高等数学

GAODENG SHUXUE

第二版

上

高等学校教材

高等数学

（第二版）

上册

清华大学应用数学系 盛祥耀 居余马 李欧 程紫明 编

高等教育出版社

内容提要

本书(第二版)由编者参照全国高等学校工科数学教材编审委员会于 1980 年审订的“高等数学教学大纲”的要求，在我社 1964 年出版的《高等数学》(基础部分)(清华大学数学教研组编)的基础上重新编写而成。第二版对第一版作了较大的修改和补充，吸取了清华大学有关教师在微积分教学中特别是 1977 年以来积累的一些有益经验，并增加了某些供选学的内容。每节后配有一定数量的习题，每章后配有总习题和补充题，并附有习题答案。

全书分上下两册，上册内容为空间解析几何和向量代数、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、广义积分(初步)。下册内容为多元函数及其微分法、重积分、线面积分、无穷级数(包括傅氏级数)、广义积分和含参量积分、常微分方程。

本书上册仍由周茂清教授任主审，经工科数学教材编审委员会于 1984 年 5 月召开的会议上审查通过，同意作为工科本科用高等数学教材出版。

本书说理清楚、浅显，例题类型多样，着重对学生能力的培养。本书便于教学，便于自学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员、社会青年自学用书。

高等学校教材

高 等 数 学

(第 二 版)

上 册

清华大学应用数学系 盛祥耀 居余马 李欧 程紫明 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

朝阳区展望印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 22 字数 505,000

1964 年 5 月第 1 版 1985 年 6 月第 2 版 1985 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—28,000

书号 13010 · 01045 定价 3.80 元

前　　言

本书是我们根据全国高等院校工科数学教材编审委员会于1980年审定的《高等数学教学大纲》的要求，在我校原数学教研组1964年所编《高等数学》(基础部分)(第一版)的基础上重新编写而成的.

与第一版比较主要有以下几个方面的变化:

1. 删去了第一版中的平面解析几何部分.

2. 增加了某些段落和章节，如：拉格朗日插值公式；数列的子列，数列有极限的充要条件，函数极限存在的柯西准则；函数相关变化率；均差与差分，数值微分法；台劳公式的皮亚诺余项及其应用；方程近似解中简单的迭代法及其收敛条件；真分式的两个分解定理的证明，二项微分式的积分；定积分中矩形法，梯形法和抛物线法的误差估计；重积分的变量置换法；级数求和问题中改善级数收敛性的一种方法；平方平均逼近；常义含参量积分与广义含参量积分；伽玛函数与贝塔函数；一阶微分方程近似解的龙格-库塔法；n阶线性微分方程的一般解与朗斯基行列式；微分算子法等. 另外还保留了第一版中已有的某些超"大纲"要求的内容，如：双曲函数，函数项级数的一致收敛性，函数项级数的解析运算及其证明；广义积分的判敛定理；斯托克斯公式；微分方程组等. 这些内容，大部分都标有 * 号.

3. 对于全书的基本内容部分，我们在吸取了我校教师在微积分教学中(特别是1977年以来)积累的一些有益经验的基础上，认真地进行了编写，对于基本概念的叙述力求深入浅出、清晰准确；对定理的证明力求简明易懂而又严谨；对于例题的选择力求典型、充实，通过较为丰富的例题，使读者更好地掌握课程的基本要求.

4. 全书配有足够数量的各种类型的习题，每节后设置了满足基本要求的习题，除第十二章外其他各章后面都配有总习题，大多数章后还配有较难的补充题，习题答案都附在每章之后，并对某些较难题目给予提示.

5. 作为一种尝试，我们在本书上册第二至第六章的开始及有关部分，简要地叙述了微积分发展过程中的某些史实. 我们的愿望不仅是为了扩充读者的知识面，增进学习微积分的兴趣，更重要的是希望读者从这些史实中正确地理解社会生产的发展、科学技术的发展推动了数学的发展. 微积分的发明及其理论体系的完善是数学发展史上的一个重要突破，而这个突破和其它领域的重要突破一样，是由很多具有献身精神的人(甚至是几代人)经过百折不挠长期努力奋斗而实现的. 我们期望这些史实有助于促进读者树立历史唯物主义和辩证唯物主义的观点.

