单片机模糊控制系统设计与应用实例

谢宋和 甘勇 等编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL:http://www.phei.com.cn

单片机模糊控制系统设计与应用实例

谢宋和　甘　勇　等编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书是作者多年来从事计算机控制技术，特别是单片机应用系统的教学、科研工作经验的总结，同时也是近年来在模糊控制应用技术开发中所取得的部分成果。全书本着理论和实践相结合的原则，在保证其理论的完整性基础上，更加强调其实用性。按照先易后难、由浅入深、具体应用实例三个层次，首先简要介绍了模糊控制技术的理论基础，然后重点介绍了当前流行的 Motorola 系列单片机和 Toshiba 系列单片机及其在工程和家用电器模糊控制中的应用实例，详细叙述了模糊控制应用系统的硬件设计和软件设计方法。

本书的最大特点是资料新颖、技术先进且具有较强的实用性、可移植性。特别适合从事单片机应用技术和模糊控制技术的工程技术人员使用，也可做为电子技术、计算机控制技术、自动化及仪表类的教师和学生的参考书，对家用电器领域的维修人员也大有裨益。

图书在版编目(CIP)数据
单片机模糊控制系统设计与应用实例/谢宋和，甘勇等编．- 北京：电子工业出版社，1999.7
ISBN 7-5053-5452-3
Ⅰ．单… Ⅱ．①谢… ②甘… Ⅲ．单片微型计算机 - 模糊系统：控制系统 Ⅳ．TP368.1
中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17068 号

书　　名：单片机模糊控制系统设计与应用实例
编　　者：谢宋和　甘　勇　等
责任编辑：周晓燕
排版制作：电子工业出版社计算机排版室
印 刷 者：
装 订 者：北京李史山胶印厂
出版发行：电子工业出版社　URL：http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092　1/16　印张：19　字数：480 千字
版　　次：1999 年 7 月第 1 版　1999 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-5452-3 / TP·2748
印　　数：3000 册　定价：38.00 元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺页、倒页、脱页、所附磁盘或光盘有问题者，请向购买书店调换。
若书店售缺，请与本社发行部联系调换。电话　68279077

前　　言

单片机应用技术和模糊控制技术是当前信息科学中具有较强实用性的两个重要分支。本书作者将多年来从事单片机应用技术的教学、科研工作所积累的经验，以及近年来完成国家、省部级科研项目所取得的部分成果做一简单的总结和归纳，在借鉴其他同仁的有关成果基础上，编写了此书，以飨广大科研开发和工程技术人员。

本书的编写原则是力求深入浅出、层次分明，不过分追求理论的系统性，而重点强调其实用性。本书特别适合从事单片机应用技术和模糊控制技术的工程技术人员使用，也可做为电子技术、计算机控制技术、自动化及仪表类的教师和学生的教学参考书，同时对家用电器领域的维修人员也大有裨益。

按照先易后难、由浅入深以及重在应用的原则，全书共分为模糊控制技术基础、Motorola 单片机及其模糊控制应用系统设计、Toshiba 单片机及其在家用电器模糊控制中的应用三方面，共七章。第一章简单地介绍了模糊控制的数学基础，其中的重点是隶属函数和模糊推理方法。第二章比较精炼地介绍了模糊控制理论基础，重点是模糊控制算法的单片机实现以及模糊控制器的设计方法。第三章介绍了目前最先进的单片机模糊控制系统的开发手段。第四章比较清晰地总结了 M68HC05 单片机的结构原理和功能，重点在于应用系统的开发方法和过程。第五章给出了 Motorola 系列单片机的三个模糊控制系统设计实例，内容详细且实用。第六章介绍了近年来开始流行的 Toshiba 单片机最新技术资料，内容新颖，有较强的实用性。第七章详细地介绍了 Toshiba 单片机在当前比较风行的家用电器模糊控制中的应用，内容具体，具有较强的借鉴作用。

