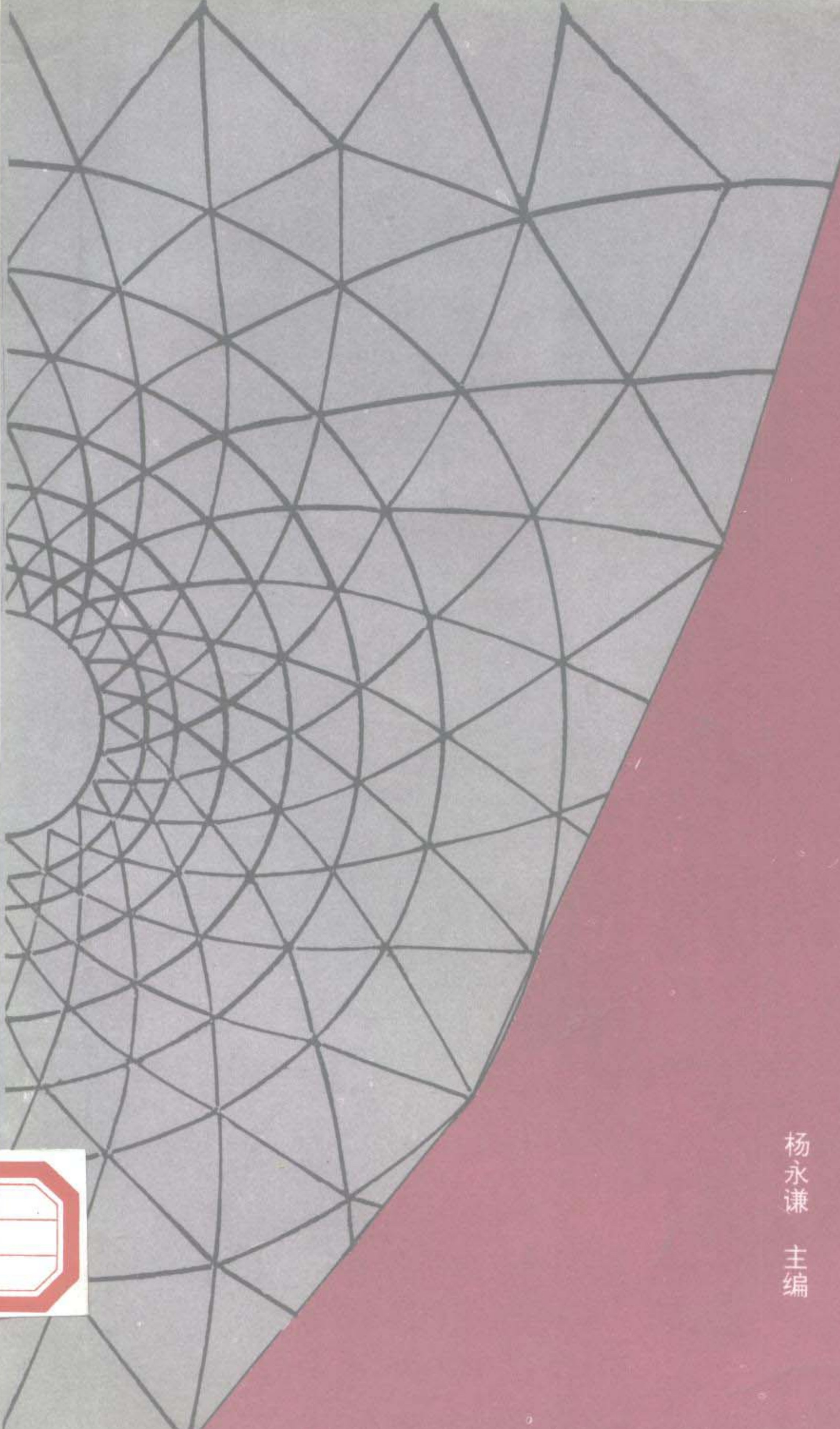

有限元法及其在结构分析中的应用

杨永谦 主编

有限元法及其在结构分析中的应用

大 社

有限元法

及其在结构分析中的应用

YOUXIANYUANFA JIQI ZAI JIEGOU FENXI ZHONG DE YINGYONG

杨永谦　主编

大连海运学院出版社

(辽)新登字 11 号

内 容 简 介

本书主要叙述有限元法的基本原理及在结构分析中的应用。从变分原理出发，对有限元法的实质、解题框架以及各类单元族的形函数作了简明介绍，并讨论了空间杆元、梁元、二维等参元、8～21 可变节点等参元、板壳元及三种特殊单元的功能和原理。对于理解 SAP5 程序有一定帮助。此外，还介绍了有限元模型化问题和子结构方法，给出许多在船体结构计算中应用的实例。

