高等学校教学用书

控制论引论

卢志恒

北京师范大学出版社

（京）新登字 160 号

图书在版编目（CIP）数据

控制论引论/卢志恒著．—北京：北京师范大学出版社，1994.8

高等学校教学用书

ISBN 7－303－03315－7

Ⅰ．控…　Ⅱ．卢…　Ⅲ．控制论　Ⅳ．0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（94）第 11091 号

北京师范大学出版社出版发行

（100875　北京新街口外大街 19 号）

北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本：850×1168　1/32　印张：11.25　字数：274 千

1994 年 5 月北京第 1 版　　1994 年 8 月北京第 1 次印刷

印数：1—1 500 册

定价：8.40 元

内容简介

本书从状态空间和状态方程出发，将经典控制理论和现代控制理论有机地结合在一起，简要而系统地阐述了控制论的基本原理．全书共分六章：控制系统概论，反馈控制理论，最优控制理论，非线性系统，离散系统和随机系统．书中着重介绍基本概念和基本理论，并兼顾控制论在工程控制和管理科学中的典型应用．

本书结构简明，物理思想清晰，具有较好的可读性．可以作为理工科有关专业高年级学生和研究生的教材或参考书，也可作为具有高等数学基础的广大科技工作者、经济工作者和管理人员学习控制理论的自学书籍．

前　　言

本书是在北京师范大学系统理论专业本科和管理专业研究生《控制论》课程多年讲义基础上写成的. 它侧重于阐述现代控制理论的基本原理，对于经典的伺服控制原理作了较多的删节，但其最基本的内容仍然保留. 一方面，这部分内容不是现代控制理论可以代替的；另一方面，它又能促进读者尽快建立起"自动控制"的概念. 本书的特点之一是将经典控制理论在现代控制理论框架中，从状态方程出发演绎出来，从而使两者有机地结合成一个整体.

全书共分六章：控制系统概论；反馈控制理论；最优控制理论；非线性系统；离散系统和随机系统. 书中适当借鉴理论物理建立体系的模式，注意阐述控制系统的泛动力学过程，同时又兼顾控制理论在工程控制、社会经济和生命过程的典型应用. 在文字叙述上，注意到可读性. 对于较专门的数学知识，书中作了补充.

面对着具有良好的数学物理学基础而又甚至缺乏自动控制基本常识的学生，如何开设一门控制理论课程是一项探索性的工作. 作者在成书过程中得到了同事们和学生们的鼓励和帮助，借此谨表谢意.

作　者

1991 年冬于北京

目　录

绪　论

控制论，就其本来的意义，是为解决自动控制的工程设计的数学问题发展起来的. 因此它和自动控制技术的发展紧密相关.

早期的控制技术大多应用反馈机制解决定值调节或者自动跟踪一类问题，比如：动力机械的转速控制，热力化工系统的温度、压力控制，船舶与飞机的导航，火炮与雷达的跟踪和控制等等. 机电仪表是实现这类控制的主要技术手段. 自上世纪离心调速器在蒸汽机中的应用开始至第二次世界大战期间，控制技术有了不小进步. 不过从理论上看，还只能解决一些比较简单的问题. 这一时期发展起来的控制理论不对控制系统的内部状态作具体的研究，而只从控制系统的外部联系上去把握系统的行为. 系统的描写采用所谓"黑箱模型". 这样的理论体系被后人称为"经典控制论".

由于电子管、晶体管和电子计算技术的发明和发展，特别是在航天事业的推动下，需要研究解决的和能够研究解决的自动控制问题越来越复杂，于是出现了最优控制理论、随机控制理论、非线性系统控制理论和自适应控制理论等等. 这一时期发展起来的这些理论统称为"现代控制论"，它以引入状态变量和状态空间来描写控制系统为标志.