全书由谢宋和与甘勇负责策划，编制提纲和统稿。具体内容的编写分工依次是：谢宋和编写第一章、第五章的第 1 节以及第六章；甘勇编写第四章和第五章的第 2 节；邓璐娟编写第二章；纪莲清编写第三章；郑安平编写第五章的第 3 节和第七章的第 1 节；李银华编写了第七章的 2、3 节。

在成书过程中，得到了许多同行专家的热情鼓励和具体帮助，在此对他们以及引文作者表示衷心感谢。由于编著者水平有限，难免存在不足之处，敬请广大读者批评指正。

作者

1998 年 12 月

目　　录

第一章　模糊控制的数学基础

在客观世界中，事物的复杂性使人们不可能精确地了解它。事物越复杂，人们对其了解就越不完善，人们对该事物的感知就越模糊。正如模糊理论创始人 L. A. Zadeh 所提出的大系统不相容原理一样，当系统的复杂性增加时，对其精确了解的能力将会下降，且当达到一定的阈值时，复杂性和精确性将互相排斥。

模糊理论是在美国柏克莱加州大学电气工程系 Lotfi. A. Zadeh 教授于 1965 年创立的模糊集合理论的数学基础上发展起来的，主要包括模糊集合理论、模糊逻辑、模糊推理和模糊控制等方面的内容。

L. A. Zadeh 博士在 1965 年发表的《Fuzzy Set》论文中首次提出了表达事物模糊性的重要概念——隶属函数，从而突破了 19 世纪末德国数学家 G. Contor 创立的经典集合理论的局限性。借助于隶属函数就可表达一个模糊概念从"完全不属于"到"完全隶属于"的过渡，才能对所有的模糊概念进行定量表示，奠定了模糊理论的数学基础。这样的话，象"冷"和"热"这些在常规经典集合中无法解决的模糊问题就可在模糊集合中得到有效表达。这就为计算机处理这种语言信息提供了一种可行的方法。

1974 年，L. A. Zadeh 又进行了模糊逻辑推理的研究，从此，模糊理论成了一个热门的课题。建立在模糊逻辑基础上的模糊推理是一种近似推理，可以在所获得的模糊信息前提下进行有效的判断和决策。而基于二值逻辑的演绎推理和归纳推理此时却无能为力，因为它要求前提和命题都是精确的，不能有半点含糊。

1974 年，英国的 E. H. Mamdani 首次用模糊逻辑和模糊推理实现了世界上第一个试验性的蒸汽机控制，并取得了比传统的直接数字控制算法更好的效果。它的成功也标志着人们采用模糊逻辑进行工业控制的开始，从而宣告了模糊控制的问世。第一个有较大进展的商业化的模糊控制器是在丹麦诞生的。1980 年工程师 L. P. Holmblad 和 Ostergard 在水泥窑炉上安装了模糊控制器并获得了成功，这个成果引起了有关学者的极大关注。事实上，模糊逻辑应用最有效并最广泛的领域就是模糊控制，模糊控制在各种领域出人意料地解决了传统的控制理论无法或难以解决的问题，并取得了一些令人信服的成效。

1.1　模糊集合和隶属函数

1.1.1　模糊集合的基本概念

在康托创立的经典集合论中，一事物要么属于某集合，要么不属于某集合，两者的关系必居其一，且只居其一，没有模棱两可的情况。但是，在现实生活中有许多没有明确外延的概念，如描述年龄时常有"青年"、"中年"、"老年"等模糊概念，它们均没有明确的外延。模糊概念不能用经典集合加以描述，这是因为不能绝对区别"属于"或"不属于"，也就是说元素符合概念的程度不是绝对的 0 或 1。

L. A. Zadeh 在 1965 年把普遍集合中的元素对集合的隶属度只能取 0 和 1 这两个值，推广到可以取区间[0,1]中的任意一个数值。即可以用隶属度定量地描述论域 U 中的元素符合概

念的程度，实现了对普通集合中绝对隶属关系的扩充，从而用隶属函数表示模糊集合，用模糊集合表示模糊概念。

定义 1　论域中的模糊子集 A，是以隶属函数

$$\mu_A : U \longrightarrow [0,1]$$

确定论域 U 的一个模糊子集 A。μ_A 称为模糊子集的隶属函数，$\mu_A(u)$称为 u 对 A 的隶属度，它表示论域 U 中的元素 u 属于其模糊子集 A 的程度。它在[0,1]闭区间内可连续取值，隶属度也可简记为 $A(u)$。

