报考硕士研究生

概率论和数理统计初步应试强化辅导

朱燕堂　周小莉　编

西北工业大学出版社

报考硕士研究生

概率论和数理统计初步

应试强化辅导

朱燕堂　周小莉　编

西北工业大学出版社
1996年7月　西安

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书是根据国家教委颁发的全国工学、经济学硕士研究生入学考试的数学考试大纲中对概率论（或还包含数理统计初步）的要求而写的，每个方面的内容分为基本概念和公式摘要、例题、习题及习题解答三个部分。其中例题是参照近几年来考题类型以及大纲所要求的基本内容、计算技能而选择的较为典型的题目，读者再通过习题的练习达到进一步巩固、提高，以期通过短期的强化复习，较快地达到考分提高的目的。本书还把历届研究生入学概率论试题列出供分析参考。

本书可作为报考工学、经济学硕士研究生考前辅导班的教材或考生自己复习的参考资料，也可作为工科、财经、医药、农林、体育等院校所开设的概率统计课程的教学参考书。

报考硕士研究生
概率论和数理统计初步应试强化辅导
朱燕堂　周小莉　编
责任编辑　王俊轩
*

（西安市友谊西路 127 号　邮编 710072）
全国各地新华书店经销
陕西省富平县印刷厂印装
ISBN 7-5612-0897-9/O·124
*
开本 850×1 168 毫米 1/32　6.625 印张　167 千字
1996 年 7 月第 1 版　1996 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—10 000 册　定价：7.50 元

前　言

近年来研究生入学考试时，工学部分中的数学（一），经济学部分中的数学（四）、数学（五）均有概率论试题。为了帮助考生较快地复习、巩固概率论（数学（四）还含有数理统计初步）的基本概念及其计算技能，我们据多年来国家教委颁发的全国工学，经济学硕士研究生入学考试的数学考试大纲中对概率论（或还包含数理统计初步）的要求以及多年来对报考研究生的考生进行考前复习辅导的情况编写了这本辅导材料。

据大纲对概率论中每个方面的要求，本书内容分为基本概念与公式摘要、例题、习题及习题解答三个部分。其中例题是参照近几年来考题类型以及大纲所要求的基本内容和计算技能而选择的较为典型的题目，然后读者再通过习题的练习，达到进一步巩固、提高，以期通过短时期的强化复习之后，较快地达到考分提高的目的。因此阅读本书的读者应该是已学过概率论（或还包含数理统计初步）。至于工科、财经、医药、农林体育等院校所开设的概率统计课程，本书也可作为教学参考书。

本次修订，修改了原版的错误，增补了一些习题，以及两个独立随机变量的简单函数的分布，特别还补充了1994、1995、1996三个年度的考试题及其精解。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点和错误，敬请读者批评指正。

编　者

1996年4月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

一、基本概念与公式摘要

1. 随机事件的概念

(1) 随机试验

概率论中把满足下列三个条件的试验称为随机试验，简称为试验：(i) 允许在相同的条件下重复地进行；(ii) 每次试验结果不一定相同，(iii) 试验之前不知道会出现哪种结果。

(2) 基本事件(样本点)

随机试验中，每一个可能出现的结果，称为基本事件(或称样本点)。

(3) 基本事件空间(或称样本空间)

把所有可能的试验结果(所有基本事件)的全体所构成的集合叫做基本空间或称样本空间，记为 U。

(4) 随机事件(简称事件)

基本空间的子集，即由某些试验结果所组成的集合，称为随机事件，简称事件。记为 $A, B, \cdots$ 等。

(5) 必然事件，不可能事件

在随机试验中，每次试验必然发生的事件，叫必然事件。必然不会发生的事件，叫不可能事件。必然事件用 U 表示，不可能事件用 V 表示。

(6) 包含

事件 A 中的每一个样本点 ω 都是事件 B 中的样本点，即若 $\omega \in A$，就有 $\omega \in B$，则称 B 包含 A，记作 $A \subset B$，或 $B \supset A$，即若 A 发生必然导致 B 发生。

(7) 相等

若 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$。

(8) 和

事件 A 和事件 B 至少有一个发生的事件，这一事件称为事件 A 与事件 B 的和，记作 $A \cup B$。

(9) 积(或称交)

事件 A 和事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的积(也称为 A 与 B 的交)。记为 $A \cap B$(也可记作 AB)。

至于多个事件的和与积的定义，类似于两个事件的和与积的定义，此处从略。

(10) 互斥(互不相容)

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 A,B 的积事件为不可能事件，则称 A,B 为互斥事件(或称为互不相容事件)。记为 $AB = V$。

n 个事件两两互斥，则称这 n 个事件互斥。在 A,B,C 互斥时，可将 $A \cup B \cup C$ 记为 $A + B + C$。

(11) 对立(互逆)