早在本世纪 40 年代，人们就认识到：控制理论不仅能够解决自动控制的工程设计问题，而且还可以用来描写生命过程和经济发展这类"信息的传递"起着重要作用的领域. 尽管这一时期物理科学的发展非常瞩目，不仅成功地解决了自身研究领域中的各类基本问题，并且，由于广泛的推广应用，建立起从宇观、宏观到微观的各种各样的边缘学科，诸如天体物理学、地球物理学、生物物理

学和量子化学理论等等,同时还不断地派生出新的工程技术分支.但是,控制论所建立起来的信息传递与控制理论并没有被物理学轻易地“统一”起来.维纳(N. Wiener)所出版的著名著作《控制论》(“Cybernetics”)着重论述了控制理论的基本特征.这些特征是区别于基它学科,特别是区别于物理学的.这本书主要论及了控制论在理论体系上的独立性.

事实上,长期以来控制论只是被当成一门技术理论或者应用数学,很少探讨它和其他科学,特别是物理学之间的联系.实际的情况是:一方面控制理论在不断借鉴物理学的概念和方法的过程中得到了发展.例如最优控制理论首先是借鉴了分析力学中的拉格朗日——哈密顿理论,然后才走上自身发展的道路.再如现代控制论中的状态变量和状态空间的概念正是统计物理中状态变量和相空间概念的合理推广.人们都把维纳作为控制论的奠基人,但很少有人提起,正是经典电磁场理论的创始人麦克斯韦(J. Maxwell)引入了反馈的概念成功地阐明了蒸汽机调速器的数学理论,从而开创了经典控制理论.另一方面,近代物理学的发展也从控制理论中吸取了养分,例如近代光学的重要分支——《信息光学》,正是物理学家和控制理论工作者在本世纪60年代合作创立的,近代非平衡态统计物理的一些非常活跃的分支,如耗散结构和协同学等也从控制理论中吸收了重要思想,产生了诸如“时间之矢”的概念、伺服原理、绝热消去法以及线性响应理论等等.在研究脑科学、人工智能、生命过程以及社会经济这些当代科学的重大课题时,物理学家、控制论学者和其他学科的科学工作者又“默默地”工作在一起.从自然哲学角度来看,《控制论》和《物理学》这两门学科既互相排斥又互相联系.它们的相消相长、相反相成正在交织出当代科学的交叉发展过程中的一幅辩证图景.

本书试图在这样一种学科交叉发展的背景下引导读者掌握控制理论的最基本的内容.

第一章　控制系统概论

本章着重介绍描述控制系统的数学方法. 从建立状态方程出发推导出传递函数，把经典控制理论和现代控制理论统一起来. 简要回顾了矩阵运算和拉普拉斯变换. 并应用这些数学方法对线性系统状态方程的一般解法作了研究. 最后讨论了系统的可控制性和可观测性.

§1　控制系统

一、基本概念

控制系统是人类的一种有意图的操作对象. 控制论着眼于研究某种有意图的作用对控制系统的行为造成的影响. 例如我们要控制一个化学反应器的温度，就要在仪表上设定温度信号，研究实际温度对设定信号的响应过程；如果我们要制导一个飞船，就要研究在无线电发送的信号制导下飞船的行为；一个教师在课堂上讲课，要研究学生接受了多少，考试成绩怎样；一个政府部门推行某项政策，要研究政策的社会效果，等等. 在这里，化学反应器、宇宙飞船、教学班、社会都被看作控制系统. 一方面它按受控制信号，如温度设定值、制导讯号、授课和政策等等，称为系统的**输入量**，简称**输入**；另一方面它又对这些控制信息作出反应，如反应器的实际温度值，飞船的空间方位和飞行方向，教学效果和政策的社会效果等等，称为**输出量**，简称**输出**，有时也把输出量称为响应.

不同的控制系统，输入量及输出量的数目是不同的. 反应器的温度控制，只有一个输入量和一个输出量；飞船的飞行行为，如果

不考虑转动，有三个平动自由度，输出至少有三个. 教学活动和社会活动，情形要复杂一些. 具有一个输入量和一个输出量的系统称为**单输入单输出系统**，这种系统是经典控制理论长期以来的研究对象.