定义 2　在给定论域 U 上，对于不同的映射（即不同的隶属函数）可以确定不同的模糊子集。所有这些子集组成的模糊集合的全体，称为 U 的模糊幂集，记为 $F(U)$，即

$$F(U) = \{A \mid \mu_A : U \longrightarrow [0,1]\}$$

1.1.2　模糊集合的表示方法

对于论域 U 上的模糊集合 A，通常采用的表达方式有如下几种。

1. Zadeh 表示方法

当 U 为离散有限域$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$时，按照 Zadeh 表示法，有

$$A = \frac{A(u_1)}{u_1} + \frac{A(u_2)}{u_2} + \cdots + \frac{A(u_n)}{u_n}$$

式中 $A(u_i)/u_i$ 并不代表“分式”，而是表示元素 u_i 对于集合 A 的隶属度 $\mu_A(u_i)$和元素 u_i 本身的对应关系；同时，“+”号也不表示“加法”运算，而是表示在论域 U 上，组成模糊集合 A 的全体元素 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$间排序与整体间的关系。

当 U 是连续有限域时，按 Zadeh 给出的表示方法为

$$A = \int_U \frac{\mu_A(u)}{u}$$

式中“$\int$”积分符号也并不表示“求积分”运算，而是表示连续论域 U 上的元素 u 与隶属度 $\mu_A(u)$一一对应关系的总体集合。

2. 矢量表示法

如果单独地将论域 U 中的元素 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所对应的隶属度值 $\mu_A(u_i)$，由按序写成的矢量形式来表示模糊子集 A，则可以是

$$A = [A(u_1), A(u_2), \cdots, A(u_n)]$$

上式即是矢量表示法。应该注意的是：在矢量表示法中隶属度为 0 的项不能省略，必须依次列写。

3. 序偶表示法

若将论域 U 中的元素 u_i 与其对应的隶属度值 $\mu_A(u_i)$ 组成序偶$\langle u_i, \mu_A(u_i)\rangle$，也可将 A 表示成

$$A = \{\langle u_1, \mu_A(u_1)\rangle, \langle u_2, \mu_A(u_2)\rangle, \cdots, \langle u_n, \mu_A(u_n)\rangle\}$$

4. 函数描述法

根据模糊集合的定义，论域 U 上的模糊子集 A 完全可以由隶属函数 $\mu_A(u)$来表征，而隶属函数 $\mu_A(u_i)$表示元素 u_i 对 A 的从属程度大小。因此和清晰集合中的特征函数表示方法一样，可以用隶属函数曲线来表示一个模糊子集 A。

1.1.3 模糊集合的运算

1. 模糊集合的包含和相等关系

定义 3 设 A、$B\in F(U)$，则

(1) 若 $\forall u\in U$，均有 $A(u)\geqslant B(u)$，则称 A 包含 B，或称 B 是 A 的子集，记作 $A\supseteq B$。

(2) 若 $\forall u\in U$，均有 $A(u)=B(u)$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

2. 模糊集合的并、交、补运算

定义 4 设 A、$B\in F(U)$，则

(1) A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，是指：若 $\forall u\in U$，均有 $(A\cup B)(u)=A(u)\cup B(u)=\max(A(u),B(u))$。

(2) A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，是指：若 $\forall u\in U$，均有 $(A\cap B)(u)=A(u)\cap B(u)=\min(A(u),B(u))$。

(3) A 的补集，记作 A^C，是指：若 $\forall u\in U$，均有 $A^C(u)=1-A(u)$。

这里的 $\vee$、$\wedge$ 称为 Zadeh 算子，它们分别表示 sup 和 inf。在有限元素之间则表示 max 和 min，即取最大值和最小值。

3. 模糊集合运算的基本定律

设 U 为论域，A、B、$C\in F(U)$，则有下列等式成立：

(1) 幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

(3) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) 吸收律 $(A\cup B)\cap A=A$

