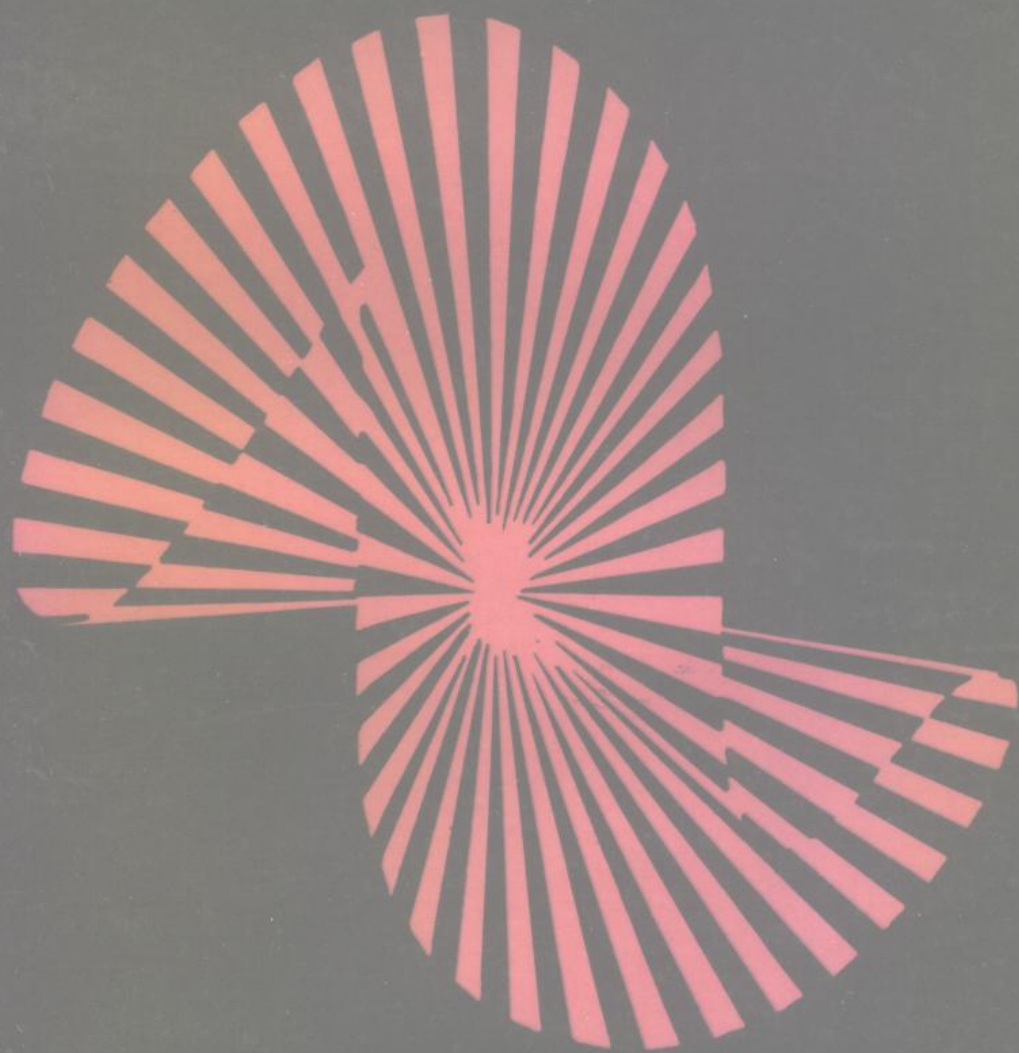


高等学校教材

内燃机轴系扭转振动

王 祺 主编

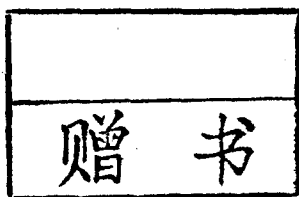


425287

高等学校教材

内 燃 机 轴 系 扭 转 振 动

王 祺 主 编



00425287

大 连 理 工 大 学 出 版 社

田宝荣

内 容 简 介

本书是在1985年国防工业出版社出版的《内燃机轴系扭转振动》一书基础上经过几年来的教学实践编写而成。

结合国内外目前的发展情况，书中除介绍扭振的基本理论、扭振当量系统转化、自由振动计算、强制振动计算及常规的测试和分析技术方法外，还介绍了有关矩阵分析方法以及新的测试和分析技术，同时着重阐述如何解决工程中的实际扭振问题，使读者达到理论与实践相结合的目的。