第二版在送高等工科院校数学教材编审委员会审定和交付出版之前，已在我校试用了两届(82级和83级)，同学们普遍反映第二版内容较为充实，叙述简单易懂，便于自学，例题和习题较为丰富，有助于学生进一步深入思考问题. 使用过本教材的部分教师认为，由于内容阐述较详，

可以适当减少课内讲授时间，增加课外学时的比重．以逐步培养学生自己阅读教材的能力．

四年制的工科院校，使用本教材时，对标有*的内容一般可不作要求．全书有三种类型的习题，每节后的习题；每章的总习题；补充题．为使学生掌握课程的基本要求，不必每题都作，只需挑选每节后适当数量的习题和每章后的部分总习题即可．补充题是为学习有余力又对数学有兴趣的同学准备的．

全书分上下两册，上册包括：空间解析几何和向量代数；函数；极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用、广义积分(初步)．下册包括：多元函数及其微分法；重积分；曲线积分与曲面积分；无穷级数；广义积分(续)与含参量积分；常微分方程．

本书第一章选自1981年我校栾汝书教授编的"空间解析几何与线性代数"(讲义)的有关章节，盛祥耀同志作了一些删补和修改，最后由栾汝书教授修改定稿．第二、三、四、五章由盛祥耀同志改编，第六、七、十一、十二章由居余马同志改编，第八、九、十、十三章由李欧和盛祥耀同志改编，程紫明和盛祥耀同志审阅了全书，并做最后定稿的修改工作．习题由陈魁、张元德、常俊英、曹树杰、朱蓉隽、盛祥耀、居余马等同志选编，选编时参考了我校数学教研组编的"数学分析习题集"(未正式出版)．

胡露犀同志、承镛涵同志审阅了部分章节，并提出了不少宝贵意见．参加本书初稿试用的胡金德、宋烈侠、葛玉安、赵衡秀、王回春、吴梦瑶、郝凤歧、王飞燕、刘坤林、李大法、陆小援、董毅、丁诵青、安连俊、华苏、贾磊、张中新、胡文、白峰杉、李建国等同志都提过各种很好的建设性的意见，另外全国高等工科院校数学教材编审委员会部分编委，对书稿进行了审查，并提出了宝贵的意见，在此一并表示感谢．

由于我们水平所限，不妥或谬误之处一定难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正．

编　者

一九八四年十月于清华园

目　录

第一章 空间解析几何 向量代数

在中学数学中，我们已经在平面上建立了坐标系，将每一个点用其坐标表示，使几何问题化为点的坐标间的代数问题，从而可以利用代数方法研究几何问题．现在我们利用同样方法建立空间坐标系，并利用坐标来研究空间几何问题．第一节我们引进空间直角坐标系；第二、三节介绍向量代数；第四、五节研究空间几何的一些基本内容．学习这一章的目的，一是为多元函数及其数积分作准备，二是介绍向量代数，它是研究几何问题的重要工具，也是物理学中常用的基础知识．

§1 空间直角坐标系

I. 空间直角坐标系，曲面，曲线与方程

在空间内任选互相垂直的三个平面．设这三个平面交于点O，每两个平面分别交于直线$x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$（见图 1.1）．我们在这三直线上建立坐标系，取交点O作为公共的原点，并选用相同长度作为共同的单位．上述三个平面称为坐标平面，分别叫做xy平面，yz平面，zx平面．交线$x'Ox$, $y'Oy$及$z'Oz$称为坐标轴，简称为x轴，y轴，z轴，交点O称为坐标原点．我们选择坐标轴的正方向Ox, Oy, Oz，使得当面对正方向Oz观察时，Ox按照逆时针方向旋转90°可到达Oy．这样确定的坐标系称为右手坐标系，这是由于当我们右手的大拇指、食指、中指互相垂直时，若大拇指指向Ox，食指指向Oy，那么中指就指向Oz．

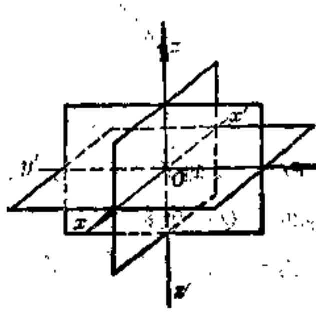


图 1.1

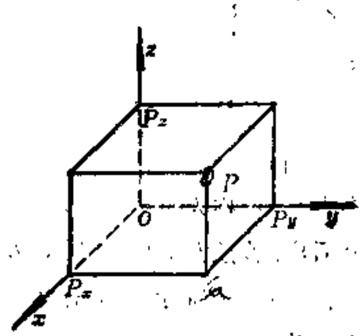


图 1.2

对空间的任一个点P，过点P作三个平面分别与坐标轴$x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$垂直，且分别交$x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$于点P_x, P_y, P_z，这三个交点P_x, P_y, P_z在x轴，y轴，z轴上的坐标分别为x, y, z，则称有次序的数组(x, y, z)为点P的坐标（见图 1.2）．x, y, z分别称为点P的x坐标，y坐标，z坐标．