本书为高等学校船舶与海洋工程类有关专业的教材，亦可供从事结构计算及设计的工程技术人员参考。

有限元法及其在结构分析中的应用
杨永谦　主编
金在律　主审

大连海运学院出版社出版
大连海运学院出版社发行
大连海运学院出版社印刷厂印装

开本:787×1092　1/16　印张:12.5　字数:312 千
1992 年 6 月第 1 版　1992 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑:杨万柏　　封面设计:王　艳

印数:0001～1500　　定价:3.05 元
ISBN7-5632-0357-5/O・14

前　言

有限元法是一种离散化的数值计算方法，以电子计算机为手段，可以计算各种复杂的工程结构，是工程技术人员从事研究、计算和工程设计的有力工具。在高等学校中，有限元法已成为必修课程。本教材已在船舶与海洋工程专业使用多次，现经修改后编成此书。在有限元法基础部分中，从变分原理出发，通过微分方程边值问题对有限元法的实质和解题框架作了深入浅出的叙述，力求物理概念清楚，避免数学上的抽象。对于各类单元族及其形函数，特别是等参元作了较系统的介绍。可以很方便地推广应用于结构以外的其它工程问题中。在应用部分中，介绍了目前国内外广泛使用的大型结构分析程序 **SAP**5 的单元库中的主要单元，包括空间杆元、梁元、二维元、8～21 可变节点等参元、板壳元以及三种特殊单元（弹簧元、伪单元和读入元），并讨论了组合结构计算的特殊问题。因此，本书对理解与使用 **SAP**5 程序有一定帮助。此外还讨论了有限元模型化问题和子结构方法，并给出许多船体结构计算实例。有“＊”号的内容可供选讲或学生自学之用。本书附录提供了一些基础知识，可供不熟悉这方面内容的读者参考。

因为有限元法的应用并不限于船体结构，各种工程结构都能适用，这是本书没有取名“船舶结构有限元分析”的原因。

经中国船舶工业总公司船舶工程教材委员会审定，本书可作为船舶与海洋工程类有关专业本科生教材及其它专业教学参考书。本书第二篇应用部分中的每一章有相对独立性，可根据教学时数和需要选择讲授而不会影响学生的学习。

本书第五章和第八章由陈映秋编写，其余各章由杨永谦编写并统稿全书。经大连理工大学金在律教授和武汉水运工程学院夏炳仁副教授审阅。他们对本书初稿提出了宝贵意见，在此表示感谢。

由于编者水平有限，错误和缺点在所难免，请读者批评指正。

编　者

1989 年 9 月

于武汉水运工程学院

目　录

附 录

绪　论

1. *有限元法的发展*

有限元离散化的思想早在40年代就已经提出，但到50年代中期才从结构矩阵分析扩展应用于连续弹性体。1956年美国波音飞机公司 *Turner* 等人进行后掠翼结构分析时，首次采用三角形单元进行平面应力分析。随着有限元法的发展，人们逐渐搞清了有限元法与变分法的关系，能够自觉地应用各种变分原理建立多种形式的有限元模型。例如，由最小势能原理导出位移法有限元模型；由最小余能原理导出力法；由 Hellinger-Reissner 变分原理导出混合法；由修正的余能原理得到杂交法有限元模型等等。各种结构单元，如直杆元、曲杆元、梁元、平面元、三维块元、板元、夹层板元、复合材料板元以及等参元等纷纷出现。

60年代后期，数学家从数学上给出了收敛性的证明和误差估计，70年代初又证明了非协调元的收敛性，使有限元法建立在坚实的理论基础上。已经公认，有限元法是处理力学、物理以及工程问题的有效工具。这期间大量的有限元通用程序也得到迅速发展并广泛被应用。有限元法活跃在各个工程领域中，其原因是，它能对各种工程问题进行求解，具有计算精度高、使用灵活的特点，而电子计算机的普遍应用是其发展的物质基础。

70年代以来，有限元法仍有巨大发展，但研究的重点逐渐转移。主要表现在：从静力分析扩展到动力和稳定性；从线弹性问题扩展到材料和几何非线性问题；从确定性分析到可靠性分析(随机有限元)；从固体力学扩展到流体、电磁场、原子反应堆热应力、地质力学、生物力学…等领域；从变分有限元扩展到加权残量法、能量平衡法有限元。