本书为大专院校内燃机专业或船舶动力装置专业的通用教材，或教学参考书，也可供从事内燃机和船舶动力装置设计、制造与使用的技术人员参考。

内 燃 机 轴 系 扭 转 振 动 Neiranji Zhouxi Niuzhuanzhendong

王 棋 主 编

大连理工大学出版社出版 (出版社登记证〔辽〕第16号)
(邮政编码: 116024) 辽宁省新华书店发行
大连理工大学印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 11 $\frac{1}{2}$ 字数: 281千字
1991年7月第1版 1991年7月第1次印刷
印数: 0001—2000册

责任编辑: 韩 露 封面设计: 葛 明
责任校对: 正 嫣

ISBN 7-5611-0370-0/TK·7

定价: 3.34元

出版说明

根据国务院国发〔1978〕23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这类工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年——1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共163种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次、多规格办学形式的需要。在教学内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前 言

本书系根据中国船舶工业总公司船舶动力教材委员会1988年12月教材会议上通过的《内燃机轴系扭转振动》大纲和教学基本要求，并在1985年第一版基础上重新整理修改而成。可作为高等院校内燃机专业或船舶动力装置专业本科通用教材。计划教学时数为40学时。

全书共七章。编写中运用辩证唯物主义观点，贯彻加强基础、理论联系实际和少而精的原则，在讲授中删去一些非重点教学内容，着重讨论集中质量线性系统在稳态运行下的“内燃机轴系扭转振动”的计算、测试及防振措施等基本内容和国内外近几年常用的有关扭转振动新技术。

学完本课程后，可达到下列要求：

1. 能对“内燃机轴系扭转振动”进行设计计算，掌握特性分析和实测的技能；
2. 能正确分析判断轴系扭振危害和故障原因及提出防振措施；
3. 能适应近代扭振技术、科研发展的需要。

参加本书编写的单位和同志有：

大连理工大学 王祺（第一章、第二章、第七章）；

上海海运学院 应启光（第三章、第五章）；

武汉水运工程学院 杨绳祖（第四章、第六章）。

大连理工大学王祺担任主编。上海交通大学朱孟华教授担任主审。

由于编写时间仓促，书中难免存在缺点和错误。希望读者提出宝贵意见，以便再版时订正。

编 者

1990. 10

目 录

绪言	1
第一章 扭转振动的基本理论	3
§ 1.1 单质量系统的扭转振动——扭摆	3
§ 1.2 双质量及三质量系统的自由扭转振动	15
§ 1.3 双质量系统的强制扭转振动	20
第二章 扭转振动的计算模型及当量转化	28
§ 2.1 扭转振动计算模型	28
§ 2.2 弹性参数的当量转化	29
§ 2.3 惯性参数的当量转化	39
§ 2.4 增、减速系统的当量转化	46
第三章 内燃机轴系的自由扭转振动计算	48
§ 3.1 多质量系统的自由扭转振动方程	48
§ 3.2 自由扭转振动的计算方法	53
附录 雅可比 (Jacobi) 方法	70
第四章 内燃机轴系扭转振动的激振及阻尼	75
§ 4.1 内燃机轴系装置激振的来源及其分析	75
§ 4.2 内燃机的激振及其计算	75
§ 4.3 内燃机轴系装置的激励	87
§ 4.4 内燃机轴系装置阻尼的分析及计算	96
第五章 内燃机轴系强制扭转振动计算	103
§ 5.1 多质量系统的强制扭转振动方程	103
§ 5.2 强制扭转振动的计算方法	106
§ 5.3 内燃机轴系轴段扭振应力的确定及其许用值	128
附录 滚振公式的推导	135
第六章 扭转振动的测试和分析	136
§ 6.1 扭转振动测试的目的和意义	136
§ 6.2 扭转振动测试仪器的基本原理及其类型	137
§ 6.3 扭转振动测试的测点布置	141
§ 6.4 扭转振动测试结果分析	143
第七章 避振与减振	156
§ 7.1 避振与减振方法概述	156
§ 7.2 扭振减振器的种类及其基本作用原理	164
参考文献	175