$(A\cap B)\cup A=A$

(5) 同一律 $A\cup U=U$，$A\cap U=A$

$A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$

(6) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(7) 复原律 $(A^C)^C=A$

(8) 对偶律 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

模糊集合的并、交、补运算基本性质与经典集合的并、交、补运算基本性质的根本区别在于模糊集合并、交、补运算不满足互补律。

1.1.4 隶属函数及其确定方法

模糊集合是通过隶属函数来定义的，正确地确定隶属函数是运用模糊集合理论解决实际问题的基础。隶属函数的确定实质上是人们主观对客观事物概念的外延不分明性(即中介过渡性)的定量描述，这种描述本质上是客观的。但因为每个人对同一模糊概念的认识理解上存在差异，因此又含有一定的主观因素。对于同一个模糊概念，不同的人会建立不完全相同的隶属函数。但只要反映同一模糊概念，尽管形式不同，在解决和处理模糊信息问题中仍然殊途同归，只是有优劣之分。校验隶属函数建立得是否合适的标准是看其是否符合实际。通常是初步确

定粗略的隶属函数，再通过“学习”和“校验”逐步修正完善，达到主观与客观的一致。

1. 确定隶属函数的原则[1]

如上所述，隶属函数是描述具有渐变性事物和现象之“中介过渡性”的关键，因而如何确定隶属函数就是一个关键问题。然而至今还未能找到一种统一的方法，在这种情况下有没有一个确定隶属函数的原则呢？目前看有下述三条必须遵守的原则：

（1）表示隶属函数的模糊集合必须是凸模糊集合

现在通过一个具体例子来说明。以认为主观性最强的专家经验法为例，要确定“舒适”温度的隶属函数，某人可根据他本身的经验表示如下：

$$M = 0.25/0 + 0.5/10 + 1.0/20 + 0.5/30 + 0.25/40$$

这里隶属度为 1 的温度点定的是 20℃，就是说在 20℃左右是“舒适”的温度，越是偏离这个温度其隶属度越小，即舒适的程度越小，这基本上与大多数人的经验是吻合的。如果有人问，为什么 30℃的隶属度是 0.5 而不是 0.45 呢？那也许只能说这是经验。比如，如果你把 40℃的隶属度定为 1 就明显不合理了。如果可以称得上专家的经验，那肯定不是一种具有任意性的经验，通常都是指具有相当成功把握和代表性的经验。根据研究，在一定范围内或一定的条件下，所用语言的语义分析中的模糊概念的隶属度的确具有相当的稳定性，所以根据专家经验确定的隶属函数就有一定的可信度，特别是其最大隶属度中心点或区域的确定。然而从最大值向两边模糊延伸点的隶属度就可能差别较大，例如 30℃的隶属度可能确定为 0.5，也可能是 0.4，甚至可能是 0.6。这从连接各点后经过平滑处理的特征曲线来看，隶属度减小，该曲线就变得尖锐；增大，曲线就平坦。从控制角度看，曲线越平坦，其响应灵敏度和分辨率就越低，但控制平滑性越好；反之亦然。所以这是一种“大处确定，小处含糊”的处理策略。尽管小处可以含糊，但是还必须遵守一条原则，那就是由最大隶属度区域向两边延伸时，其隶属度只能单调递减，而不允许呈波浪形。这实际上是很好理解的，比如把 30℃的隶属度定为 0.5 而把 40℃的隶属度定为 0.6 的话，那就是说，认为 20℃左右是“舒适”温度的情况下，又认为 40℃比 30℃更接近于“舒适”温度，这显然是不合逻辑的。形象地说，这就要求所确定的隶属函数必须呈单峰馒头形，用数学语言说，就是要求是凸模糊集合。