欲求空间一点P的坐标，也可以采用下面的方法．过点P作直线与xy平面垂直，交点为Q

(见图 1.2)，令点 Q 在 xy 平面上的坐标(对于坐标系 $x'Ox$, $y'Oy$ 而言)为 (x, y)，又若点 P 在 xy 平面的上方(即 Oz 所指向的一方)，规定 $z=|QP|$；若点 P 在 xy 平面下方(即 Oz' 所指向的一方)，规定 $z=-|QP|$，$|QP|$ 表示点 Q 与点 P 的距离．这样就得到点 P 在空间中的坐标 (x, y, z)．

三个坐标平面将空间分为八部分，我们将这八部分叫做八个卦限．在 xy 平面的四个象限的上方(即 Oz 所指向的方向)的四部分分别称为第一、第二、第三、第四卦限；在 xy 平面的四个象限的下方(即 Oz' 所指向的方向)的四部分分别称为第五、第六、第七、第八卦限．在这八个卦限内的点的坐标的正负号由下列表格所确定．

卦限	第一	第二	第三	第四	第五	第六	第七	第八
坐标的正负号	$(+,+,+)$	$(-,+,+)$	$(-,-,+)$	$(+,-,+)$	$(+,+,-)$	$(-,+,-)$	$(-,-,-)$	$(+,-,-)$

一个点若在 xy 平面内，它的 z 坐标必为 0；反之亦然，即 z 坐标为 0 的点 $(x, y, 0)$ 必在 xy 平面内．同样，yz 平面内点的坐标为 $(0, y, z)$；zx 平面内点的坐标为 $(x, 0, z)$．

两个点 P, Q 称为对称于 xy 平面，若连接这两点的线段 PQ 垂直于 xy 平面，且被 xy 平面所平分．若点 P 的坐标为 (x, y, z)，则与点 P 对称于 xy 平面的点 Q 的坐标为 $(x, y, -z)$ (见图 1.3)；同样，与点 $P(x, y, z)$ 对称于 yz 平面的点的坐标为 $(-x, y, z)$；与点 $P(x, y, z)$ 对称于 zx 平面的点的坐标为 $(x, -y, z)$．

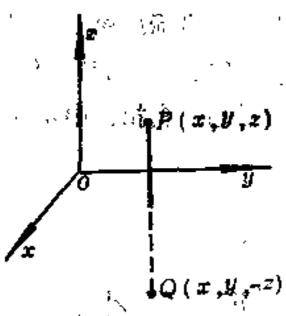


图 1.3

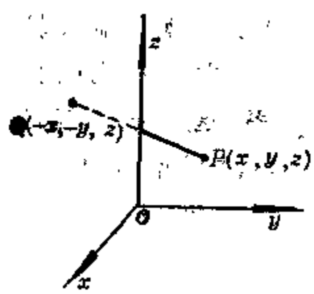


图 1.4

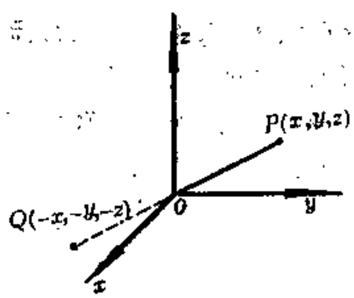


图 1.5

两个点 P, Q 称为对称于 z 轴，若连接这两个点的线段 PQ 与 z 轴垂直相交，且被 z 轴所平分．容易看出，若点 P 的坐标为 (x, y, z)，则点 P 对称于 z 轴的点 Q 的坐标为 $(-x, -y, z)$ (见图 1.4)．同样，与点 $P(x, y, z)$ 对称于 x 轴的点的坐标为 $(x, -y, -z)$；与点 $P(x, y, z)$ 对称于 y 轴的点的坐标为 $(-x, y, -z)$．

两个点 P, Q 称为对称于坐标原点 O，若连接这两个点的线段 PQ 通过点 O，且被点 O 所平分．若点 P 的坐标为 (x, y, z)，则关于点 O 对称的点 Q 的坐标为 $(-x, -y, -z)$ (见图 1.5)．

II．两点间的距离公式　定比分点公式

现在我们利用坐标求下面的重要公式．

给出两个点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$，求这两个点的距离 $|P_1P_2|$．

若 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$，那么 $|P_1P_2|=|z_2-z_1|$；否则，我们将 P_1, P_2 投影到 xy 平面上，并设投影

点分别为 P_1', P_2', 过点 P_1 作 P_1Q 垂直于 P_2P_2'(见图 1.6). 由图上得到

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2+|QP_2|^2=|P_1'P_2'|^2+|QP_2|^2 \\
&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,
\end{aligned}
$$

这样就得到两点间的距离公式为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这个公式也包括 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ 的特殊情况.

