}{l}u_4,$$

$$S_3 = -\frac{12EI}{l^3}u_1 - \frac{6EI}{l^2}u_2 + \frac{12EI}{l^3}u_3 - \frac{6EI}{l^2}u_4,$$

$$S_4 = \frac{6EI}{l^2}u_1 + \frac{2EI}{l}u_2 - \frac{6EI}{l^2}u_3 + \frac{4EI}{l}u_4.$$

用矩阵形式表示为

$$S^{(i)} = K^{(i)}u^{(i)}.$$

上式与 (1-1) 式具有相同的形式, 但是含义却有所不同。式中的杆端力列阵  $S^{(i)}$  及杆端位移列阵  $u^{(i)}$ , 分别与图 1-8 所示之各元素对应, 即

$$S^{(i)} = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4\},$$

$$u^{(i)} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}.$$

而平面梁单元刚度矩阵  $K^{(i)}$  是  $4 \times 4$  方阵

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (1-5)$$

为了运算中的需要, 在平面梁单元刚度矩阵 (1-5) 式中, 也可以将轴向力与轴向变形项加入, 扩展成  $6 \times 6$  方阵

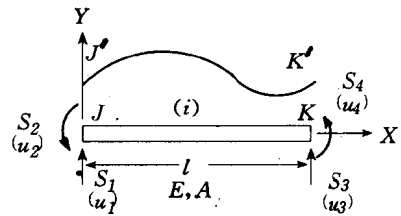


图 1-8

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

其中，对应的杆端位移列阵  $u^{(i)}$  及杆端力列阵  $S^{(i)}$  中的元素，如

$$u^{(i)} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\}$$

$$S^{(i)} = \{s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6\}$$

如图 1-9 所示。

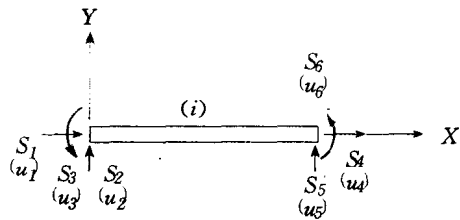


图 1-9

### 2.3 平面刚架单元刚度矩阵

在一般情况下，平面刚架单元总是同时存在轴向变形与剪切弯曲变形的影响。在小变形的线性系统下，如果认为轴向变形与弯曲变形之间相互独立、互不影响，就可以将 (1-4) 式与 (1-6) 式叠加，并得出与平面刚架单元刚度矩阵  $K^{(i)}$  对应的单元刚度方程

$$S^{(i)} = K^{(i)} u^{(i)}$$

其中

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

对应的杆端位移列阵  $u^{(i)}$  和杆端力列阵  $S^{(i)}$  中的元素分别是

$$u^{(i)} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\}$$

$$S^{(i)} = \{s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad s_5 \quad s_6\}$$

图 1-10 表示同时考虑轴向变形与弯曲变形时, 变形前后的平面刚架单元。

由于 (1-7) 式是表示最一般情况下变形的单元刚度矩阵, 因此最常用。

单元刚度矩阵 (1-4) 式、(1-6) 式或 (1-7) 式都具有如下特点: 不仅是对称的, 而且是奇异的。对称性可以用互等定理得到证明, 而奇异性则是由于单元处于平衡状态所致。单元刚度矩阵中各刚度元素  $K_{ij}$  的物理意义, 是当单元仅在第  $j$  个方向上有一个单位位移时, 在第  $i$  个方向上产生的杆端力的大小。根据这个物理意义, 单元刚度矩阵中的各个元素, 也可以用其他方法逐一推求出来。

### 3. 整体坐标系中斜杆的单元刚度矩阵

#### 3.1 概述

当从单元分析转到整体分析时, 需将各单元杆件在结点处拼装。为使拼装顺利进行, 各杆件单元的所有力学参数均应采用统一的整体坐标系来表示。因此, 本节的任务是要将上节所得的局部坐标下单元刚度矩阵进行坐标变换, 以便将它转变为用整体坐标表示的单元刚度矩阵。