应当指出，有限元法也有很大的局限性，当单元数目很多时，数据的准备工作量和计算机时的花费都是十分惊人的。尽管人们在前、后处理上已经作出了很大成绩，但仍然不能从根本上改变这种高昂的花费。因此近年来又发展了各种半解析的数值方法，如有限条法、边界元法、各种加权残数法以及有限元与其它方法的耦合等。

2. *有限元法在船体分析中的应用*

有限元法的出现使传统的船舶结构力学方法发生了根本变革。过去手算方法不能解决的问题，用有限元法迎刃而解，并且能进行整体结构分析，从而改变了传统的把总强度与局部强度分开来孤立地进行计算的概念。

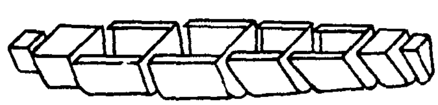

图 1

目前在船舶与海洋工程结构分析中，有限元法已占主导地位。应力分析由最初简单的杆系结构、板的平面与弯曲问题发展到空间组合结构，立体舱段和整船分析。用有限元法进行整船解析时，由于规模太大，代价昂贵，应用上受到限制。对于大开口船舶，目前国内外普遍采用薄壁梁理论进行整体弯扭分析，将船体分成若干阶梯形分段(图1)，采用一维有限元法或迁移矩阵法进行计算，也称有限梁法(Finite Beam Method)，它们的基础仍然是有限元法。

有限元法在船舶与海洋工程上的应用总的情况是：由静力分析到动力分析；由线性到非线性、疲劳、断裂分析；由确定性分析到可靠性分析；由强度校核到结构优化设计等，正在向综合性的船舶结构分析与设计系统发展，如图2所示，其中结构分析步骤采用有限元法计算。