例 1. 试求 $P(2, 3, -4)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 间的距离.

解 由两点间的距离公式, 得

$$|OP|=\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{29}.$$

例 2. 求 $P_1(2, 0, -2)$, $P_2(-3, -1, 5)$ 两点间的距离.

解 由距离公式, 得

$$|P_1P_2|=\sqrt{(-3-2)^2+(-1-0)^2+(5+2)^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}.$$

现在我们介绍求两点定比分点的计算公式.

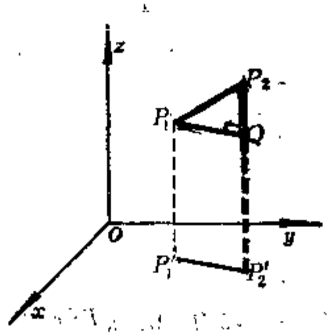


图 1.6

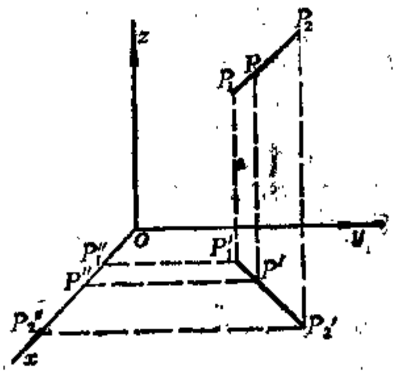


图 1.7

给两个定点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 对直线 P_1P_2 上除去 P_2 外的任意一点 $P(x, y, z)$, 比值

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

称为点 P 对 P_1, P_2 的分比. 这里规定: 若从 P_1 到 P 的方向与从 P 到 P_2 的方向一致时, 比值是两个距离 $|P_1P|$, $|PP_2|$ 的比; 若从 P_1 到 P 的方向与从 P 到 P_2 的方向相反, 比值是两个距离 $|P_1P|$, $|PP_2|$ 的比值的负值.

现在我们提出下列问题: 当两个点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 已给出, 又给出 $\lambda\neq-1$, 怎样求以 λ 为分比的点 P 的坐标 (x, y, z).

将上述点 P_1, P, P_2 向 xy 平面作垂直投影, 设投影点分别为 P_1', P', P_2', 然后再将 P_1', P', P_2' 向 x 轴垂直投影, 设投影点分别为 P_1'', P'', P_2''(见图 1.7), 利用比例定理, 则有

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1'P'}{P'P_2'}=\frac{P_1''P''}{P''P_2''}=\frac{x-x_1}{x_2-x},$$

去分母，得

$$\lambda(x_2-x)=x-x_1,$$

解出 x，

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

以上推导过程中假定了直线 P_1P_2 与 x 轴不垂直，因为否则的话，P_1''，P''，P_2'' 三个点重合，以上比例就无意义．但对于这种情况，即 $x_1=x_2=x$，可以验证上面的公式仍然成立．

利用对称性，可得到 y, z 的相应式，这样我们得到由定比 λ 求分点 $P(x,y,z)$ 的公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},\tag{1.1}$$

我们以后将公式(1.1)写成下面统一的公式

$$P=\frac{1}{1+\lambda}(P_1+\lambda P_2),\tag{1.2}$$

当(1.2)中 P, P_1, P_2 分别取 x 坐标、y 坐标、z 坐标时，就得到公式(1.1)．

当 $\lambda=1$，点 P 就是线段 P_1P_2 的中点．因此我们得到 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的连线的中点 $P(x,y,z)$ 的计算公式

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2},\tag{1.3}$$

公式(1.3)也可简记为

$$P=\frac{1}{2}(P_1+P_2).\tag{1.3$'$}$$

例 3. 已知 $P_1(2,0,-1)$，$P_2(-1,3,-4)$，求对 P_1, P_2 的分比为 2 的点 $P(x,y,z)$ 的坐标．

解 由公式(1.2)，

$$P(x,y,z)=\frac{1}{1+2}[P_1(2,0,-1)+2P_2(-1,3,-4)],$$

由此得到

$$P(x,y,z)=(0,2,-3).$$

例 4. 设 $P_1(2,-1,5)$，$P_2(5,2,2)$，求线段 P_1P_2 上的两个三等分点的坐标．

解 设线段 P_1P_2 的两个三等分点为 Q_1, Q_2（见图 1.8）．对于 Q_1, Q_2，它们对于 P_1，P_2 的分比分别是 $\frac{1}{2}$ 及 2，由公式(1.2)，