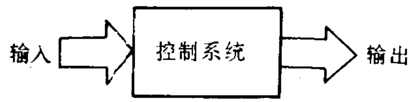

图 1-1　控制系统

控制对象的实际过程常常要比控制参数所反映的复杂得多. 比如化学反应器，不只是有温度的变化，而且内部进行着复杂的化学反应，飞船行进过程不只是向目标的飞行，还有发动机的燃烧，载荷内部的运动和变化等等；教学过程和社会活动是人的行为，更加复杂. 为了实现某种控制，我们不可能也不必要事先全面地详尽地掌握系统的行为，而只是需要建立同控制目的相关的数学物理模型来表示. 如果这个模型在数学上可用线性方程来表示. 就称为**线性系统**，否则就称为**非线性系统**.

已经说过，控制对象的实际过程常常是很复杂的. 如一个化学反应器，当要研究温度控制时，我们把它当作温度控制系统. 实际发生的过程还有压力、流量、产额的变化等等. 我们也可以把它当作压力控制系统，化学反应的最优产额控制系统等等. 控制目的不同，输入输出变量不同，数学模型也不同，这就是我们提出注意的控制系统在概念上的相对性.

一个控制系统，特别是工程控制系统内部发生的过程常常是物理过程. 如果施加于系统的输入量和系统作用于外界的输出量都是它们本身意义下的物理量(不是代表其他量的信息)，那么整个控制过程也可能就是一种纯粹的物理过程. 这类系统既可看作控制系统也可看作物理系统，控制系统和物理系统在含义上容许存在这种交迭，使得一些纯粹物理过程可以当作探讨控制理论的例子，特别是使已经成熟的物理学的理论框架可以作为控制理论

发展过程中的一种借鉴.

二、系统的描写

经典的伺服理论通常只研究系统的输出和输入的相互关系,并不涉及系统内部的状态.这种数学模型把系统内部看成一个人们并不了解的黑箱,称为**黑箱模型**,如图 1-2.

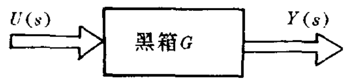

图 1-2 黑箱模型

对于比较复杂的系统,输入和输出常常通过系统内部的某些特征量相互联系.能够完整描写系统内部状态的独立变量称为**状态变量**.状态变量的选择不是唯一的,可以通过一定的关系互相转换.

图 1-3 系统的状态

图 1-3 表示一个多输入多输出系统.在此图上,输入端(左端)表示输入变量的集合,输出端(右端)表示输出变量的集合,状态变量的集合包含在系统的内部,一般通过输出变量作用于系统的外部,把这些变量的集合用向量来表示时,数学的处理将比较方便.设输入变量、输出变量和状态变量的集合中,各自的变量数分别为 l、m、n.则输入变量的集合可用输入向量 $\boldsymbol{u}$ 表示(小写黑体字母表示向量,下同):

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_l\end{bmatrix} \tag{1.1}$$

输出变量的集合可用输出向量 $\boldsymbol{y}$ 表示:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

状态变量的集合可用状态向量 $\boldsymbol{x}$ 表示：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

这些变量一般随时间而变化. 所以 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{x}$ 是时间的函数. 在所有时刻 t 中，输入向量 $\boldsymbol{u}$ 的一切可能取值的集合构成了输入向量空间. 同样，在所有时刻 t 中，输出向量 $\boldsymbol{y}$ 和状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的一切可能取值的集合构成了输出向量空间和状态向量空间.

§2 状态方程

控制的状态方程可以参照物理过程的状态方程来建立. 为此先介绍力学系统的状态方程.