（2）变量所取隶属函数通常是对称和平衡的

在模糊系统中，每个输入变量可有多个标称名(Lables)，即每个语言变量可取多个语言值，这在稍后一些介绍。一般情况下，描述变量的标称名(语言值)安排得越多，即在论域中的隶属函数的密度越大，模糊控制系统的分辨率就越高，其控制响应的结果就越平滑，但同时计算时间也大大增加。如果安排得太少，其响应可能会太不敏感，并可能无法及时提供输出控制跟随小的输入变化，以使系统输出在期望值附近振荡。但也不宜过多，否则可能因小的输入变化值太快地激活不同的规则，而导致模糊系统的不稳定。经实践证明，一般在 3～9 个为宜，并且通常取奇数个，虽然这并不是必要的。在“零”或者“正常”作用集合两边语言值的隶属函数经常取对称和平衡的。这就是第二个原则。这就是说，如果设计了变量“温度”的模糊区域“低”，那么一般就有相应的模糊区域“高”，以及在这两者之间的“适中”或者“正常”。

（3）隶属函数要遵从语意顺序和避免不恰当的重叠

在相同论域上使用的具有语义顺序关系的若干标称的模糊集合，例如“冷”、“凉”、“适中”、“暖”、“热”等模糊子集合，其中心值一定要遵守这个次序排列，不能违背常识和经验。例如把“冷”、“凉”对调一下位置就不合理了。另外由中心值向两边模糊延伸的范围也有限制，间隔的两个模糊集合的隶属函数不能相交重叠，比如“凉”的隶属函数曲线就不能与“暖”的隶属函数

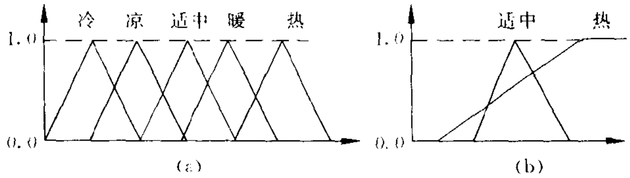

图 1.1 不允许交叉越界的隶属函数

曲线相交，见图 1.1(a)，否则就会出现在相交区域的温度既是“凉”，又是“适中”，同时又是“暖”的情况，甚至还会出现如图 1.1(b)所示的在 10℃左右其属“热”的隶属度反而比属“适中”的隶属度还要高，这显然与人的感觉相矛盾。若有这样的安排，在制定模糊控制规则时，往往就会有互相矛盾的规则出现。在一个模糊控制系统中，隶属函数之间的重叠程度直接影响着系统的性能。在一个极端，如果隶属函数没有重叠，该模糊系统就退化为一般的基于布尔逻辑的系统。当有多个隶属函数相重叠时，给一个确切的输入值，就会同时激活多个规则。隶属函数之间不恰当的重叠，就可能最终导致模糊控制系统产生随意的混乱行为。所以确定隶属函数的第三个原则是间隔的模糊集合不要交叉越界。在大多数实用的例子中，都采用相同斜率的三角形以避免产生交叉越界。

2. 确定隶属函数的方法[1]

隶属函数是模糊集合应用于实际问题的基础，正确构造隶属函数是能否用好模糊集合的关键。然而目前确定隶属函数还没有一种成熟的方法，仍然停留在依靠经验确定，然后再通过实验、试验或者计算机模拟得到的反馈信息进行修正。这种方法是植根于人的经验，经过人脑的加工，吸收了人脑的优点，但是这与人确定的心理过程有关，带有一定盲目性和主观性。所以从理论上说，即使根据专家的经验确定的隶属函数，这种没有理论化的方法也不能保证其正确性，因为任何人的经验和知识都是有局限性的。在这方面，国内外学者已经进行了大量的研究，并正在努力设法解决这个难题，提出了各种各样的确定方法，诸如模糊统计法、函数分段法、二元对比排序法、对比平均法、滤波函数法、示范法和专家经验法等等方法。但是这些探索至今只能对特定的情况解决部分的问题，而不是从根本上解决问题的一般性方法。