我们仍假设 ( $i$ ) 号杆  $JK$ , 杆长为  $l$ , 截面积为  $A$ , 截面惯性矩为  $I$ , 弹性模量为  $E$ 。局部坐标系的  $X$  轴与整体坐标系的  $\bar{X}$  轴夹角为  $\alpha$ , 如图 1-11 所示。从最一般的情况下,  $JK$  杆的杆端位移列阵与杆端力列阵, 在局部坐标系和整体坐标系分别表示为

与

$$u^{(i)} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\},$$

$$\bar{u}^{(i)} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{u}_4 \quad \bar{u}_5 \quad \bar{u}_6\}.$$

与

$$S^{(i)} = \{S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6\},$$

$$\bar{S}^{(i)} = \{\bar{S}_1 \quad \bar{S}_2 \quad \bar{S}_3 \quad \bar{S}_4 \quad \bar{S}_5 \quad \bar{S}_6\}.$$

两个坐标系的杆端力之间的关系可以根据投影关系得出

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \bar{S}_1 \cos \alpha + \bar{S}_2 \sin \alpha \\ S_2 &= -\bar{S}_1 \sin \alpha + \bar{S}_2 \cos \alpha \\ S_3 &= \bar{S}_3 \\ S_4 &= \bar{S}_4 \cos \alpha + \bar{S}_5 \sin \alpha \\ S_5 &= -\bar{S}_4 \sin \alpha + \bar{S}_5 \cos \alpha \\ S_6 &= \bar{S}_6 \end{aligned} \right\},$$

用矩阵符号可以写成

$$S^{(i)} = \lambda_T^{(i)} \bar{S}^{(i)}.$$

(1-8)

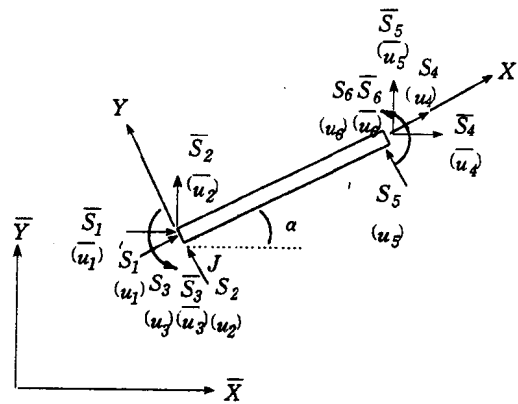


图 1-11

其中

$$\lambda_T^{(i)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1-9)$$

称为坐标转换矩阵.

若引用符号  $C_x = \cos\alpha, C_y = \sin\alpha$ ,  
以及子阵记号

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1-10)$$

则 (1-9) 式可写为

$$\lambda_T^{(i)} = \begin{pmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{pmatrix}. \quad (1-11)$$

同理, 可以推求得到两个坐标系的杆端位移之间的关系

$$u^{(i)} = \lambda_T^{(i)} \bar{u}^{(i)}. \quad (1-12)$$

现在, 只要将 (1-8) 式和 (1-12) 式分别代回到形如 (1-1) 式的单元刚度方程式

$$S^{(i)} = K^{(i)} u^{(i)},$$

的两端, 即有

$$\lambda_T^{(i)} \bar{S}^{(i)} = K^{(i)} \lambda_T^{(i)} \bar{u}^{(i)},$$

将等式两边分别前乘  $\lambda_T^{(i)}$  的逆矩阵  $(\lambda_T^{(i)})^{-1}$ , 得

$$\bar{S}^{(i)} = (\lambda_T^{(i)})^{-1} K^{(i)} \lambda_T^{(i)} \bar{u}^{(i)}, \quad (1-13)$$

注意到其中的转换矩阵  $\lambda_T^{(i)}$  是一个正交矩阵, 它具有如下的特点

$$(\lambda_T^{(i)})^{-1} = \lambda_T^{(i)T}, \quad (1-14)$$

将 (1-14) 式代回到 (1-13) 式中, 即得

$$\bar{S}^{(i)} = \lambda_T^{(i)T} K^{(i)} \lambda_T^{(i)} \bar{u}^{(i)}, \quad (1-15)$$

令

$$\bar{K}^{(i)} = \lambda_T^{(i)T} K^{(i)} \lambda_T^{(i)}, \quad (1-16)$$

于是 (1-15) 式变成

$$\bar{S}^{(i)} = \bar{K}^{(i)} \bar{u}^{(i)}. \quad (1-17)$$

其中  $\bar{K}^{(i)}$  由 (1-16) 式所定义, 称之为整体坐标的单元刚度矩阵.