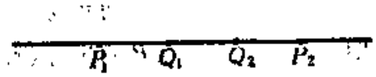


图 1.8

$$\begin{aligned}Q_1&=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\left(P_1+\frac{1}{2}P_2\right)\\&=\frac{2}{3}\left[(2,-1,5)+\frac{1}{2}(5,2,2)\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{2},0,6\right)\\&=(3,0,4).\end{aligned}$$

$$Q_2=\frac{1}{1+2}(P_1+2P_2)=\frac{1}{3}[(2,-1,5)+2(5,2,2)]$$
$$=(4,1,3).$$

得到两个三等分点

$$Q_1=(3,0,4),\quad Q_2=(4,1,3).$$

为了验证所求结果的正确性，我们利用 Q_1 是 P_1Q_2 的中点及 Q_2 是 Q_1P_2 的中点来校核．利用公式(1.3)′，P_1Q_2 及 Q_1P_2 的中点分别是

$$\frac{1}{2}(P_1+Q_2)=\frac{1}{2}[(2,-1,5)+(4,1,3)]=(3,0,4)=Q_1,$$
$$\frac{1}{2}(Q_1+P_2)=\frac{1}{2}[(3,0,4)+(5,2,2)]=(4,1,3)=Q_2.$$

因此所求的结果是正确的．

III．空间曲面与曲线的方程

给定空间的一个直角坐标系，空间的每一个点对应着三个有次序的数 (x,y,z)，称为该点的坐标．当点的坐标 x,y,z 间没有任何限制时，点 $P(x,y,z)$ 充满整个空间．当点的坐标 x,y,z 间满足一些条件，这些点就局限于空间的一部分．当 x,y,z 间满足一个关系式时，在一般情况下，所有满足这个关系式的点构成一个曲面．当 x,y,z 间满足两个关系式时，在一般情况下，这些点构成一条曲线．

设一个曲面上每一个点的坐标 x,y,z 满足方程

$$f(x,y,z)=0,$$

我们简称点 (x,y,z) 满足方程 $f(x,y,z)=0$，而且反过来，满足这个方程的任一个点 (x,y,z) 也在这个曲面上，我们就称这个方程是该曲面的方程．由于曲面的方程完全确定了该曲面，通过对于曲面的方程的代数研究就可以得到曲面的一些几何的性质，这是建立曲面方程的目的．以下我们举一些建立曲面方程的例子．

一、坐标平面及与坐标平面平行的平面方程．

对于 xy 平面上任一个点，它的 z 坐标必为 0，即 $z=0$；反之若 $z=0$，则点 $(x,y,0)$ 必在 xy 平面上．因此 $z=0$ 是 xy 平面的方程．

同样，方程

$$z=a,$$

是过点 $(0,0,a)$ 与 xy 平面平行的平面方程(见图 1.9)．

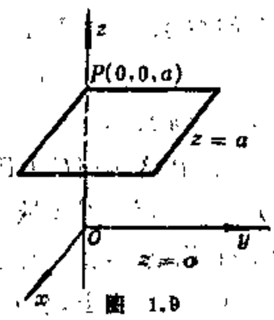


图 1.9

请读者写出 yz 平面、zx 平面的方程，并写出分别和这两个坐标平面平行的平面方程．

二、球心为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面方程．

利用两点距离公式，点 $P(x,y,z)$ 在这个球面上的充分与必要条件是 $|P_0P|=R$，或

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

或
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \tag{1.4}$$

上式称为球面的标准方程，去括号，合并同类项，方程又可以写成

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)=0,$$

因此，球面的方程是坐标 x, y, z 的一个二次方程，x^2，y^2，z^2 的系数相等（将方程两端除以这个系数，可化为 1），缺混合二次项 yz, zx, xy. 反之，任给一个 x, y, z 满足以上条件的二次方程

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0.$$

通过配方，方程可写成

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}.$$

因此，如果 $a^2+b^2+c^2-4d>0$，方程表示以 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ 为球心，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$ 的球面；若 $a^2+b^2+c^2-4d=0$，方程仅表示一个点 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$；若 $a^2+b^2+c^2-4d<0$，方程不表示任何点，这是因为任何点 (x, y, z) 都不会满足这个方程.

例 5. 求方程

$$x^2+y^2+z^2+2x-3y+2=0$$

所表示的曲面.