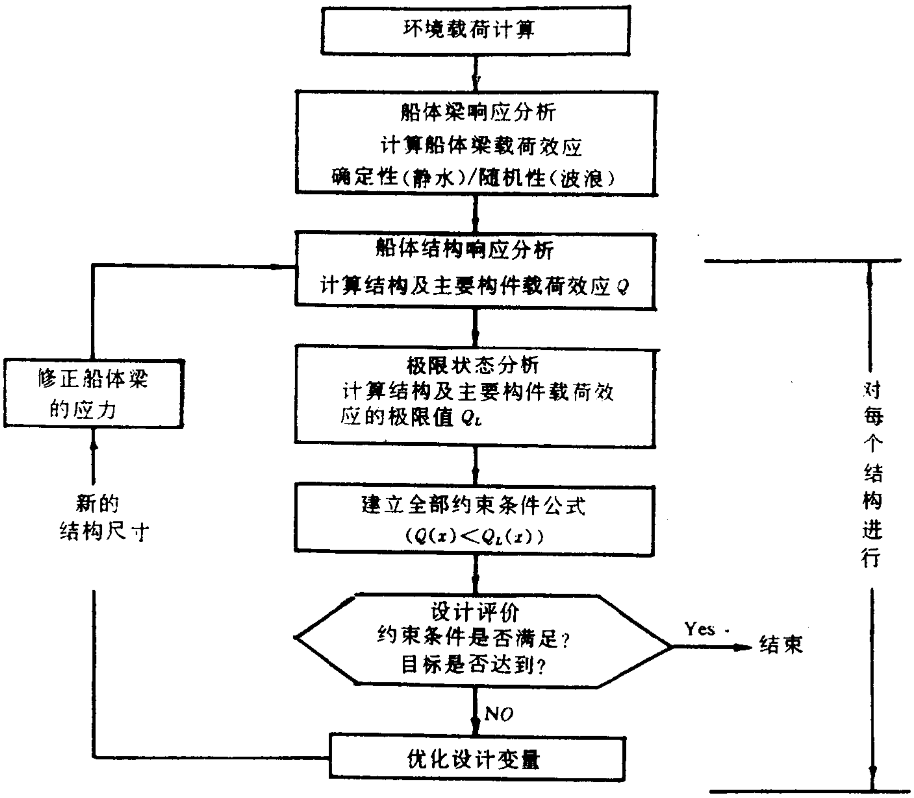

图 2

3. 有限元法的解题过程及实质

有限元法采取离散、单元分析、总体组集和代数求解等基本步骤。

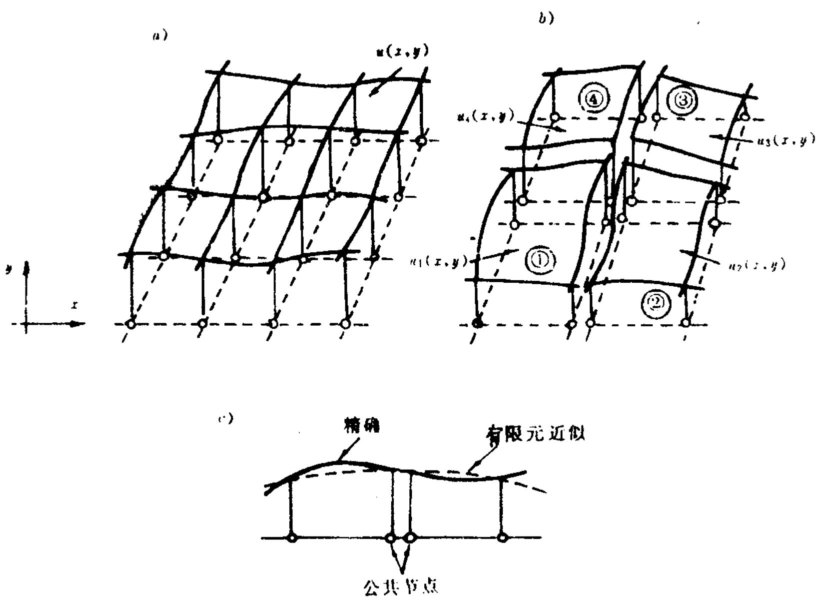

图 3

把物体用有限个节点和单元划分成离散体。这些单元彼此在节点处连接，其集合体就代表原来的物体。选取简单函数近似表示单元的场函数(如位移分布)，见图 3。然后建立每个单元的有关公式，将它们在离散点处结合起来，得到整个物体的平衡方程。求解之，便可得到有限个点上的场函数值，即原来物体的近似解答。这一方法包括了整体离散为单元和单元再组集成整体的过程，物理上直观，易于接受。从数学上来说，该方法是把整个求解域上的连续函数变成分片连续，然后应用变分法建立方程，它兼备了变分法的优点和差分法的灵活性，是变分法的一种离散化的数值解法。由于大量的数值计算是人工难以胜任的，必须应用电子计算机来实现。

第一篇　有限元法基础

本篇首先通过微分方程边值问题的有限元法解题原理说明有限元法的实质与解题步骤。然后介绍各类单元及其形函数，这是有限元法的关键部分。最后介绍结构分析有限元法统一列式和整体分析，包括总刚组集、边界约束处理方法、静力求解及有限元程序结构等，使读者对有限元法形成一个完整概念，为学习第二篇有限元法的应用打好基础。

第一章　微分方程边值问题的有限元法

§1-1　二阶常微分方程

我们通过一个简单的二阶常微分方程的有限元法求解过程来说明有限元法的实质和解题框架。

考虑一根长为 L，一端固定的等断面均匀弹性杆，它在自重和另一端的拉力 P 的作用下处于平衡状态。试求解杆的变形和应力分布。

设杆的弹性模量为 E，截面积为 A，重度为 γ，杆的位移为 $u(x)$（图 1-1）。

我们从此杆的微分方程出发，但并不直接求解微分方程，而是把它化为等价的变分方程，即虚功方程，然后进行离散化，得到节点位移满足的代数方程组。这个离散化的途径虽然对这个具体问题可能比较迂回，但它包含了有限元法解题的基本框架，可以用来处理各种微分方程边值问题，且可以容易地推广到弹性力学及其它物理问题。

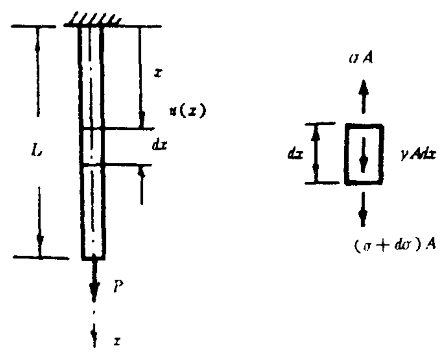

图　1

取微段建立此杆的微分方程。

平衡条件　$(\sigma+d\sigma)A+\gamma Adx-\sigma A=0$

由此得　$\dfrac{d(\sigma A)}{dx}=-\gamma A$

几何条件　$\varepsilon=\dfrac{du}{dx}$

物理条件　$\sigma=E\varepsilon=Eu'(x)$

代入平衡方程得杆的微分方程：

$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)=\gamma A \tag{1-1}$$

在杆两端应满足边界条件：

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \quad u(o) = 0 \\ x &= L \quad \sigma(L) = \frac{P}{A} \text{ 或 } Eu'(L) = \frac{P}{A} \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