如果两事件 A,B 同时满足关系式：$A \cup B = U, AB = V$(即 A,B 中必发生其一，但 A 与 B 不能同时发生)，则称 A,B 两事件对立或称两事件互逆。并称 A 是 B 的逆事件(或对立事件)，或称 B 是 A 的逆事件(或对立事件)。把 A 的逆事件记作 $\overline{A}$。

(12) 差

事件 A 发生而事件 B 不发生这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A - B$。

2. 一些常用的事件间的关系式

(1) $A \cup B = B \cup A, AB = BA$,(交换律)

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,(结合律)

$(AB)C = A(BC)$

(3) $(A \cup B)C = AC \cup BC$,(分配律)

$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$(对偶律)

$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_K} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_K, \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_K} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k$

(5) $V \subset A \subset U$

(6) 若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B, AB = A$

(7) $A + V = A, A + U = U, AV = V, AU = A$

(8) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B, A \supset AB, B \supset AB$

(9) $A \cup B = A + (B - AB) = B + (A - B)$

$= B + A\overline{B} = A + B\overline{A}$

$= A\overline{B} + \overline{A}B + AB$

(10) $\overline{A} = U - A, \overline{\overline{A}} = A, A - B = A\overline{B}$

3. 概率的概念

对于一个随机事件 A 发生的可能性的大小,用一个数 $P(A)$ 来表示,这个数通常就称为随机事件 A 发生的概率,简称为事件 A 的概率。

(1) 概率的统计定义

在一个随机试验中,如果事件 A 出现的频率 m/n 随着试验次数 n 的增大,它在区间[0,1]上的某个常数 p 附近摆动,那末定义事件 A 的概率为

$$P(A) = p$$

概率的这种定义，称为概率的统计定义。

(2) 概率的古典定义

在古典概型下，设试验的所有可能结果为 n 个，即有 n 个基本事件，而事件 A 包含有其中的 m 个试验结果，即 A 中有 m 个基本事件，于是定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

概率的这种定义，称为概率的古典定义。

(3) 概率的几何定义

如果试验的所有可能结果为无限多个，每个试验结果出现的可能性相等，古典定义就不适用，这时借助于几何上的度量(比如面积)来合理地规定的概率，称为概率的几何定义。

设有一可度量的区域 G(这个区域可以是直线区域，也可以是平面区域或空间区域)，向域内任意投一点，此点落于 G 内任一位置是等可能的，且所投点落在 G 中任意区域 g 内的可能性大小与 g 的度量成正比，而与 g 的位置和形状无关，则称这个随机试验为几何概率型。若有利于事件 A 的 G 中的部分区域为 g，则

$$P(A) = \frac{g\text{ 的几何度量}}{G\text{ 的几何度量}}$$

(4) 概率的公理化定义

设 A 为随机事件，$P(A)$ 为定义在所有随机事件组成的集合上的实函数且满足下列三条公理：

公理 1　对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

公理 2　$P(U) = 1$

公理 3　对于两两互斥的可数多个随机事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

这个定义称为概率的公理化定义。

4. 概率的基本性质

性质 1 不可能事件的概率为 0，即 $P(V)=0$

性质 2 设有限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，那末

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 3 设 A 为任一随机事件，那末

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 4 设 A,B 为两个事件，且 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论 1 若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$

性质 5 对任意两个随机事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推论 2 以任意两个事件 A,B 有

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

一般地，对于三个事件 A_1,A_2,A_3 有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

更一般地，对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_iA_j)+\sum_{i\neq j\neq k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

5. 条件概率，概率的乘法公式

设 A,B 为两个随机事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率（或称A对B的条件概率）。

由上述等式可得

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \qquad P(B) > 0$$

这个公式称为概率的乘法公式

两个事件概率的乘法公式，也可写为：

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

对于三个事件A,B,C有

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

对于n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

6. 相互独立事件

若A,B满足 $P(AB) = P(A)P(B)$

则称A,B是统计独立的，简称独立，或称A,B相互独立。

若A,B独立，则$P(B|A) = P(B)$，$P(A|B) = P(A)$。

若A,B独立，则$\overline{A}$与B；A与$\overline{B}$；$\overline{A}$与$\overline{B}$均相互独立。

对于三个事件A,B,C，若下列三个等式同时成立

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$

则称三事件A,B,C两两相互独立。

对于三个事件A,B,C若下列四个等式同时成立

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A,B,C 为相互独立的事件。

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对于所有可能的组合 $1\leqslant i<j<k\cdots\leqslant n$ 成立着

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$
$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$
$$\cdots$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