解 配方，方程化为

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=1+\frac{9}{4}-2,$$

即

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4},$$

因此方程表示一个球面，球心为 $\left(-1, \frac{3}{2}, 0\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

三、母线与坐标轴平行的柱面方程.

让我们先讨论方程

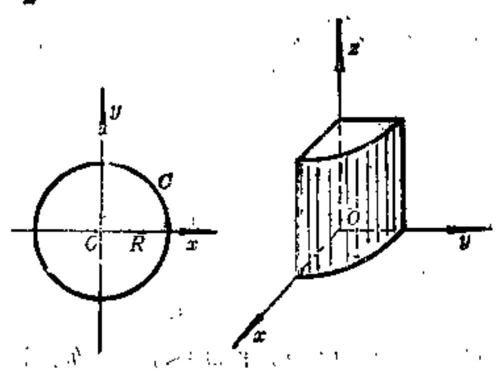
$$x^2+y^2=R^2,$$

在空间表示什么曲面？

我们知道，在 xy 平面上，方程

$$x^2+y^2=R^2$$

表示以坐标原点为圆心，半径为 R 的圆周 C（见图 1.10(i)）. 在这圆周 C 上任取一个点 $(x, y, 0)$，由于方程 $x^2+y^2=R^2$ 中缺 z，因此对任意 z，点 (x, y, z) 也满足方程，也就是说，过圆周 C 上任一点 $(x, y, 0)$，作垂直于 xy 平面的直线，其上任意一点 (x, y, z) 都满足方程，因此，过圆周 C 上任意点且垂直于 xy 平面的直线所构成的圆柱面上的点都在方程 $x^2+y^2=R^2$ 所表示的曲面上. 反之，若一个点 (x, y, z) 满足方程，那么点 $(x, y, 0)$ 也满足方程，也就是说，点 $(x, y, 0)$ 在圆周 C 上. 这就证明了，曲面是由通过 C 上的点，作垂直于 xy 平面的所有直线所构成的圆柱面. 构成这个柱面



(i) (ii)

图 1.10

的这些直线称为这个圆柱面的母线，圆周 C 称为圆柱面的准线.

缺 z 的一个方程

$$f(x, y)=0,$$

在一般情况下，表示母线与 z 轴平行，准线为 xy 平面内的曲线 $f(x, y)=0$ 所构成的柱面.

同样，方程

$$\phi(y, z)=0$$

及方程

$$\psi(z, x)=0,$$

分别表示母线与 x 轴及 y 轴平行的柱面.

例 6. 试画出方程

$$y^2=x$$

所表示的曲面.

解 在 xy 平面内，$y^2=x$ 表示一条抛物线 C；在空间，它表示以 C 为准线，母线与 z 轴平行的直线所构成的柱面. 图 1.11(ii) 中只画出柱面在第一卦限中的一部分，整个柱面位于第一、第四、第五、第八共四个卦限内.

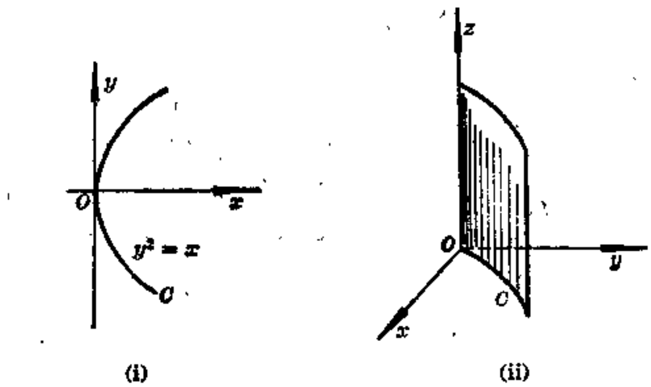


图 1.11

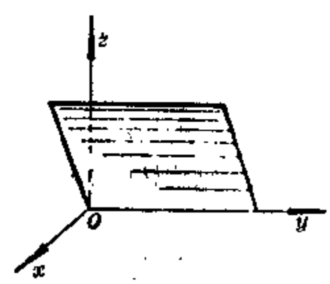


图 1.12

例 7. 试画出曲面

$$z=2x$$

的图形.

解 由于方程缺坐标 y，所以它是以 zx 平面内直线 $z=2x$ 为准线，母线与 y 轴平行的直线所构成一个柱面. 这个柱面是一个平面，图形见图 1.12. 在图 1.12 中仅画出在第一卦限中的一部分，整个平面在第一、第四、第六、第七共四个卦限内.

四、绕坐标轴旋转的旋转面方程.