但另一方面，尽管目前还不存在一种统一的确定方法，但是从不同角度提出来的确定方法，确也可根据不同情况逼近客观性，在应用中能解决传统逻辑不能解决的一些问题。我们知道，不同的人根据自己不同的经验，对同一个问题所作的判断是不同的，但是他们却往往都能根据自己的经验比较好地控制同一个系统。奇怪的是，在实际应用中，与此类似，虽然用不同方法确定了不同的模糊集合的隶属函数，在一定范围内，模糊逻辑控制却都能实现控制，达到预期目标，尽管达到目标的过程细节和响应时间可能有差别，这种控制并不一定是最优的。换句话说，隶属函数的确定并不是唯一的，允许有不同的组合。至于是否有、或者如何确定和证明“最优”的隶属函数及其组合，就需要模糊理论家的进一步研究成果来提供。这也就是为什么目前为了简化计算，很多模糊逻辑控制的隶属函数曲线干脆就取三角形的原因。实际上根据模糊统计方法得到的隶属函数通常都是钟形的，所以三角形隶属函数并不是最佳函数，只是一种近似。经过计算机模似实验发现，实际上，隶属函数的形状会很微妙地影响着整个模糊系统的过程，例如会影响单片机实现模糊化、逆模糊化的时间和对查询表存储空间的要求。现在普遍采用三角形、梯形和单值线形状，是因为实践证明它能满足一般要求，又可简化计算，故被广泛采用。

1.2 模糊关系和模糊矩阵

1.2.1 模糊关系

描述元素之间是否相关的数学模型称为关系，描述元素之间相关的程度的数学模型称为模糊关系。为了区别于模糊关系，又称关系为普通关系。显然，模糊关系是普通关系的拓广和发展，而普通关系可视为模糊关系的特例。模糊关系是模糊数学的重要组成部分。当论域有限时，可用模糊矩阵表示模糊关系。它在关系的运算中带来了极大的方便，使它成为模糊关系的主要运算工具。

1. 模糊关系的定义

定义 5 两个非空集合 U 与 V 之间直积

$$U \times V = \{\langle u,v\rangle \mid u \in U, v \in V\}$$

中的一个模糊子集 R 被称为 U 到 V 的模糊关系，又称二元模糊关系。其特性可以由下面的隶属函数来描述

$$\mu_R : U \times V \to [0,1]$$

隶属函数 $\mu_R(u,v)$ 表示序偶 $\langle u,v\rangle$ 的隶属程度，也描述了 (u,v) 间具有关系 R 的量级。特别在论域 $U=V$ 时，称 R 为 U 上的模糊关系。当论域为 n 个集合 $U_i(i=1,2\cdots,n)$ 的直积 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 时，它们所对应的模糊关系 R 则称为 n 元模糊关系。

例如，设 A、B 是实数集合，元素对 (a,b)，$a\in A$，$b\in B$，则对于"b 与 a 大致相等"这样的模糊关系，得到隶属函数

$$\mu_R(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(a-b)^4} & |b-a| \leqslant 5 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

2. 模糊关系的性质

(1) 自反性

设 R 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$\mu_R(u,u) = 1, \quad \forall\, u \in U$$

则称 R 具有自反性的模糊关系。具有自反性的模糊关系，其所有元素 u 与模糊关系 R 间的隶属程度为 1。反之，如果

$$\mu_R(u,u) = 0, \quad \forall\, u \in U$$

则称 R 具有反自反性的模糊关系，其模糊矩阵 R 的对角线元素均为 0。

自反性的模糊关系具有如下性质：

当关系 R 是自反的，P 为任意模糊关系，则 $R\circ P\supseteq P$，$P\circ R\supseteq P$。

当关系 R 是自反的，则 $R\subseteq R\circ R$。

当关系 R、P 是自反的，则 $R\cup P$、$R\cap P$ 以及 $R\circ P$ 也是自反的。

(2) 对称性

设 R 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$\mu_R(u,v) = \mu_R(v,u), \forall\, u,v \in U \times V$$

则称 R 为具有对称性的模糊关系，其相应的模糊矩阵应满足 $R = R^T$。

此外，当 $\mu_R(u,v) > 0$，如果 $\mu_R(v,u) > 0$，则 $u = v$；当 $u \neq v$ 时，如果 $\mu_R(v,u) > 0$，那么