绪 言

内燃机轴系的扭转振动是影响该动力装置安全运行的重要动力性能之一。因此，世界多数国家的船舶检验机构规定：“大于150马力的内燃机装置的扭转振动计算和测量资料必须向该组织机构提出审批。”当扭转振动各项数据超出规范限值时，不准出厂使用。我国船舶检验机构也有上述规定。由此可见，内燃机轴系扭转振动这门科学在内燃机研究设计工作中占有重要的地位。它已成为参加这方面工作的技术人员必须掌握的理论知识。

内燃机的扭转振动是机械振动学科的一个分支，是内燃机动力学的一部分。在热动力装置发展初期，由于当时技术水平的限制，在相当长的一段时间内，在轴系的强度设计工作中，是把轴系按绝对刚性体来处理的。当时认为，轴系中应力的变化完全取决于载荷或其受力情况。但在19世纪末，在工业发达国家对内燃机的广泛应用后，由于在动力、海陆交通运输部门所使用的内燃机装置中，各种断轴事故不断发生，这就促使研究设计人员和工程师们，从实践中认识到，将轴系作为绝对刚性体来处理显然是不合理的。必须作为弹性体系进行研究。正是由于轴系具有弹性，才使轴系将产生扭转振动，造成各种断轴事故，从而导致对这项工作深入的理论研究和测量。

从19世纪末到20世纪初，各种断轴事故的分析报告及有关文章逐渐出现，对于轴系扭转振动的研究也逐渐深入。1916年在德国盖格尔(Geiger)发表了机械式盖格尔振动仪测量轴系扭转振动的文章后，扭转振动的研究开始了实测和试验阶段。到20世纪50年代，扭转振动的研究逐渐成熟，并成为内燃机动力装置的重要研究内容之一。

轴系装置之所以能产生扭转振动，其内因是轴系本身不但具有惯性，而且还有弹性，由此确定了其固有的自由扭振特性。而外因则是作用在轴系上、周期性变化的激振力矩，该力矩是产生扭振的能量来源。对于内燃机装置来说，激振力矩主要来自：(1)气缸内气体压力产生的激振力矩；(2)吸收功率部件所吸收的扭矩因不是定值而产生的激振力矩，如泵、螺旋桨等等。轴系按激振的频率进行强制振动，当激振频率与轴系固有频率相同时，就会产生“共振”现象，当扭振应力超过轴系所能承受的应力时，轴系将发生断裂。可见，研究轴系扭转振动，首先要分析轴系装置的扭转振动特性，在什么情况下将会发生危险以及掌握如何避免这种危险的实际措施。

有关轴系扭转振动的理论分析、计算和数值解法等问题的研究，目前已有比较完整的方法。其分析过程首先是将内燃机动力装置轴系转换成扭转振动的计算模型——当量系统。转换的基本原则是：

1. 惯量较大且较集中的部件作为非弹性惯量元件。
2. 惯量较小而分散的部件作为无惯量的弹性元件。
3. 阻尼可分为作用在弹性元件上的轴段阻尼和作用在惯性元件上的质量阻尼。
4. 激振力矩只作用在惯性元件上。

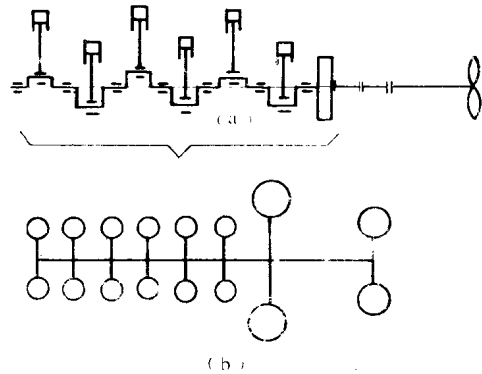
根据上述处理原则将实际轴系转换成集中质量系统——当量系统，如附图(a)及(b)所

