经典动力学

〔美〕D.T.格林伍德 著

科学出版社

经典动力学

〔美〕D. T. 格林伍德 著

孙 国 锟 译

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书介绍了动力学的一些基本概念，系统地叙述了牛顿、欧拉、拉格朗日等关于非相对论性力学的原理和方法，其中包括拉格朗日方程及其特殊应用、哈密顿方程以及哈密顿-雅可比原理和正则变换．最后介绍了爱因斯坦的相对论性动力学．每章附有例题和习题．书末附有习题答案．

本书可供高等院校有关专业师生和有关科技人员参考．

D.T. Greenwood

CLASSICAL DYNAMICS

Prentice-Hall, Inc., 1977

ZPS/01

经 典 动 力 学

〔美〕D. T. 格林伍德 著

孙 国 锟 译

责任编辑　李成香

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1982 年 7 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1982 年 7 月第一次印刷　　印张：13

印数：0001—9,800　　字数：296,000

统一书号：13031·1926

本社书号：2611·13—2

定 价：2.00 元

序　　言

自从拉格朗日的“分析力学”（Mécanigue Analytique）于1788年出版以来，已经将近二百年了。这部著作为分析动力学奠定了基础。此后的许多成果，特别是哈密顿和雅可比的著名的发现，对于建立一个异常优美的动力学理论作出了贡献。本世纪初又取得了巨大的进展，爱因斯坦在1905年发表了他的关于相对论的第一篇论文，提出了关于物理世界的新观点。在随后的几年时间里，这些基本理论得到进一步的研究和改进，特别是在数学方法和表达方法，以及在它们的逻辑和实验基础方面。此外，由于我们社会的技术水平已发展得更高超，使经典力学的高级理论得到了广泛的应用。这就要求攻读自然科学和工程技术专业的大学毕业生，对这几方面比较抽象和理论上令人满意的动力学理论，应该具有坚实的基础。这正是本书的目的。

这本书包括的课题可以说是密执安（Michigan）大学高等动力学教程的内容及其补充。我们假定选修的学生熟悉矢量力学原理，并且可以应用这一理论较顺利地分析质点系运动和刚体的二维及三维转动问题。此外，学生应熟悉拉格朗日方程，并且最好已经具有应用拉格朗日方程解决较难问题的一定经验。现在密执安大学选修这门课的学生，在一年级物理课程，以及四学分的初等动力学课程和四学分中等动力学课程中都已读过一些动力学。中等和高等动力学这两门课程安排在前后两学期。

因为我们假定学生对动力学的较基本的课题是熟悉的，

所以本书没有对这部分内容作任何详细讲述．要写第一章“基本概念”的原因是为了确定后面所采用的一些符号和较重要的定义．例如，在这一章引入了虚功的概念和达朗伯原理．如果学生对这些内容已经熟悉，这一章就无需花什么时间．

第二章以达朗伯原理为出发点导出拉格朗日运动方程．就完整系统和非完整系统的情形对这些方程的显式和特点进行了详尽的讨论．在引入冲击性约束概念的第三章中继续讨论拉格朗日方程的特殊应用．在对冲击性运动的分析中，顺便也用一定篇幅对伪坐标进行了简要的讨论．另外一些内容是对回转系统和消散系统以及与速度相关的势进行讨论并加以比较．其中的一些应用问题可以删掉而不会影响与其余章节的连贯性．

第四章里结合对动力学问题的考察引入了变分学．着重讲述了哈密顿原理，同时也考察了诸如最小作用量原理等其它一些成果．在正则积分的一般计算中考察了非同时性变分以及通常的同时性变分．在讨论正则运动方程和相空间时仔细地考察了哈密顿的动力学观点．这一章为下面两章的理论建立了大部分基础．

第五和第六两章主要讲述正则变换的理论．我们决定在对正则变换进行更一般的讨论之前，先考察哈密顿-雅可比理论，而不把次序倒过来．这样能使学生学到一些较具体的解题方法，并希望能对下面讲到的较广泛的正则变换理论进一步有所启发．

最后一章对狭义相对论作了初步的讲述，包括了它的拉格朗日和哈密顿表述形式．本章还给出了足够数量的例子和习题，以便在此水平上增进对这个论题的熟悉程度．

作者的意见是，一般看时间许可尽可能多地采用每章末

的习题。题目的难度各不相同，这些习题将大大有助于巩固经典动力学的主要概念。由于篇幅有限，有些理论结果没有被包括在正文里，而是作为习题提出。

D. T. 格林伍德

目　录

第一章 基本概念

动力学研究相互作用的物体的运动. 它利用公设的定律来描述这些运动. 经典动力学限于研究可将量子力学效应略去不计的那些相互作用的物体系统，亦即它主要适用于宏观现象. 其中包括了诸如牛顿、欧拉、拉格朗日和哈密顿等人的非相对论性理论和方法，以及爱因斯坦的较新近的相对论性动力学.