一、力学系统的状态方程

对于最简单的力学系统——质点，通常用坐标 x 和动量 p 来描写系统的状态. 由于动量的定义为

$$p = m\dot{x} \tag{2.1}$$

质点运动所满足动力学方程为

$$m\ddot{x} = f(x,t) \tag{2.2}$$

根据式(2.1)和(2.2)描写质点运动的状态变量 x 和 p 应满足方程组：

$$
\begin{cases} \dot{x} = p/m \\ \dot{p} = f(x,t) \end{cases} \tag{2.3}
$$

对于一般的力学系统，假定还受有某种约束，只要系统所受的作用力是有势的，就可以写出相应的哈密顿函数 $\boldsymbol{H}(p,q,t)$. 这时描写系统的状态变量为广义坐标 q_i 和广义动量 p_i，它们满足哈密顿正则方程：

$$
\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial q_i} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.4}
$$

这是有势力场中的力学系统的状态方程.

由于哈密顿理论对经典物理学各分支都能适用，因此，式(2.4)也适合于电磁学、热力学等领域.

在最一般意义下，系统所受的力不一定是有势力. 这样的系统可以引入广义动能 $\boldsymbol{T}(p,q,t)$ 和广义力 $\boldsymbol{Q}_i(p,t)$ 对应于式(2.4)应为：

$$
\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial q_i} + \boldsymbol{Q}_i \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.5}
$$

二、控制系统的状态方程

赫兹的工作表明，形如式(2.4)的正则方程，作某种变换，可使广义坐标变为广义动量，而原来的广义动量则处于广义坐标的位置，因此就最一般意义而言，描写系统状态的两种变量，即广义坐标和广义动量之间没有严格的区分. 在控制理论中用同一个符号 x_i 来表示.

为了兼容最一般力学系统，控制理论将状态方程写成如下形

式：

$$\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.6}$$

来表示.式中 $\boldsymbol{x}$ 表示所有状态变量的集合$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.这是一个向量.$\boldsymbol{u}$ 为外界对系统的作用的集合$(u_i,u_2,\cdots u_n)$.对广义力学系统而言，这是广义力.对于控制系统，这是控制变量或称输入变量.$\boldsymbol{u}$ 也是向量.

式(2.6)给出了描述控制系统状态方程的理论框架.显然，不管是方程(2.5)的第一式的广义坐标方程还是第二式的广义动量方程都能和它相容.更简单的方程(2.3)和(2.4)自然也与它符合.

根据§1 中输入向量、输出向量和状态向量的定义，即式(1.1)—(1.3)，由 n 个方程构成的方程组式(2.6)可写成向量形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{2.7}$$

上式就是通常意义下的控制系统的**状态方程**.每个具体的控制系统，上式右边有相应的具体的函数形式.

系统的状态变量决定于系统的内部过程.这些变量不一定直接作用于外界而能够被观测.为了实现某种控制意图，有时也一定需要直接观测这些量.一般地说控制系统的输出(被观测量)和状态变量有某种函数关系，写作

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{2.8}$$

为一般起见，$\boldsymbol{g}$ 也包含控制变量 $\boldsymbol{u}$.

将式(2.7)和(2.8)联立在一起，并用大写字母表示右边的向量函数关系，有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) & (2.9) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) & (2.10) \end{cases}$$

式(2.9)称为控制系统的状态方程，式(2.10)称为输出方程.两者联合起来称为系统的控制方程组.

三、线性控制系统的状态方程

如果式(2.9)和(2.10)右边可以表示为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数,即

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) & (2.11) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) & (2.12) \end{cases}$$

则由这样的方程所描写的控制系统称为线性系统,方程中 $\boldsymbol{x}(t)$,$\boldsymbol{u}(t)$,$\boldsymbol{y}(t)$ 分别为 n,l,m 维向量;$\boldsymbol{A}(t)$称为$(n\times n)$**系统矩阵**(系数矩阵),$\boldsymbol{B}(t)$称为$(n\times l)$**控制矩阵**(驱动矩阵),$\boldsymbol{C}(t)$称为$(m\times n)$**输出矩阵**.$\boldsymbol{D}(t)$称为$(m\times l)$**传递矩阵**.