设在 xy 平面内有一段曲线 C

$$f(x, y)=0, y\geqslant 0.$$

今将这段曲线绕 x 轴旋转一周，曲线 C 经旋转后得到一旋转面. 求这个旋转面的方程.

在旋转面上任选一点 $P(x, y, z)$，如图 1.13，设这个点是由曲线 C 上点 $Q(X, Y, 0)$ 得到的，容易看出

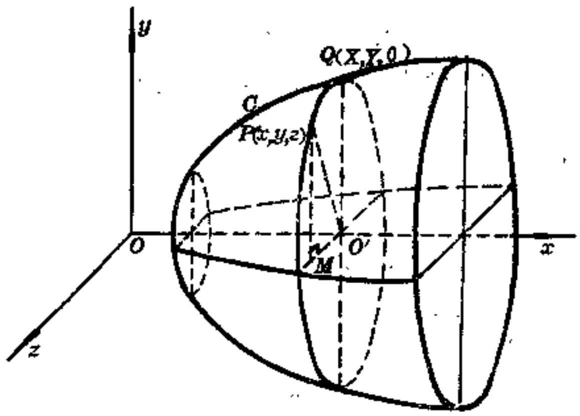


图 1.13

$$\begin{cases} x = X, \\ \sqrt{y^2+z^2} = Y. \end{cases}$$

但是 C 上的点 $Q(X, Y, 0)$ 满足方程

$$f(X, Y) = 0.$$

因此旋转面上任一个点 $P(x, y, z)$ 必满足方程

$$f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0.$$

反之，若一点 $P(x, y, z)$ 满足方程 $f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$，那么 xy 平面上的点 $(X, Y, 0)$ 满足方程 $f(X, Y) = 0$，其中 $X = x$，$Y = \sqrt{y^2+z^2}$. 这样，点 $(X, Y, 0)$ 在曲线 C 上，而 $P(x, y, z)$ 是由点 $(X, Y, 0)$ 绕 x 轴旋转所得到的点，因此 $P(x, y, z)$ 在该旋转面上. 这样就证明了方程

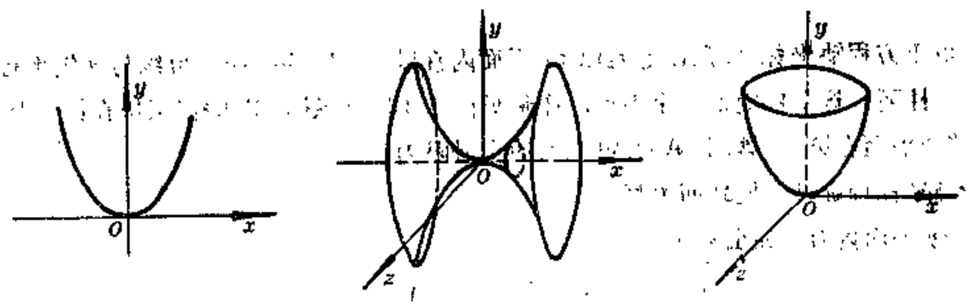
$$f(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0,$$

是所求旋转面的方程.

例 8. 将 xy 平面内的抛物线 $y = x^2$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转，求所得到的两个旋转面的方程.

解 将抛物线绕 x 轴旋转，将 $y = x^2$ 中的 x 用空间坐标 x 代替，将 y 用 $\sqrt{y^2+z^2}$ 代替，得到抛物线绕 x 轴旋转所得到的旋转面方程(见图 1.14)

$$\sqrt{y^2+z^2} = x^2,$$



(i) (ii) (iii)

图 1.14

或

$$y^2+z^2=x^4.$$

当抛物线绕 y 轴旋转时，将 $y=x^2$ 中的 y 保持不变，将 x 用 $\sqrt{x^2+z^2}$ 代替(只旋转 $x\geqslant 0$ 的一部分抛物线，就可以得到整个旋转面)，就得到旋转面的方程

$$y=x^2+z^2.$$

以下讨论曲线的方程.

如果曲线 C 是两个曲面 S_1, S_2 的交线，设这两个曲面的方程分别为

$$S_1:\ f(x,y,z)=0,$$
$$S_2:\ \phi(x,y,z)=0,$$

将这两个曲面的方程联立起来

$$\begin{cases}f(x,y,z)=0,\\ \phi(x,y,z)=0.\end{cases}$$

就可以表示这条曲线 C. 这是因为，曲线 C 上的点既在曲面 S_1 上，又在曲面 S_2 上，所以曲线 C 上的点 (x,y,z) 既要满足方程 $f(x,y,z)=0$，又要满足方程 $\phi(x,y,z)=0$. 反之，若一个点 (x,y,z) 满足这两个方程，则它既在 S_1 上，又在 S_2 上，所以必然在曲线 C 上.