本章引入非相对论性经典动力学的一些基本概念，并将开始提出全书都要采用的符号体系. 有些内容读者应该是熟悉的，因而没有详细讲述. 为了弄清较重要的定义和假设，对其它一些课题都作了比较仔细的讲解.

1-1 力学系统

我们来考察由N个质点组成的力学系统，这里质点是指质量集中在一点上的理想化物质实体. 因此质点的运动就是指点在空间的运动. 由于点不具有几何尺寸，我们既不能规定质点的方位，也不能设想使质点产生任何特定的转动运动. 按照这种非相对论性的处理，除最后一章外，在其余各章将假定每个质点的质量保持不变.

运动方程　将牛顿运动定律分别应用于具有N个质点的系统中的每个质点，可以得到该系统的运动微分方程. 对于质量为m而受力$\mathbf{F}$作用的单个质点，由牛顿第二定律得到矢量方程

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1-1}$$

或

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \tag{1-2}$$

式中线动量 $\mathbf{p}$ 由下式给出，即

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{1-3}$$

这里加速度 $\mathbf{a}$（或 $\dot{\mathbf{v}}$）是相对于惯性参考系量度的.

牛顿动力学的一个基本假设是存在着一个惯性参考系或牛顿参考系. 设想一个原点在太阳、相对于所谓“固定的”恒星假定并不转动的参考系，这就是惯性参考系的一个例子. 可以证明，任何并不转动但只是相对于已知的惯性参考系作匀速平动的其他参考系本身就是一个惯性参考系. 因此，有一个惯性参考系存在，就意味着有其它无限多个惯性参考系存在，对于利用牛顿动力学原理描述质点的运动来说，这些参考系是同等有效的(但不一定同样方便).

假定已经找到这样一个合适的惯性参考系，并且矢量 $\mathbf{r}_i$ 规定了第 i 个质点相对于该参考系的位置. 借助于方程(1-1)，具有 N 个质点的系统的运动方程可写为

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{1-4}$$

其中 m_i 为第 i 个质点的质量，并且式中把作用于该质点的力分为两个分矢量 $\mathbf{F}_i$ 和 $\mathbf{R}_i$. $\mathbf{F}_i$ 叫做主动力，$\mathbf{R}_i$ 叫做约束力. 简言之，$\mathbf{R}_i$ 是保证第 i 个质点的运动服从几何约束的力. 主动力 $\mathbf{F}_i$ 代表作用于第 i 个质点上其他所有力的和. 在第 1-3 节和 1-4 节要更详细地讨论约束以及相关的力.

一般地说，作用于物体的力可按其作用方式分类如下：(1) 接触力，(2) 体力或场力. 接触力是由直接机械地推或拉而传递给物体的. 另一方面，体力是与远距作用相关的，由引力场、电场或其它场来代表. 通常，体力作用于整个物体，

而接触力则仅作用在物体界面上. 与几何约束相关的约束力 $\mathbf{R}_i$ 总是接触力. 但是主动力 $\mathbf{F}_i$ 可能以体力方式或接触方式，或二者的组合方式作用.

有时对每个质点不是写出象式(1-4)那样的单个矢量方程，而是写出三个标量方程会更加方便. 采用笛卡尔直角坐标 (x_i, y_i, z_i)[1] 表示第 i 个质点的位置，得

$$
\begin{aligned}
m_i\ddot{x}_i &= F_{ix} + R_{ix} \\
m_i\ddot{y}_i &= F_{iy} + R_{iy} \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \\
m_i\ddot{z}_i &= F_{iz} + R_{iz}
\end{aligned}
\tag{1-5}
$$

式中 F_{ix} 和 R_{ix} 分别为 $\mathbf{F}_i$ 和 $\mathbf{R}_i$ 的 x 分量，而 F_{iy}, R_{iy}, F_{iz}, R_{iz} 有类似的意义.