这里，在 $x=0$ 处给定的是位移边界条件，在变分法（包括有限元法）中称为“强加边界条件”；在 $x=L$ 处给定的是应力边界条件，在变分法中称为“自然边界条件”。必须注意，在有限元法中对这两种边界条件的处理是完全不同的。

现在我们把微分方程(1-1)式和自然边界条件化成等价的变分方程。做法如下：用一个满足强加边界条件的连续可微函数 $\delta u(x)$ 乘(1-1)式两边，并在区间[0,L]上积分：

$$-\int_0^L \frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right]\delta u(x)dx = \int_0^L \gamma A\delta u(x)dx$$

将该式左边分部积分一次，并注意到自然边界条件 $Eu'(L)A=P$ 和强加边界条件 $\delta u(0)=0$，得

$$\int_0^L EAu'(x)\delta u'(x)dx - \int_0^L \gamma A\delta u(x)dx - P\delta u(L) = 0 \tag{1-3}$$

此式即为微分方程(1-1)式及其自然边界条件的等价变分方程。其力学意义是明显的：第一项代表内力在虚应变($\varepsilon^* = \delta u'(x)$)上所作虚功；第二项与第三项为外力所做外虚功的负值。所以(1-3)式就是虚功方程。

根据变分原理，由上述变分方程 $\delta\Pi=0$ 可求得相应的泛函 Π。因为 $u'\delta u' = \frac{1}{2}\delta(u')^2$，(1-3)式可写成

$$\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^L EA(u')^2dx - \int_0^L \gamma Audx - Pu(L)\right] = 0$$

所以
$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EA(u')^2dx - \int_0^L \gamma Audx - Pu(L) \tag{1-4}$$

讨论：

(1)微分方程边值问题(1-1)至(1-2)式与变分方程(1-3)式是等价的。但它们对解的光滑性要求不同，边值问题(1-1)至(1-2)式的解 $u(x)$ 要求在区间[0,L]内二阶连续可微，而变分方程(1-3)式的解 $u(x)$ 属于一次可微函数。前者称为古典解，后者称为广义解。确定这种广义解的变分方程正是有限元法的出发点。

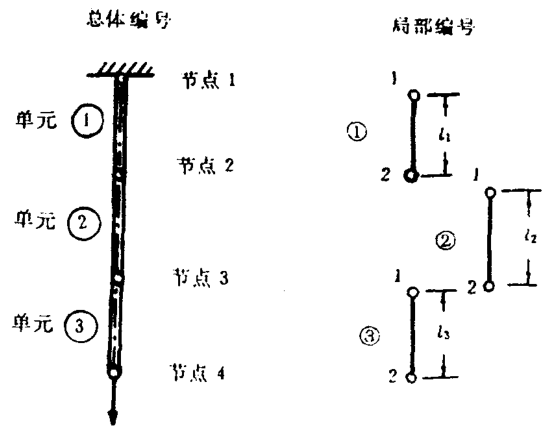

图 1-2

(2)从变分方程(1-3)式出发，求解边值问题(1-1)至(1-2)式的方法通常称为变分近似解法(Ritz 法)。在变分法中，位移边界条件需强加给未知函数，所以称为强加边界条件。而自然边界条件无需强加，它直接出现在变分方程中，只要函数适合变分方程，它自然满足，所以称为自然边界条件。

(3)用离散方法选取分段连续函数，即离散化的变分方程解法就是有限元方法。

上述把微分方程化为变分方程的方法是一般的。

下面我们用有限元法求解变分方程(1-3)式。有限元法在算法上采取离散、单元分析、总体组集和代数求解等基本步骤。

1. 连续区间离散化——单元剖分

把区间[0,L]分割成n段,每一段称为一个单元。例如$n=3$,整个区间用4个节点分成3个单元(图1-2)。

2. 选取插值函数(位移模式)

在每个单元内,根据插值法将连续的场函数(或称位移模式)$u(x)$用节点函数值(也可包括微商值)表示它的近似解。

取典型单元e。我们采用线性插值函数写出它的表达式为:

$$u(x)=N_1(x)u_1+N_2(x)u_2 \tag{1-5}$$

式中 $N_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$; $N_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

称为形函数(见图2-3)。用矩阵表示为:$u(x)=N\delta^e$ (1-6)

式中 $N=[N_1(x) \quad N_2(x)]$ 形函数矩阵;