示。这样的计算模型是具有 n 个集中质量的 $2n$ 阶方程组。显然，计算精度将与 n 的增加而更趋精确。但是质量个数 n 分得越多，将会引起繁重的计算工作量。

多质量系统的自由扭转振动计算，目前仍普遍地应用霍尔茨 (Holzer) 表格法或托列 (Tolle) 表格法。其次，是系统矩阵法，传递矩阵法等。多质量系统的强制扭转振动计算，目前普遍地采用能量法、放大系数法、系统矩阵法和传递矩阵法等。在电子计算机普及以前，为了避开对 $2n$ 阶方程组直接求解，大多采用共振与非共振分别运算的方法，其中包括能量法与放大系数法两种常用方法。从基本原理上说，这两种方法是完全一致的，都是建立在能量平衡的基础上，同属于共振计算的近似方法。但是分别运算法的重点考虑是共振工况下的扭振现象。对非共振区的振幅、应力等的考虑都极为粗糙。随着内燃机装置功率的不断增大，激振能量大大上升，尤其随着大阻尼减振部件的大量应用，对非共振区工况问题的要求更显突出。这就要求有对 $2n$ 阶方程组进行综合求解的运算方法。由于目前电子计算机的普及和应用，系统矩阵法、传递矩阵法对强制扭转振动方程组进行直接求解已是完全可行的了，其计算结果将是与实际轴系的振动形式相似的立体振型，这样使得上述问题得到了解决。但是，系统矩阵法只能作线性阻尼的计算，即阻尼力矩 ($M_c = -C\dot{\phi}$) 与速度成正比，而能量法与放大系数法则不受限制。

扭转振动计算结果的精确程度是取决于所采用的方法及与之对应的系统参数的精确性。目前，强制振动计算的精确度不如自由振动计算的精确度高，其主要原因是作用于轴系上的激振力矩以及轴系的阻尼参数难以准确的确定，尤其是后者，它涉及的因素广泛，以致于想要用纯数学的方法予以精确估算几乎是不可能的。为此，大多数采用从实践得到的经验公式，但各种经验公式都有一定局限性，不能完全准确地适用于各种类型的内燃机及其轴系装置，这将使强制振动计算造成较大误差。为了对内燃机轴系的扭转振动特性作出正确的评价，避免扭转振动破坏事故的发生，不仅在设计阶段应进行详细的扭振计算，制造完工后，还应及时进行扭振实测。同时，通过大量的扭振实测，可以积累实验数据，使原有的理论不断发展，进而指导新设计的内燃机及其轴系的扭转振动理论计算。可见，扭转振动这门科学的发展也是建立于理论与实践相辅相成互相促进的基础上。

电子计算机的广泛应用，精密测量分析技术的不断进步，带来了扭转振动研究的新的生命力。内燃机的日趋强化，轴系联接件的不断更新，扭转振动研究课题的不断深入，如二次振动、偏振、滚振及部分气缸熄火等扭振特性研究工作的逐步深入，所有这些都表明内燃机轴系扭转振动的研究必将进一步得到全面发展，并取得新的成就。



附图 1 实际轴系转换成的集中质量系统

第一章 扭转振动的基本理论

§ 1.1 单质量系统的扭转振动——扭摆

所谓扭摆，是由一根轴和一个圆盘所组成的单质量扭振系统，轴的一端固定，其自由端装一圆盘。图 1.1 中所示为扭摆及其示意图。扭摆是扭振系统中最简单的形式，对它的分析，可获得有关扭转振动的一些最基本的概念。

为了数学推导的需要，我们首先要将实际的扭摆予以模型化，因为圆盘的变形和轴的惯性都很小，故假定轴只有弹性没有惯性，圆盘只有惯性没有弹性。经过模型化的系统，称为当量系统，如图 1.1 (b) 所示。图中 I 表示圆盘的转动惯量， $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2$ 或 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ； e 表示轴的弹性参数柔度， $\text{rad}/\text{N}\cdot\text{m}$ 。