不过方程(1-5)的表示法还是不大合用的. 为了把方程的书写加以简化，我们用 (x_1, x_2, x_3) 表示第一个质点的直角坐标，以 (x_4, x_5, x_6) 表示第二个质点的坐标，等等. 于是，注意到第 k 个质点的质量是

$$
m_{3k-2} = m_{3k-1} = m_{3k} \tag{1-6}
$$

可以把运动方程写为以下形式，即

$$
m_i\ddot{x}_i = F_i + R_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 3N) \tag{1-7}
$$

其中 F_i 和 R_i 分别为主动力和约束力的 x_i 分量. 作为这种表示法的特例，我们知道 F_5 就是作用在第二个质点上的主动力的 y 分量，R_{3N} 是作用在第 N 个质点上的约束力的 z 分量.

在没有约束的情况，力分量 F_i 可表示成位置、速度和时间的函数；而力 R 的分量都是零. 可见，具有 N 个质点的系统由 $3N$ 个二阶微分方程所描述，一般情况下这些方程是非线性的. 从理论上讲，虽然对于把每个质点的位置坐标表示为时间的函数来说，这些方程是可能被解出的，但往往不能完全

---

1) 以后简称直角坐标.——译者

地积分为闭合形式的解. 实际求解常需应用计算机.

如果有 m 个约束作用于一个系统，那末诸力不仅可能是位置、速度和时间的函数，也可能是 m 个附加变量的函数，这些附加变量叫做拉格朗日乘子. 在此情形，需要用 $3N$ 个运动微分方程和 m 个约束方程求出总共 $(3N+m)$ 个作为时间函数的变量.

可见，采用直角坐标写出具有 N 个质点的系统的运动方程，可能导致一组繁复的非线性常微分方程. 然而，在某些情况下利用只有较少约束，或者消去了全部约束的另外一组坐标，可使分析过程大为简化. 为使分析过程简化而恰当地选取坐标并进一步利用变量变换，这些都是本书其它章节广泛讨论的课题.

单位 不论是写成矢量形式 (1-4) 或标量形式 (1-7) 的运动方程，都要求以一致的单位制把变量表示出来. 所谓一致，意指必须用相同的或等价的单位把方程两边的量表示出来. 考察一下运动方程中所采用的单位的量纲，可以看到，质量、长度、时间和力都在方程中出现. 但是，因为运动方程必须显示量纲的齐次性，所以这四个量纲不是相互独立的. 实际上，任意一个量纲都可以用其它三个来表示.

有些单位制叫做绝对单位制，其中采用质量、长度和时间作为基本量纲. 例如，*mks* 制就采用米作为长度的基本单位，千克作为质量的基本单位，秒作为时间的基本单位. 力的单位牛顿则是导出单位，它等于 1 千克 · 米/秒 ^{2}，一般地说，在说到明确的单位时，我们都将采用这种单位制.

另一个通用的单位制是英国重力制，其中把具有力、长度和时间量纲的单位看作基本单位. 这里英尺是长度的基本单位，秒是时间的基本单位，磅是力的基本单位. 质量的基本单位斯勒格是导出单位，它等于 1 磅 · 秒 ^{2}/英尺.

1-2 广义坐标

自由度 给定的力学系统的一个重要特征是它的自由度数. 自由度数等于坐标数目减去独立的约束方程数目. 例如，如果利用 $3N$ 个直角坐标描述具有 N 个质点的系统的位形，并且有 l 个联系这些坐标的独立约束方程，则该系统具有 $(3N-l)$ 个自由度.

为了说明自由度的概念，我们来考查三个质点，它们由刚杆相连，从而构成一个三角形物体，每个顶点上有一个质点. 给定三个质点的位置，亦即给定九个直角坐标，就规定了该系统的位形. 在数学上每个刚杆都可以用一个独立的约束方程来代表，所以 $3N-l=9-3=6$，亦即该系统具有 6 个自由度.

三角形物体是刚体的一个例子，它的自由度数和一般刚体的相同. 设想该三角形可以嵌入任一给定的刚体，就可以弄明白这一点. 在此情况，三角形的每一个可能位形都确定了该刚体的位形，反之亦然.

重要的是要认识到自由度数是系统本身的特征，它并不依赖于描述该系统时所采用的一组特定的坐标. 例如，上述三角形物体的位形可以由给出体内任意一点的三个直角坐标和表示三角形物体方位的三个欧拉角而规定. 在此情形，共有 6 个坐标，而无约束，这仍然表示出六个自由度.

找出这样一组独立的坐标来描述一个系统的位形往往是有利的. 在此情形，坐标的数目和自由度数相同，分析过程包含最小数目的变量.