$\delta^e=[u_1 \quad u_2]^T$ 节点函数(位移)列阵。

3. 计算单元泛函Π^e,求出单元刚度矩阵K^e及单元载荷列阵Q^e*

把泛函写成离散形式,总泛函为:

$$\Pi=\sum_{e=1}^{n}\Pi^e \quad (n\text{ 为单元数目}) \tag{1-7}$$

典型单元e的泛函为:

$$\Pi^e=\frac{1}{2}\int_{l_i}EAu'^2(x)dx-\int_{l_i}\gamma Au(x)dx-pu(L) \tag{1-8}$$

式中l_i为单元长度。最后一项仅对最后一个单元才存在。将(1-6)式及$u'(x)=N'(x)\delta^e$代入(1-8)式,得:

$$\Pi^e=\frac{1}{2}\delta^{eT}\int_{l_i}N'(x)TEAN'(x)dx\delta^e-\delta^{eT}\int_{l_i}\gamma AN^T(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\delta^{eT}K^e\delta^e-\delta^{eT}Q^e \tag{1-9}$$

式中 $$K^e=\int_{l_i}N'(x)^TEAN'(x)dx=\int_{l_i}EA\begin{bmatrix}N'_1N'_1 & N'_1N'_2\\ N'_2N'_1 & N'_2N'_2\end{bmatrix}dx \tag{1-10}$$

写成 $$K^e=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$$

$$Q^e=\int_{l_i}\gamma AN^T(x)dx=\int_{l_i}\gamma A\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\end{Bmatrix}dx \tag{1-11}$$

写成 $$Q^e=\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{Bmatrix}$$

K^e称为单刚;Q^e称为单荷,纯系借用结构力学矩阵法中的术语,对于一般的微分方程没有物理意义。

在最后一个单元上的单荷为:

* 注:以后K^e简称单刚;Q^e简称单荷。

$$Q^e_n = \int_{l_n} A\gamma N^T(x)dx + N^T(L)P \tag{1-12}$$

如果将函数的表达式(1-5)代入以上诸式进行积分，并注意到 $x_2 - x_1 = l_i$，则得单刚、单荷显式：

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_i} & -\frac{EA}{l_i} \\ -\frac{EA}{l_i} & \frac{EA}{l_i} \end{bmatrix} \qquad Q^e = \begin{Bmatrix} A\gamma l_i/2 \\ A\gamma l_i/2 \end{Bmatrix}$$

及

$$Q^e_n = \begin{Bmatrix} A\gamma l_n/2 \\ A\gamma l_n/2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

4. 计算总泛函 Π，建立总刚度方程

由(1-7)式知，总泛函为各单元泛函之总和。为进行矩阵相加必须将每个单元的 δ^e、Q^e 及 K^e 分别按节点自由度(本例为 $n+1$ 个)扩大。这样，所有单元具有了统一格式才能叠加。令

$$\delta = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{Bmatrix}_{\text{总体编号}} \qquad Q^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q_i \\ Q_{i+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{n+1}$$

$$K^e = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & k_{i,i} & k_{i,i+1} & \cdots \\ \cdots & k_{i+1,i} & k_{i+1,i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{ 行} \\ i+1\text{ 行} \\ (n+1)\times(n+1) \end{matrix} \\ i\text{ 列} \quad i+1\text{ 列} \end{array}$$

K^e 中除上述 4 个元素外，其它都为 0。

将(1－9)式代入总泛函公式(1-7)中，得：

$$\Pi = \sum_{e=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta^{eT}K^e\delta^e - \delta^{eT}Q^e) = \frac{1}{2}\delta^T(\sum_{e=1}^{n}K^e)\delta - \delta^T\sum_{e=1}^{n}Q^e = \frac{1}{2}\delta^T K\delta - \delta^T Q \tag{1-13}$$

式中：$K = \sum_{e=1}^{n} K^e$—称为总刚度矩阵(简称总刚)；

$Q = \sum_{e=1}^{n} Q^e$—称为总载荷列阵(简称总荷)。

由泛函极值条件 $\delta\Pi = 0$，可得总刚度方程：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = K\delta - Q = 0$$

所以 $K\delta = Q$ (1-14)