一般地说,系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$,$\boldsymbol{B}(t)$,$\boldsymbol{C}(t)$,$\boldsymbol{D}(t)$是时间的函数.这样的线性系统称为**线性时变系统**

如果系统矩阵是不随时间而变化的,状态方程和输出方程可以写成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) & (2.13) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) & (2.14) \end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是常数矩阵.这样的系统通常称为**线性定常系统**.$\boldsymbol{D}$ 表示输入和输出之间的直接联系.在普通控制系统中 $\boldsymbol{D}=0$,式(2.14)变为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{2.15}$$

可见系统的状态变量决定系统的输出.$\boldsymbol{n}$ 维状态向量的一切可能取值所构成的向量空间称为状态空间.系统的状态的每一时刻 $\boldsymbol{t}$ 对应于状态空间的一个点.它的具体取值是一阶微分方程组(2.13)的解.

状态变量决定之后,再通过式(2.14)或者(2.15)就可决定输出变量.因此,给定了输入,就可通过式(2.13)与(2.14)决定输出.式(2.13)与(2.14)一起描述了一个线性控制系统.对单输入单输出的经典控制论的系统,输出和输入的关系是通过一个高阶微分方程来表示的.数学上也可以用一个一阶微分方程组来表示.这说明经典控制论的问题同样可以用现代控制论的状态方程来描述,

显示了状态空间法的一般性. 下面举例说明.

〔例题 1〕试求出用三阶微分方程

$$a\dddot{x}(t)+b\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)=u(t)$$

表示的系统的状态方程.

〔解〕首先选择状态变量 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$为

$$x_1(t)=x(t)$$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{x}(t)$$

$$x_3(t)=\dot{x}_2(t)=\ddot{x}(t)$$

代入了这样的状态变量后可将原来的方程改写成

$$a\dot{x}_3(t)+bx_3(t)+cx_2(t)+dx_1(t)=u(t)$$

经过整理,可变成下面的样子:

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t)=-\frac{d}{a}x_1(t)-\frac{c}{a}x_2(t)-\frac{b}{a}x_3(t)+\frac{u(t)}{a}$$

把上面的三个式子用向量的形式表示时,就成为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{d}{a} & -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{1}{a}\end{bmatrix}u(t)$$

这就是说,状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{d}{a} & -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{1}{a}\end{bmatrix}$$

〔例 2〕试求出图 2-1 所示 *LRC* 串联电路的状态方程和输出方

程.

〔解〕电路的电流和电压间有下面的关系式

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t=ei(t)$$

现在把这个电气回路当作一个系统来研究.令输入变量为 $e_i(t)$，输出变量为 $e_c(t)$．并选择状态变量为 $q(t)=\int i(t)\mathrm{d}t$ 和 $i(t)$．采用以前的符号:输入变量 $u(t)$、输出变量 $y(t)$ 以及状态变量分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，即

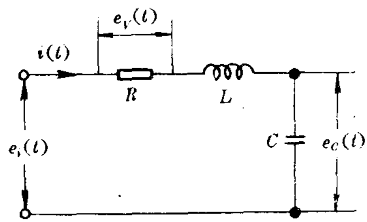

图 2-1　LRC 串联回路

$$u(t)=e_i(t)$$
$$y(t)=e_c(t)$$
$$x_1(t)=q(t)=\int i(t)\mathrm{d}t$$
$$x_2(t)=\dot{q}(t)=i(t)$$

可得到下面的式子

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-\frac{1}{LC}x_1(t)-\frac{R}{L}x_2(t)+\frac{1}{L}u(t)$$
$$y(t)=\frac{1}{C}x_1(t)$$

用向量来表示这些关系时，有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u(t)$$