广义坐标 上面已经看到，可以采用不同的坐标组来表示一个给定系统的位形. 但是，各个组既不一定要具有同样

数目的坐标，也不一定具有相同数目的约束．不过，坐标的数目减去独立的约束方程的数目总是等于自由度数．

现在来考察描述同一系统的两组坐标．在任一给定时刻，每组坐标的值只是一组数．由另一组数求出这一组数的过程叫做坐标变换．

考虑到有各种各样可能的坐标变换，任何一组明确表示系统位形的参数，在更一般的意义上都能作为一种坐标系．这些参数叫做广义坐标．所有各种常用的坐标都可以作为广义坐标，但也可以采用其它一些参数．例如，某一广义坐标的运动可以包含系统一部分的移动和另一部分的转动．

广义坐标通常具有很直观的几何意义，往往也就根据这一点来进行选择．此外，在大多数问题的分析中，选择一组独立的广义坐标是有益的．如果广义坐标既规定系统的位形，并能独立地变化而不破坏约束，这时广义坐标的数目就等于自由度数．

有许多利用广义坐标列写运动微分方程的简捷方法，比如使用拉格朗日方程．在第二章的讨论中将会看到，使用独立的广义坐标，无需求解约束力就能对大多数系统的运动进行分析．

现在转回来考察联系直角坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$ 同广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的变换式，我们将假定这些变换式具有如下形式：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \\
x_2 &= x_2(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \\
&\vdots \\
x_{3N} &= x_{3N}(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)
\end{aligned} \tag{1-8}
$$

可能每组坐标都有相关的约束方程．如果诸 x 具有 l 个约束方程，而诸 q 具有 m 个约束方程，于是，令每一情况下的自由

度数相等，得到

$$3N - l = n - m \tag{1-9}$$

最好是一组且仅仅一组 q 对应于系统的每一个可能位形．换言之，对于每一个时间值，在 x 容许区域内的各点同 q 容许区域内的各点之间应该有一对一的对应关系．能够将 q 作为 x 和 t 的函数解出的必要和充分条件是，变换的雅可比行列式不等于零．

作为一个例子，假定 $3N$ 个 x 之间具有 l 个下列形式的约束方程

$$f_j(x_1, x_2, \cdots, x_{3N}, t) = \alpha_j \tag{1-10}$$

$$(j = 3N - l + 1, \cdots, 3N)$$

设选定的 n 个广义坐标都是独立的，亦即自由度数

$$n = 3N - l$$

现在定义另一组 l 个 q，并令它们与 l 个常数 α 相等

$$q_j = \alpha_j \qquad (j = n + 1, \cdots, 3N) \tag{1-11}$$

于是可以认为变换式（1-8）具有如下形式：

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \\ &\vdots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \end{aligned} \tag{1-12}$$

如果雅可比行列式不等于零，即如果

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_{3N})}{\partial(q_1, q_2, \cdots, q_{3N})} \neq 0 \tag{1-13}$$

则可由式（1-8）或式（1-12）解出 q 作为 x 和时间的函数，即

$$q_j = f_j(x_1, x_2, \cdots, x_{3N}, t) \tag{1-14}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

其余的对应于 $j = n+1, \cdots, 3N$ 的常值 q 可以由式（1-10）和式（1-11）给定．

例1-1　作为由直角坐标到广义坐标变换的例子,我们来考察一个质点，它被限制在半径为 a 的固定圆形路径上运动，如图 1-1 所示. 约束方程为

$$(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}=a$$

取单个广义坐标 q_1 表示一个自由度. 这个极角可以任意变化而不会破坏约束. 根据式(1-11), 我们定义第二个常值广义坐标,

$$q_2=a$$

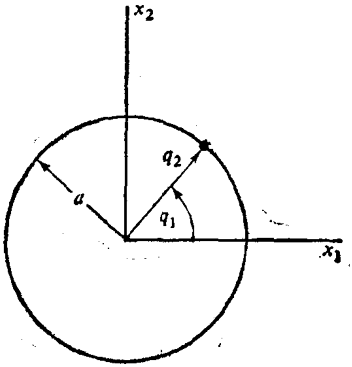

图 1-1　在固定圆形路径上的质点

变换式为

$$x_1=q_2\cos q_1,\quad x_2=q_2\sin q_1$$

这个变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(q_1,q_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\end{vmatrix}=-q_2$$

可见,除去在 $q_2=0$ 时雅可比行列式等于零的情况以外, 诸 q 都可以表示为 x 的函数. 而在 $q_2=0$ 的情况,圆的半径为零,并且角 q_1 是不确定的. 这些变换式为