引入强加边界条件(给定的节点位移值)对总刚度方程进行修正(称为约束处理)，得：

$$K^* \delta = Q^* \tag{1-15}$$

经过约束处理后，物理上，排除了刚体运动；数学上，使修正后的总刚 K^* 变为正定，因此线性方程组(1-15)的解必唯一存在。

5. 求解线性方程组(1-15)，得到全部节点的函数值。本例为节点位移 u_1,u_2,u_3,u_4。

6. 求单元应力

本例，单元 i 的应力为：

$$\sigma_i = E\frac{u_{i+1}-u_i}{l_i}$$

节点 x_i 处的应力可由相邻两单元 i 与 $i-1$ 应力的加权算术平均得到

$$\sigma(x_i) = \frac{l_{i-1}\sigma_{i-1}+l_i\sigma_i}{l_{i-1}+l_i}$$

由上例可以看出，有限元法的关键是选取场函数，并由泛函表达式得出单刚、单荷。以后的步骤，如总刚组集、约束处理以及代数求解，对各类问题都是相同的。因此，如果在有限元程序中有一个多种类型单元的单元库，就能方便地求解各种力学和物理问题。

§1-2 高阶常微分方程

我们通过梁的弯曲问题来说明。在[0,L]区间，梁的弯曲微分方程为四阶常微分方程，其方程式为：

$$EI\frac{d^4W(x)}{dx^4} = q(x) \tag{1-16}$$

式中：$W(x)$—挠度；$q(x)$—横荷重。

边界条件：强加边界条件为给定的位移，如铰支座 $W=0$；自然边界条件为给定的力，如铰支座不受集中力矩作用，$EI\frac{d^2W}{dx^2}=0$ 或 $\frac{d^2W}{dx^2}=0$。若在铰支座处受集中力矩 m 作用，则 $\frac{d^2W}{dx^2}=m/EI$。

微分方程(1-16)式及其边界条件的等价泛函，即梁的总势能为(见附录 I-22)式)：

$$\Pi = \int_0^L\left[\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)^2 - q(x)W\right]dx \tag{1-17}$$

现从(1-17)式出发用有限元法求解：

1. 离散化——将梁用 n 个节点划分成($n-1$)个单元，如图 1-3 所示，图中节点数为 5，单元数为 4。

梁单元有 4 个节点自由度$[W_1\ W'_1\ W_2\ W'_2]^T$。在有限元法中为了统一格式，将节点自由度按约定的次序排列为 $\delta^e=[\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4]^T=[W_1\ W'_1\ W_2\ W'_2]^T$。

2. 选取场函数(位移模式)

取一个典型单元 e。现在我们用多项式作为近似场函数，也称为

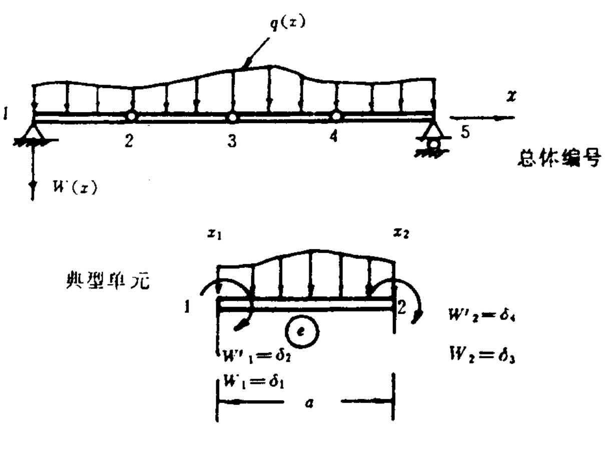

图 1-3

广义坐标法。前节中我们曾用插值函数作为近似场函数。这是两种表达位移函数的方法，在有

限元法中都被广泛应用。下面会看到、广义坐标法可以化为插值函数形式。

梁元的近似场函数应取为三次多项式：

$$W(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3 \tag{1-18}$$

写成矩阵形式：

$$W(x)=[1\ x\ x^2\ x^3]\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{Bmatrix}=G\alpha \tag{1-19}$$

根据 $W(x_1)=\delta_1, W'(x_1)=\delta_2, W(x_2)=\delta_3, W'(x_2)=\delta_4$ 可以得到：

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=a_1+a_2x_1+a_3x_1^2+a_4x_1^3\\\delta_2&=a_2+2a_3x_1+3a_4x_1^2\\\delta_3&=a_1+a_2x_2+a_3x_2^2+a_4x_2^3\\\delta_4&=a_2+2a_3x_2+3a_4x_2^2\end{aligned}\right\}$$

用矩阵表示：

$$\delta^e=A\alpha \tag{1-20}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}1&x_1&x_1^2&x_1^3\\0&1&2x_1&3x_1^2\\1&x_2&x_2^2&x_2^3\\0&1&2x_2&3x_2^2\end{bmatrix}$$