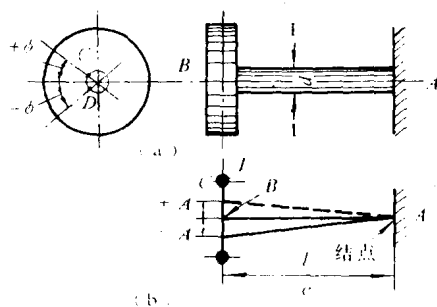


图 1.1
(a) 扭摆；(b) 示意图。

1.1.1 扭摆无阻尼自由振动

1. 运动方程的建立及其解

设在圆盘上加一力偶，使轴扭转一个角度，然后突然撤去这个力偶，由于轴的弹性和圆盘的惯性，这个系统就要产生扭振。因为不考虑阻尼，在 1-1 截面左方的分离体，只作用有圆盘的惯性力矩 S 和轴的弹性力矩 U 。根据虎克定律，可得出轴的扭转角公式

$$\varphi = \frac{U l}{G J_p} \quad (\text{rad})$$

式中 l —— 轴的长度， m ；

G —— 轴剪弹性模数， N/m^2 ；

J_p —— 轴截面极惯性矩， m^4 。

令 $e = \frac{\varphi}{U}$ ，则得 $e = \frac{l}{G J_p}$ ，即轴的柔度；

因而有 $U = -\frac{\varphi}{e}$ ($\text{N}\cdot\text{m}$)， $S = -I\ddot{\varphi}$ ($\text{N}\cdot\text{m}$)。

根据达朗贝尔定理

$$S + U = 0$$

$$\text{即} \quad I\ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} = 0 \quad \text{或} \quad \ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{Ie} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{令} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{Ie} \quad (1.2)$$

则(1.1)式可写成

$$\ddot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = 0 \quad (1.3)$$

这个微分方程的通解为

$$\varphi = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t} \quad (1.4)$$

由欧拉方程 $e^{i\omega_n t} = \cos\omega_n t + i\sin\omega_n t$, 上式可化为

$$\varphi = a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t \quad (1.5)$$

式中

$$a = c_1 + c_2, \quad b = i(c_1 - c_2)$$

式中 a 和 b 为常数, 由初始条件决定。为了求出常数, 将 (1.5) 式对时间 t 求导可得扭摆的速度

$$\dot{\varphi} = -a\omega_n \sin\omega_n t + b\omega_n \cos\omega_n t$$

设开始计算时刻 $t=0$, 扭摆的初角位移 $\varphi = \varphi_0$, 初角速度 $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ 。将这些条件代入上式对 a 、 b 求解, 得

$$a = \varphi_0, \quad b = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n};$$

$$\text{令 } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{a}{A} = \sin\varepsilon, \quad \frac{b}{A} = \cos\varepsilon$$

所以

$$a = A\sin\varepsilon, \quad b = A\cos\varepsilon$$

将其代入 (1.5) 式, 得

$$\begin{aligned} \varphi &= A[\sin\varepsilon \cdot \cos\omega_n t + \cos\varepsilon \cdot \sin\omega_n t] \\ \varphi &= A\sin(\omega_n t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\text{式中 } A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \varepsilon = \text{arctg} \frac{\omega_n \varphi_0}{\dot{\varphi}_0}$$

(1.6) 式是扭摆无阻尼自由振动时, 位移 φ 与时间 t 之间关系的基本公式。

式中 φ —— 圆盘角位移, rad;

A —— 圆盘角位移最大值, 即振幅, rad;

ω_n —— 扭摆自然圆频率, rad/s;

ε —— 初相位, rad.

2. 扭摆无阻尼自由振动特征

(1) 由 (1.6) 式可见, 扭摆的瞬时角位移 φ 随时间 t 按正弦规律变化。因此, 它属于简谐振动, 可用一参考圆来表示, 如图 1.2 所示。图中 $OB = A$, 以角速度 ω_n 等速回转, 则 OB