以下, 我们将分别推导轴力杆单元、平面梁单元及平面刚架单元刚度矩阵, 以供具体计

算时参考.

### 3.2 平面轴力单元刚度矩阵

(1-17) 式中的  $\bar{u}^{(i)}$  和  $\bar{S}^{(i)}$  列阵均是由图 1-11 上所定义的杆端位移及杆端力元素所组成的. 每个杆端均含有沿  $X, Y$  及  $\theta$  方向三个参数, 转换矩阵  $\lambda^{(i)}$  也是一个  $6 \times 6$  的方阵. 因此, 在推导整体坐标下平面轴力单元刚度矩阵时需采用 (1-4) 式的  $K^{(i)}$ .

将 (1-4) 式的  $K^{(i)}$  及 (1-9) 式的  $\lambda_T^{(i)}$  代入 (1-16) 式中, 经过整理后得

$$\bar{K}^{(i)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & 0 & -C_x^2 & -C_x C_y & 0 \\ C_x C_y & C_y^2 & 0 & -C_x C_y & -C_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_x^2 & -C_x C_y & 0 & C_x^2 & C_x C_y & 0 \\ -C_x C_y & -C_y^2 & 0 & C_x C_y & C_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1-18)$$

(1-18) 式所示的  $\bar{K}^{(i)}$  称为平面轴力单元在整体坐标系中的单元刚度矩阵.

如果从图 1-11 上略去杆端的转角  $\bar{u}_3, \bar{u}_6$ , 同时略去对应的杆端弯矩  $\bar{S}_3, \bar{S}_6$ , 并将列阵  $\bar{u}^{(i)}$  和  $\bar{S}^{(i)}$  中的元素按  $\bar{X}\bar{Y}$  的先后顺序重新排列, 缩减成  $4 \times 1$  阶列阵, 那么, 对应的 (1-18) 式也可以缩减成  $4 \times 4$  的方阵, 即

$$\bar{K}^{(i)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & -C_x^2 & -C_x C_y \\ C_x C_y & C_y^2 & -C_x C_y & -C_y^2 \\ -C_x^2 & -C_x C_y & C_x^2 & C_x C_y \\ -C_x C_y & -C_y^2 & C_x C_y & C_y^2 \end{bmatrix}. \quad (1-19)$$

(1-19) 式适合于用来求解平面桁架结构.

### 3.3 平面梁单元刚度矩阵

由于略去轴向变形与轴力各项, 因此可以采用 (1-6) 式所示的  $K^{(i)}$ , 将 (1-6) 式的  $K^{(i)}$  和 (1-9) 式的  $\lambda_T^{(i)}$  代入 (1-16) 式中, 经整理得

$$\bar{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} C_x^2 & -\frac{12EI}{l^3} C_x C_y & -\frac{6EI}{l^2} C_y & -\frac{12EI}{l^3} C_y^2 & \frac{12EI}{l^3} C_x C_y & -\frac{6EI}{l^2} C_x \\ -\frac{12EI}{l^3} C_x C_y & \frac{12EI}{l^3} C_x^2 & \frac{6EI}{l^2} C_x & \frac{12EI}{l^3} C_x C_y & -\frac{12EI}{l^3} C_x^2 & \frac{6EI}{l^2} C_x \\ -\frac{6EI}{l^2} C_y & \frac{6EI}{l^2} C_x & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} C_y & -\frac{6EI}{l^2} C_x & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} C_y^2 & \frac{12EI}{l^3} C_x C_y & \frac{6EI}{l^2} C_y & \frac{12EI}{l^3} C_y^2 & -\frac{12EI}{l^3} C_x C_y & \frac{6EI}{l^2} C_y \\ \frac{12EI}{l^3} C_x C_y & -\frac{12EI}{l^3} C_x^2 & -\frac{6EI}{l^2} C_x & -\frac{12EI}{l^3} C_x C_y & \frac{12EI}{l^3} C_x^2 & -\frac{6EI}{l^2} C_x \\ -\frac{6EI}{l^2} C_y & \frac{6EI}{l^2} C_x & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} C_y & -\frac{6EI}{l^2} C_x & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \quad (1-20)$$