$\mu_R(u,v)=0$，则称 R 为反对称性的，其相应的模糊矩阵满足 $R\circ R^T\leqslant I$。

对称性的模糊关系 R 具有下列性质：

当关系 R、P 是对称的，则 $R\cup P$、$R\cap P$ 以及 R^m 也是对称的。

当 R、P 是对称的，且 $R\circ P=P\circ R$ 成立时，则 $P\circ R$ 也是对称的。

(3) 传递性

设 R 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$\bigvee_v\{\mu_R(u,v)\wedge\mu_R(v,w)\}\leqslant\mu_R(u,w)$$

也就是所有在 u 与 v 隶属于模糊关系 R 的程度和 v 与 w 隶属于关系 R 的程度中取较小的一个值都小于 u 与 w 隶属于关系 R 的程度，则称 R 为具有传递性的模糊关系，其相应的模糊矩阵满足 $R\circ R=R^2\subseteq R$。

传递的模糊关系 R 具有如下性质：

当 R、P 是传递的，$R\cap P$ 也是传递的，但 $R\cup P$ 未必是传递的。

当 R、P 是传递的，且 $R\circ P=P\circ R$ 成立，则 $R\circ P$ 是传递的。

当 R 是传递的、对称的，则有 $\mu_R(u,v)\leqslant\mu_R(u,u)$。

当 R 是自反的、传递的，则 $R\circ R=R$。

(4) 对比性

设 R 是 $U\times V$ 上的模糊关系，且满足

$$u\neq v\text{ 时},\mu_R(u,v)>0\text{ 或 }\mu_R(v,u)>0$$

则称 R 为具有对比性的模糊关系。

在上述性质中，“$\circ$”符号表示合成运算。

3. 模糊关系的合成

在日常生活中，两个单纯关系的组合可以构成一种新的合成关系。例如，有 u,v,w 三个人，若 v 是 u 的妹妹，而 u 又是 w 的丈夫，则 v 与 w 就是一种新的关系，即姑嫂关系。用关系式表示的话，就可写作

$$\text{姑嫂}=\text{兄妹}\circ\text{夫妻}$$

模糊关系和普通关系一样，两种模糊关系可以组合成一种合成关系。

定义 6 设 P 是 $U\times V$ 上的模糊关系，Q 是 $V\times W$ 的模糊关系，则 R 和 S 是 $U\times W$ 上的模糊关系，它是 $P\circ Q$ 的合成。其隶属函数被定义为

$$\mu_R(u,w)\Leftrightarrow\mu_{P\circ Q}(u,w)=\bigvee_{v\in V}(\mu_P(u,v)\wedge\mu_Q(v,w))$$

若式中算子 $\wedge$ 代表“取小——min”，$\vee$ 代表“取大——max”运算，这种合成关系即为最大值-最小值合成，这里“$\circ$”为合成算子，合成关系 $R=P\circ Q$。

模糊关系的合成可以是多种多样的。如果把上述的合成关系认为是模糊关系 P 与 Q 的一种 sup－min 合成关系，可写成

$$\mu_{P\circ Q}(u,w)=\sup_{v\in V}[\min(\mu_P(u,v),\mu_Q(v,w))]$$

那么，下面一种合成关系的定义

$$\mu_S(u,w)\Leftrightarrow\mu_{P\odot Q}(u,w)=\bigwedge_{v\in V}(\mu_P(u,v)\wedge\mu_Q(v,w))$$

就是模糊关系 P 与 Q 的一种 inf－max 合成关系，可写成

$$\mu_{P\odot Q}(u,w)=\inf[\max(\mu_P(u,v),\mu_Q(v,w))]$$

并且这两种合成关系间存在下列联系规则：

$$\overline{P \circ Q} = \overline{P} \otimes \overline{Q}$$

4. 模糊关系合成的基本性质

(1) $R \circ I = I \circ R = R$

(2) $R \circ 0 = 0 \circ R = 0$.