7. 全概率公式与贝叶斯公式

(1) 全概率公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$，$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

(2) 贝叶斯公式

若事件 B 能只能与有限个两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 之一同时出现，即

$B=\sum\limits_{i=1}^{n}BA_i$ 且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$P(B)>0$，那末

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}\quad i=1,2,\cdots,n$$

8. 贝努里(Bernoulli)概型

设每次试验的结果只有 A 与 $\overline{A}$ 两个，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=q=1-p$ 时，做 n 次重覆独立试验，称为贝努里概型。n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(K)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\quad k=0,1,\cdots,n$$

由于 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$ 恰好是 $[(1-p)+p]^n$ 按二项公式展开时的各项，所以上述公式又称为二项概率公式。

二、例　题

1. 事件的运算及关系

例1　化简下列各式

(i) $A \cup B - A$;

(ii) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$;

(iii) $(A \cup B)(B \cup C)$

(iv) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$

解　(i) $A \cup B - A = (A \cup B) - A = (A \cup B)\overline{A}$

$$= A\overline{A} \cup B\overline{A}$$

$$= V \cup B\overline{A} = B\overline{A} = B - A$$

(ii) $(A \cup B)(A \cup \overline{B}) = A \cup A\overline{B} \cup BA \cup B\overline{B}$

$$= A \cup (A\overline{B} \cup BA) \cup B\overline{B}$$

$$= A \cup A(\overline{B} \cup B) \cup V$$

$$= A \cup A \cup V = A$$

(iii) $(A \cup B)(B \cup C) = AB \cup AC \cup B \cup BC$

$$= B \cup AC(\because AB \cup BC \subset B)$$

(iv) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) = A(\overline{A} \cup B)$

$$= A\overline{A} \cup AB$$

$$= V \cup AB = AB$$

例2　设 A、B、C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来。

(i) A 发生，B、C 不发生；

(ii) A、B 都发生，而 C 不发生；

(iii) 所有三个事件都发生；

(iv) 三个事件中至少一个发生；

(v) 三个事件中至少两个发生；

(vi) 三个事件都不发生；

(vii) 不多于一个事件发生；

(viii) 不多于两个事件发生；

(ix) 恰有一个事件发生。

解 (i) $A\overline{B}\overline{C}$ (ii) $AB\overline{C}$ (iii) ABC

(iv) $A \cup B \cup C$ (v) $AB \cup BC \cup CA$

(vi) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(vii) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$，

或$\overline{AB \cup BC \cup CA}$

(viii) $\overline{ABC}$，或$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$
$+ AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$

(ix) $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$

例 3 设 A,B 为事件，问下列各事件表示什么意思？

(i) $\overline{A} \cup \overline{B}$； (ii) $\overline{A}B$； (iii) $\overline{A}\,\overline{B}$

解 (i) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB}$ 表示 A,B 不都发生。

(ii) $\overline{A}B = (U - A)B = B - AB$ 表示 B 发生，而 AB 不发生。

(iii) $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示 A,B 都不发生。

例 4 若 $A = B$，则 A、B 同时发生或 A、B 同时不发生。

证明 若 $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A \Rightarrow A,B$ 之中任一个发生必导致另一个发生，即 A、B 同时发生；又由 $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} \supset \overline{B}$ 且 $\overline{A} \subset \overline{B}$，同理 $\overline{A},\overline{B}$ 同时发生

例 5 设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 互斥，试证其中任意 k 个事件互斥（$2 \leqslant k \leqslant n$）。

证明 由定义知，n 个事件互斥当且仅当两两互斥，故由

$A_1, A_2, \cdots A_n$ 互斥 $\Leftrightarrow$ 两两互斥 $\Rightarrow$ 其中 k 个事件两两互斥 $\Leftrightarrow$ 这 k 个事件互斥。

例 6 设 A, B 是事件，那末：事件"A, B 都发生"，"A, B 不都发生"，"A, B 都不发生"中，哪两个是对立事件。

解 "A, B 都发生" $= AB$

"A, B 不都发生" $= \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

"A, B 都不发生" $= \overline{A}\ \overline{B}$

由于 AB 若要与 $\overline{A}\ \overline{B}$ 是对立事件，由定义应有 $AB = \overline{\overline{A}\ \overline{B}}$，但 $\overline{\overline{A}\ \overline{B}} = A \cup B \neq AB$，所以，"$A, B$ 都发生"与"A, B 都不发生"不是对立事件。而 $AB = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{AB}}$。所以"$AB$ 都发生"与"A, B 不都发生"是对立事件。