$\bar{K}^{(i)}$  称为平面梁单元在整体坐标系中的单元刚度矩阵. 显然  $\bar{K}^{(i)}$  是一个  $6 \times 6$  的方阵, 而且也是



对称的。

### 3.4 平面刚架一般单元刚度矩阵

如果将 (1-7) 式的  $K^{(i)}$  及 (1-9) 式的  $\lambda_T^{(i)}$  代入 (1-16) 式, 经过整理即可得到在整体坐标系中的一般单元刚度矩阵 (1-21) 式, 即

$$K^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l}C_x^2 + \frac{12EI}{l^3}C_y^2 & & & & & \\ (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})C_xC_y & (\frac{EA}{l}C_y^2 + \frac{12EI}{l^3}C_x^2) & & & & \\ -\frac{6EI}{l^2}C_y & \frac{6EI}{l^2}C_x & \frac{4EI}{l} & & & \\ -(\frac{EA}{l}C_x^2 + \frac{12EI}{l^3}C_y^2) & -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})C_xC_y & \frac{6EI}{l^2}C_y & (\frac{EA}{l}C_x^2 + \frac{12EI}{l^3}C_y^2) & & \\ -(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})C_xC_y & -(\frac{EA}{l}C_y^2 + \frac{12EI}{l^3}C_x^2) & -\frac{6EI}{l^2}C_x & (\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3})C_xC_y & (\frac{EA}{l}C_y^2 + \frac{12EI}{l^3}C_x^2) & \\ -\frac{6EI}{l^2}C_y & \frac{6EI}{l^2}C_x & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}C_y & -\frac{6EI}{l^2}C_x & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad \text{对 称} \quad (1-21)$$

它既包含剪切弯曲变形, 又考虑了轴向变形的影响。值得注意的是, (1-21) 式所示的单元刚度矩阵  $\bar{K}^{(i)}$  是今后最常用到的, 它的特点是  $6 \times 6$  阶对称方阵。

为了表示简洁起见, (1-21) 式也可按杆端  $JK$  编号, 写成分块矩阵形式

$$\bar{K}^{(i)} = \bar{K}_{JK}^{(i)} = \begin{pmatrix} \bar{K}_{JJ} & \bar{K}_{JK} \\ \bar{K}_{KJ} & \bar{K}_{KK} \end{pmatrix}, \quad (1-22)$$

其中每一个子阵  $\bar{K}_{JJ}, \bar{K}_{JK}, \bar{K}_{KJ}, \bar{K}_{KK}$  都是  $3 \times 3$  阶。

## 4. 结构的结点荷载列阵

在利用有限元法对结构进行力学的分析过程中, 重要的一步是把一个连续的结构看成是由各离散单元在结点处连接拼装而成。而把作用在结构上的荷载统统用作用在结点上的等效结点力代替。这里的“等效”是指静力等效。具体地说, 是指变形前后的效果, 不应该由于采用了等效力代替而变化。当然, 在这里还应该假设是在小变形的线性范围之内, 因为在这种情况下, 不考虑由于加荷载的先后顺序对最后变形产生的影响。

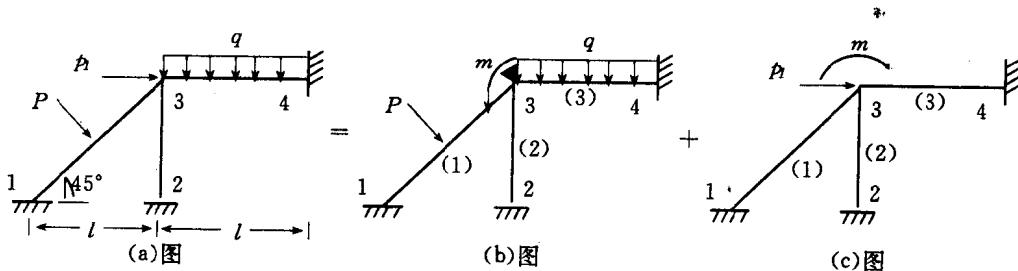


图 1-12