由(1-20)式可求得 $\alpha=A^{-1}\delta^e$，回代到(1-19)式中，得：

$$W(x)=GA^{-1}\delta^e=N\delta^e \tag{1-21}$$

式中 $N=GA^{-1}$，由广义坐标转换得到的形函数。注意到 $x_2-x_1=a$(单元长度)，可求得：

$$A^{-1}=\frac{1}{a^3}\begin{bmatrix}a^3&0&0&0\\0&a^3&0&0\\-3a&-2a^2&3a&-a\\2&a&-2&a\end{bmatrix}$$

所以 $N=GA^{-1}=[N_1(x)\ N_2(x)\ N_3(x)\ N_4(x)]$

其中

$$\left.\begin{aligned}N_1(x)&=1-3\frac{x^2}{a^2}+2\frac{x^3}{a^3} & N_2(x)&=x-2\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}\\N_3(x)&=3\frac{x^2}{a^2}-2\frac{x^3}{a^3} & N_4(x)&=-\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}\end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

该形函数相当于刚性固定梁的四种单位弯曲变形状态(图 1-4)。(1-22)式称为一阶埃米特(Hermite)插值函数，它具有如下性质：

$$\left.\begin{aligned}&N_1(0)=1, && N_1'(0)=0, && N_1(a)=0, && N_1'(a)=0\\&N_2(0)=0, && N_2'(0)=1, && N_2(a)=0, && N_2'(a)=0\\&N_3(0)=0, && N_3'(0)=0, && N_3(a)=1, && N_3'(a)=0\\&N_4(0)=0, && N_4'(0)=0, && N_4(a)=0, && N_4'(a)=1\end{aligned}\right\} \tag{1-23}$$

3. 计算单元泛函 Π^e，求出单刚 K^e 及单荷 Q^e

由(1-17)式，单元泛函为：

$$\Pi^e = \int_0^a \frac{1}{2}EI(\frac{d^2W}{dx^2})^2dx - \int_0^a q(x)Wdx \qquad (1\text{-}24)$$

将 $W(x)=N\delta^e$ 及 $W''(x)=N''\delta^e$ 代入上式得：

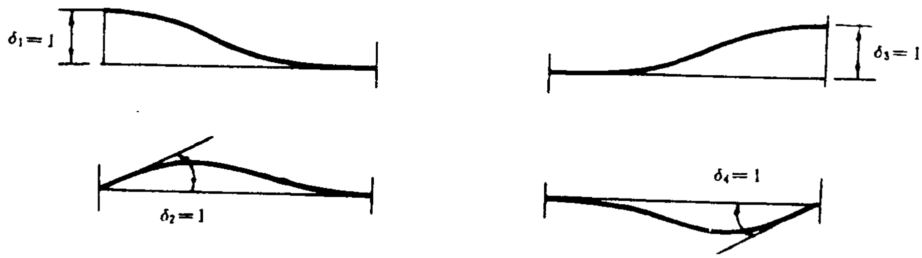

图 1-4

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\delta^{eT}\int_0^a EIN''^TN''dx\delta^e - \delta^{eT}\int_0^a q(x)N^Tdx$$

$$= \frac{1}{2}\delta^{eT}K^e\delta^e - \delta^{eT}Q^e$$

由此得单刚、单荷为：

$$K^e = \int_0^a EIN''^TN''dx = \int_0^a EI\begin{Bmatrix} N''_1 \\ N''_2 \\ N''_3 \\ N''_4 \end{Bmatrix}[N''_1\ N''_2\ N''_3\ N''_4]dx = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}25)$$

式中 $k_{ij} = \int_0^a EIN''_iN''_jdx \qquad (i,j=1,2,3,4)$

$$Q^e = \int_0^a q(x)N^Tdx = \int_0^a q(x)\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}dx = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \qquad (1\text{-}26)$$

式中 $Q_i = \int_0^a q(x)N_idx \qquad (i=1,2,3,4)$

将 N_i 及 N''_i 代入(1-25)和(1-26)式可求得单刚及单荷各元素。例如当 $EI=\text{Const}$ 时，

$$k_{11} = \int_0^a EIN''_1N''_1dx = \int_0^a EI(-\frac{6}{a^2}+\frac{12x}{a^3})^2dx = \frac{12EI}{a^3}$$

等等，得：

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ & \frac{4EI}{a} & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ \text{对} & & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ & \text{称} & & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}27)$$

若 $q(x)=q=\text{Const}$，得：

$$Q^e = q[\frac{a}{2}\quad \frac{a^2}{12}\quad \frac{a}{2}\quad -\frac{a^2}{12}]^T \qquad (1\text{-}28)$$

由(1-27)及(1-28)式可见，与结构力学方法所得结果是一致的。