例如，在 xy 平面内，以坐标原点为圆心，以 R 为半径的圆周 C，可以看成 xy 平面与圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 的交线，因此这个圆周可以用下列联立方程

$$\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2=R^2,\end{cases}$$

表示. 当然，这个圆周也可以看成 xy 平面与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的交线，因此它的方程又可以写成

$$\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2+z^2=R^2.\end{cases}$$

这个圆周也可以看成圆柱面与球面的交线，它的方程也可以表示为

$$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ x^2+y^2+z^2=R^2.\end{cases}$$

从代数角度看，这三个联立方程组是同解的方程组，因此它们表示相同的曲线.

表示曲线的另一种方法是参数方程法. 我们通过下面的例题说明这种方法.

例 9. 有一个质点沿圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 向上移动. 在移动过程中，一方面它绕 z 轴以等角速度 ω 旋转，另一方面以等速度 v_0 沿 z 轴正方向移动. 开始时，即 $t=0$ 时，质点在 $(R,0,0)$ 处. 求质点运动的轨迹曲线的方程.

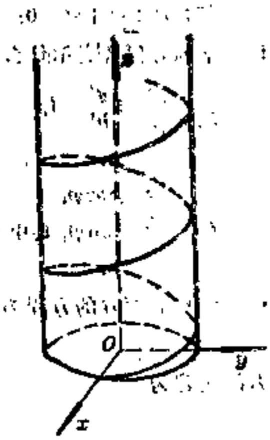


图 1.15

设在时间 t 时，质点所在点为 (x,y,z)，根据运动规律，我们可列出方程

$$\begin{cases}x=R\cos\omega t,\\ y=R\sin\omega t,\\ z=v_0 t.\end{cases}$$

当 t 从 0 开始变化，由上面三个方程得到一系列点 (x, y, z)，这些点构成轨迹曲线.

这里曲线的参数 t 表示时间，曲线上的点的坐标 x, y, z 是通过参数 t 给出的，称为曲线的参数方程. 参数也可以是角度，长度等等，本章中我们还要研究直线的参数方程.

§1 习 题

1. 在空间直角坐标系中，画出下列各点.

   $(0, 0, -4)$，$(0, 3, 4)$，$(\sqrt{2}, 1, 2)$.

2. 点 $P(x, y, z)$ 的三个坐标 x, y, z 中若有一个为 0，这个点在何处？若有两个为 0，这个点在何处？

3. 求两点 A, B 间的距离.

   (1) $A(-2, 1, 3)$，$B(0, -1, 2)$；

   (2) $A(-1, 2, -1)$，$B(-3, -5, 1)$.

4. 密度均匀的细杆重心在 $(1, -1, 5)$，一个端点为 $(-2, -1, 7)$. 求另一个端点的坐标.

5. 已知 $A(1, 2, 3)$，$B(-1, 2, 3)$；A, B, M 在一直线上，且 $AM:MB=-\dfrac{3}{2}$. 求点 M 的坐标.

6. 已知 $A(2, 6, 4)$，$B(3, 4, 12)$，$O(0, 0, 0)$，且知 M 是 AO 的中点，N 是 AB 的中点. 求 M，N 这两个点的坐标，并验证 $|MN|=\dfrac{1}{2}|OB|$.

7. 求下列球面的球心与半径：

   (1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$；

   (2) $2x^2+2y^2+2z^2-5z-8=0$.

8. 动点到点 $(2, 0, 0)$ 的距离为到点 $(-4, 0, 0)$ 的距离的一半，求动点轨迹方程.

9. 动点到点 $F_1(-a, 0, 0)$ 与到点 $F_2(a, 0, 0)$ 的距离的平方和等于常量 $4a^2$，求动点轨迹方程.

10. 在空间中的下列方程各表示什么曲面？并作出图形.

    (1) $x^2+4y^2=1$；　　(2) $x^2+y^2-2x=0$；

    (3) $y^2=2x$；　　(4) $x^2=1$；

    (5) $x^2+y^2+z^2=0$；　　(6) $x^2+z^2=0$.

11. 下列方程各表示什么曲线？

    (1) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=36,\\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25;\end{cases}$

    (3) $\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi,\\ z=6.\end{cases}$ 其中 φ 为参数.

12. 已知曲面 S 的方程为

$$(x-1)^2+y^2+z^2=36,$$

曲线 L 的方程为

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=36,\\ y+z=0.\end{cases}$$