由本题可知，只有否定词"不"加于肯定词"都"的前面，才构成对立事件。

类似地，对于事件："颜色全同"，"颜色不全同"，"颜色全不同"中，哪两个是对立事件就容易判断了。

例 7 试判断事件"A, B 至少发生一个"与"A, B 最多发生一个"是否是对立事件。

解 $\{A, B$ 至少发生一个$\} = A \cup B$

$$= A\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

$\{A, B$ 最多发生一个$\} = A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}\ \overline{B}$

由于 $\overline{\{A, B \text{ 至少发生一个}\}} = \overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B} \neq A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}\ \overline{B}$ $=$ "A, B 最多发生一个"。

所以，两者不是对立事件。

2. 概率的计算

(1) 用古典定义、几何定义计算概率：

计算古典型中事件 A 的概率，许多具体实际问题可以大致归并为三类，它们具有典型的意义：

（Ⅰ）抽球问题；（Ⅱ）分房问题；（Ⅲ）随机取数问题。

由于这类问题较复杂，而且主要是排列组合的应用，概率的概念很简单，但古典型中概率的计算又是基本的。所以对于一些较简单又典型的例子还是应该掌握的。因此，我们选择一些简单的例子加以解释和练习，供巩固复习，提高之用。

至于几何型中事件 A 的概率主要是注意所谓点的“均匀分布”（它实际上是广泛意义下的等可能性）是相对于什么随机试验而言，否则就可能得出错误的结论，常见的几何型中的事件的概率有：约会问题，蒲丰（Bouffon）问题，三折线构成三角形问题等。这些类型的题通过例题和习题表示出来供参考。

例8 有 r 个球，随机地放在 n 个盒子中，$(r\leqslant n)$，试求下列各事件的概率：

$A_1 =$“某指定的 r 个盒中各有一球”

$A_2 =$“恰有 r 个盒，其中各有一球”

$A_3 =$“某指定的一个盒子，恰有 k 个球”

解 (1) r 个球放入 n 个盒子里的方法共有 n^r 种。而 r 个球在指定的 r 个盒中各放一个，共有 $r!$ 种放法。所以

$$P(A_1) = \frac{r!}{n^r}$$

(2) 由于在 n 个盒中选出 r 个盒的选法共有 C_n^r 个，而对于每一种选法选出的 r 个盒，其中各放一个球的放法有 $r!$ 种，所以 A_2 包含的基本事件数为 $C_n^r \cdot r!$，因此

$$P(A_2) = \frac{C_n^r \cdot r!}{n^r}$$

(3) 由于在 r 个球中选出 k 个球的选法有 C_r^k 种，而其余的 $r-k$ 个球可任意地放在 $n-1$ 个盒子中，这种放法有 $(n-1)^{r-k}$ 种，所以 A_3 包含的基本事件数是 $C_r^k(n-1)^{r-k}$，因此

$$P(A_3) = \frac{C_r^k(n-1)^{r-k}}{n^r}$$

例 9 把长度为 a 的线段在任意二点折断为三线段，求它们可以构成一个三角形的概率。

解 取此线段为数轴，折断点的坐标为 x,y，则必有 $0<x<a$，$0<y<a$，这相当于 xy 平面中的点 (x,y) 落于边长为 a 的正方形中。故所有基本事件可以用此正方形之面积来表示(见图 1)。

若三线段能构成三角形，则要求其中任一线段之长小于其余二线长度之和，也就是说三段中，每段长都不能超过 $\frac{a}{2}$。

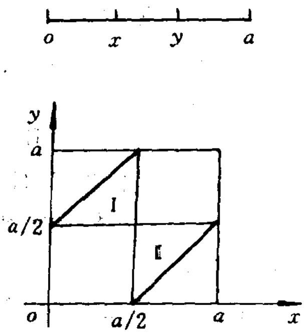

图 1

先设 $|y-x|<\frac{a}{2}$，此时 $x-\frac{a}{2}<y<x+\frac{a}{2}$。即点 (x,y) 落于 $y=x+\frac{a}{2}$ 与 $y=x-\frac{a}{2}$ 二直线之间的带形区域内。

以上讨论的 $|y-x|<\frac{a}{2}$ 是线段中间一段之长不超过 $\frac{a}{2}$ 的结果。再考虑线段两端的长不超过 $\frac{a}{2}$ 的情形，这又可分为两种情况：

(i) $x<\frac{a}{2}, y>\frac{a}{2}$　此时点 (x,y) 落于图中区域(Ⅰ)

(ii) $y<\frac{a}{2}, x>\frac{a}{2}$　此时点 (x,y) 落于图中区域(Ⅱ)

因此，有利的基本事件可以用区域(Ⅰ)，(Ⅱ)的面积来表示，故得

$$p=\frac{\text{区域 Ⅰ，Ⅱ 之面积的和}}{\text{正方形之面积}}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}=\frac{1}{4}$$