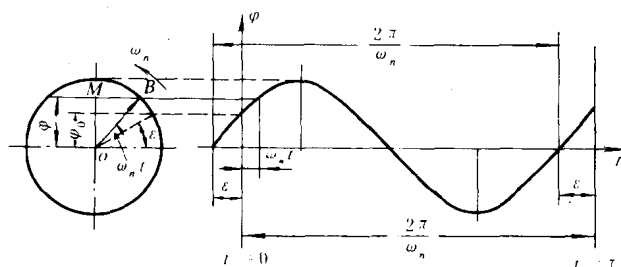


图 1.2

在 y 轴上投影就是角位移 $\varphi = A\sin(\omega_n t + \varepsilon)$, OB 回转一周, B 点在 y 轴上的投影 M 在 o 点两侧来回运动一次, 其所需时间, 就是一个周期 τ , 于是

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (\text{s}) \quad (1.7)$$

oB 的角速度就是圆频率 ω_n 。

每分钟振动次数

$$N = \frac{1}{\tau} 60 = \frac{60}{2\pi} \cdot \omega_n \quad (1.8)$$

所以

$$N \approx 9.55 \omega_n \text{ (次/分)}。$$

在扭振计算公式中，常用自然圆频率，但在日常分析及讨论中，常用每分钟的振动次数 N ，故式(1.8)给出了 N 与 ω_n 的简单换算关系，很有实用价值。因 $\omega_n = \sqrt{l/Ie}$ ， $e = l/GJ_p$ ，则 $\omega_n = \sqrt{GJ_p/I l}$ ，又因 $J_p \propto D^4$ ，所以， $\omega_n \propto D^2 \sqrt{G/I l}$ ，这就是说，当系统的尺寸和材料确定后，其自振频率 ω_n 就确定了，故自振频率是系统的固有特性； ω_n 与轴的直径 D 的平方成正比。所以，改变轴的直径对系统的自振频率有较大的影响；与轴的剪弹性模数 G 的开方成正比，即当尺寸一样时，钢轴的自振频率比铁轴的自振频率要高； ω_n 还与圆盘的惯性 I 及轴长度 l 的开方成反比。

(2) 根据(1.6)式可得如下关系：

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A \sin(\omega_n t + \varepsilon) \\ \dot{\varphi} &= A \omega_n \sin(\omega_n t + \varepsilon + \pi/2) \\ \ddot{\varphi} &= A \omega_n^2 \sin(\omega_n t + \varepsilon + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

由(1.19)式可见，扭摆在某瞬时的角位移 φ ，角速度 $\dot{\varphi}$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}$ 都是简谐运动，因此，都可用参考圆来表示。参考圆回转矢量的模各为 A 、 $\omega_n A$ 及 $\omega_n^2 A$ 。它们之间的相位关系为：速度矢量比位移矢量超前 $\pi/2$ ，加速度矢量比位移矢量超前 π 。因这三个矢量都是以相同的角速度 ω_n 同方向等速度回转，故它们之间的相位差是固定不变的，如图1.3所示。

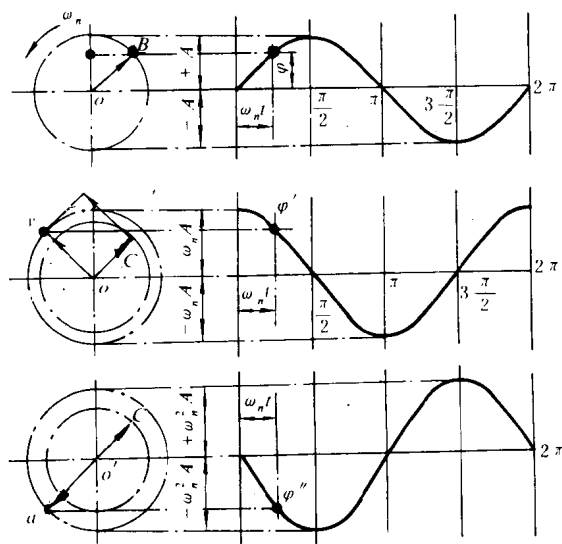


图 1.3

(3) 讨论振幅 A 与初相位 ε 的决定因素。当 $t=0$ 时，(1.6)式中

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \varepsilon = \arctg \frac{\omega_n \varphi_0}{\dot{\varphi}_0}$$