(3) $R^{m+n} = R^m \circ R^n, R^0 = I$

(4) 若 $S \subseteq T$，则 $R \circ S \subseteq R \circ T$

(5) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

$R \circ (S \cap T) \subset (R \circ S) \cap (R \circ T)$

$(S \cap T) \circ R \subset (S \circ R) \cap (T \circ R)$

(6) $R \circ (P \circ Q) = (R \circ P) \circ Q$

(7) $(R \circ S)^T = S^T \circ R^T$

例如，设模糊集合 X、Y、Z 分别为

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$Z = \{z_1, z_2\}$$

并设 $Q \in X \times Y, R \in Y \times Z, S \in X \times Z$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

则可得模糊关系 Q 对 R 的合成

$$S = Q \circ R = (S_{ij})_{4\times 2} = \bigvee_{k=1}^{3} (q_{ik} \wedge r_{kj})$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2 模糊矩阵

模糊关系通常可以用模糊矩阵、模糊图和模糊集表示法等三种形式来表示。通常用模糊矩阵来表示二元模糊关系。

1. 模糊矩阵的定义

当 $X = \{x_i | i = 1,2,\cdots,m\}$，$Y = \{y_i | i = 1,2,\cdots,n\}$ 是有限集合时，则 $X \times Y$ 模糊关系 R 可用下列 $m \times n$ 阶矩阵来表示：

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots r_{1j} & \cdots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots r_{2j} & \cdots r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots r_{ij} & \cdots r_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots r_{mj} & \cdots r_{mn} \end{bmatrix}$$

式中元素 $r_{ij}=\mu_R(x_i,y_j)$。由此表示模糊关系的矩阵，被称为模糊矩阵。由于 μ_R 的取值区间为 $[0,1]$，因此模糊矩阵元素 r_{ij} 的值也都在 $[0,1]$ 区间。显然，模糊矩阵是普通矩阵的特例。当 $m=n$ 时，称 R 为 n 阶模糊方阵；当 r_{ij} 全为 0 时，称 R 为零矩阵，记为 0；当 r_{ij} 全为 1 时，称 R 为全矩阵，记为 E；当 r_{ij} 只在 $\{0,1\}$ 中取值时，称 R 为布尔矩阵，它对应一个普通关系。

2. 模糊矩阵的运算

由于模糊矩阵本身是表示一个模糊关系子集，因此根据模糊集的交、并、补运算定义，模糊矩阵也可做相应的运算。对于任意两个模糊矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$，$Q=(q_{ij})_{m\times n}$，则模糊矩阵的交、并、补运算为

(1) 模糊矩阵交　$R\cap Q=(r_{ij}\wedge q_{ij})_{m\times n}$

(2) 模糊矩阵并　$R\cup Q=(r_{ij}\vee q_{ij})_{m\times n}$

(3) 模糊矩阵补　$R^C=(1-r_{ij})_{m\times n}$

例如，设

$$R=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad Q=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

则

$$R\cap Q=\begin{pmatrix} 0.5\wedge 0.8 & 0.3\wedge 0.5 \\ 0.4\wedge 0.3 & 0.8\wedge 0.7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$R\cup Q=\begin{pmatrix} 0.5\vee 0.8 & 0.3\vee 0.5 \\ 0.4\vee 0.3 & 0.8\vee 0.7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$R^C=\begin{pmatrix} 1-0.5 & 1-0.3 \\ 1-0.4 & 1-0.8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

1.2.3 模糊矩阵的运算性质

设任意三个模糊矩阵 P、Q、R，且 $0\subseteq R$、Q、$P\subseteq E$，其中 0 为零矩阵，E 为全矩阵，则它们间的交、并、补运算有以下基本性质：

1. 幂等律　$R\cap R=R$　$R\cup R=R$
2. 两极律　$R\cap 0=0$　$R\cup 0=R$
3. 同一律　$R\cap E=R$　$R\cup E=E$
4. 交换律　$R\cap Q=Q\cap R$　$R\cup Q=Q\cup R$
5. 结合律　$(R\cap Q)\cap P=R\cap(Q\cap P)$
　$(R\cup Q)\cup P=R\cup(Q\cup P)$
6. 分配律　$(R\cap Q)\cup P=(R\cup P)\cap(Q\cup P)$
　$(R\cup Q)\cap P=(R\cap P)\cup(Q\cap P)$