由此可见 A 及 ε 都决定于初始条件(φ_0 及 $\dot{\varphi}_0$)，这是自由振动的共同特性。

如果我们在扭摆的圆盘上加一个静力偶 M_0 ，则圆盘位移为 $\varphi_0 = M_0 l / G l_p$ ，然后突然取消力偶 M_0 ，并立刻计算时间，这时 $t=0$ ，初速度 $\dot{\varphi}_0 = 0$ ，所以

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_n}\right)^2} = \varphi_0 = \frac{M_0 l}{G J_p}$$

由此可见，无阻尼自由振动的振幅 A 大小取决于初始激振力矩 M_0 ，至于初相位 ε ，完全取决于在什么时候开始计算时间，故 ε 对振动特性没有影响。

1.1.2 扭摆有阻尼的自由振动

实际上任何系统经初始激振开始自由振动后，振幅都将逐渐地减小，最终停止下来，它

不可能无休止地振动下去。这说明有某些抑制振动的因素存在，它消耗初始激振所给予系统的能量。当能量消耗殆尽时，振动也就停止了。这个对振动起衰减作用的因素统称为阻尼，但阻尼的种类不同，对运动的影响也有差异。对扭摆情况，阻尼是空气对圆盘运动时的阻力以及轴在扭转变形时对材料分子间的摩擦阻力，前者是系统部件与外界介质所产生的摩擦阻力，故叫外阻尼；后者是材料内部分子间的摩擦阻力，故叫内阻尼。扭摆系统主要就是考虑这两种阻尼。它是一种与振动方向相反的抵抗力矩

$$M_c = -C\dot{\varphi} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (1.10)$$

式中 C 为一常数称为阻尼系数，这种阻尼称为线性阻尼。更确切地讲，实际系统中的阻尼都不是这样简单，有些只能说是近似线性，有些则完全不是线性，但线性阻尼问题的处理比较方便，而非线性阻尼问题则复杂得多，因而在扭转振动的分析中，除了特殊的情况外，一般都把阻尼力矩假定为与速度成正比，这样可使数学演算大大简化。

当扭摆为有阻尼自由振动时，各力矩的表示如图 1.4 所示。按达朗贝尔定理

$$S + M_c + U = 0 \quad (1.11)$$

$$\text{即} \quad I\ddot{\varphi} + C\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} = 0 \quad (1.12)$$

令 $2n = \frac{C}{I}$ ， $\omega_n^2 = \frac{1}{Ie}$ ，代入上式，得

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega_n^2\varphi = 0 \quad (1.13)$$

这个微分方程的辅助式为

$$x^2 + 2nx + \omega_n^2 = 0$$

其两个根为 $x_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ ，故式 (1.13) 的通解为

$$\varphi = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t} = c_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} + c_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t}$$

所以

$$\varphi = e^{-nt} [c_1 e^{\sqrt{n^2 - \omega_n^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - \omega_n^2} t}] \quad (1.14)$$

式中待定常数 c_1 与 c_2 决定于振动的初始条件。(1.14) 式的性质决定于根式 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是实数、零还是虚数。当 $n > \omega_n$ ，根式 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是实数，称大阻尼。当 $n < \omega_n$ ，根式 $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 是虚数，称为小阻尼。两者之间有个过渡状态， $n = \omega_n$ ，称为临界阻尼。现分两种情况来讨论：

(1) 当 $n \geq \omega_n$ ，这时 x_1 及 x_2 都是负值，则公式 (1.14) 代表两条衰减指数曲线之和，它们没有振动的特征，即这时阻尼很大。当经初始激振后，扭摆缓慢地回到平衡位置，而没有产生振动。

(2) 当 $n < \omega_n$ ， $\sqrt{n^2 - \omega_n^2}$ 为虚数，可写为 $i\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$ ，则公式 (1.13) 可写成

$$\varphi = e^{-nt} [c_1 e^{(i\sqrt{\omega_n^2 - n^2})t} + c_2 e^{(-i\sqrt{\omega_n^2 - n^2})t}]$$

上式方括号内式子与公式 (1.4) 的形式完全相同。因此，经过演化可得与 (1.6) 式完全相似的形态，即

$$\varphi = e^{-nt} A \sin[\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \varepsilon] \quad (1.15)$$

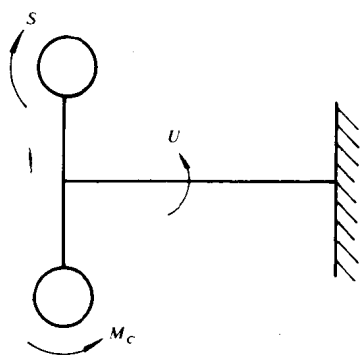


图 1.4

由(1.15)式可知系统振动已不再是等幅的简谐振动,而是振幅被限制在曲线 $\pm Ae^{-nt}$ 之内随时间不断衰减的衰减振动。当 $t \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0$,振动最终将消失。图1.5表示这种衰减的正弦波形曲线。初相位 ε 与曲线特性无关。

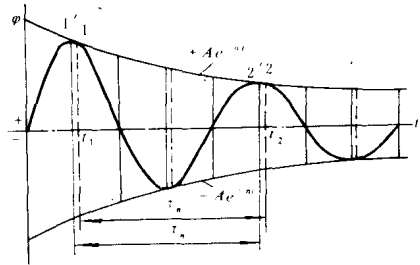


图 1.5

由公式(1.15)及图1.5可以看出:扭摆有阻尼自由振动的频率为 $\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$,所以,系统的自振频率不仅与系统的弹性参数 I 和 e 有关,还受阻尼 n 的影响,比没有阻尼的固有频率 ω_n 为小。

阻尼对自由振动的影响有两个方面:

(1) 它使系统振动的周期 τ_n 略有增长

严格地说,扭摆衰减振动已不是周期运动,因为扭摆经过一段时间后,再也不能重复原来的运动。但是衰减振动的周期 τ_n 固定不变,如下式所示

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} \quad (1.16)$$

由于阻尼的作用,振动的周期 τ_n 增长了。但因为小阻尼 $n < \omega_n$,在自然环境中 $n/\omega_n \ll 1$,所以对周期的影响不大。由(1.16)式

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{n}{\omega_n})^2}} = \tau \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{n}{\omega_n})^2}}$$

式中 $\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}$ 为无阻尼自由振动的周期。

当阻尼比较小时 $\frac{n}{\omega_n} \ll 1$,

$$\tau_n \approx \tau [1 + \frac{1}{2} (\frac{n}{\omega_n})^2] \quad (1.17)$$

例如在 $\frac{n}{\omega_n} = 0.05$ 时, $\tau_n = 1.00125\tau$;而在 $\frac{n}{\omega_n} = 0.20$ 时, $\tau_n = 1.02\tau$ 。所以在阻尼较小时,对周期的影响可以忽略不计。

(2) 振幅按几何级数衰减

从图1.5可见,横轴上下方的两条对数曲线是衰减正弦曲线的包络线,曲线与包络线相切的两个相邻点1及2处的振幅值之比为

$$\eta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{Ae^{-nt_1}}{Ae^{-n(t_1 + \tau_n)}} = e^{n\tau_n} \quad (1.18)$$

这说明,振幅按几何级数减小,因为 $e^{n\tau_n}$ 是个常数。

式中 η 称为减幅系数, n 称为衰减系数。 n 越大表示阻尼越大,振幅衰减得越快。当 $n/\omega_n = 0.05$ 时, $\eta = 1.37$, $A_2 = A_1/1.37 = 0.73A_1$,即振动一周期后振幅已减少27%,可见衰减是显著的。或(1.18)式两边取对数时,得 $I_n(A_1/A_2) = n\tau_n$ 。

所以

$$n = \frac{1}{\tau_n} \ln \frac{A_1}{A_2} \quad (1.19)$$

公式(1.19)对实验工作很有实用价值。因为,如果我们用仪器量出 A_1 及 A_2 ,测出 τ_n 就可以

求出 n ，也就是求出了阻尼系数

$$C = 2nI$$

公式(1.18)对任意两相邻点都是适用的，因为

$$\frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdots \frac{A_{k-1}}{A_k} = \frac{e^{-nt_1}}{e^{-nt_2}} \cdot \frac{e^{-nt_2}}{e^{-nt_3}} \cdots \frac{e^{-nt_{k-1}}}{e^{-nt_k}}$$

即

$$\frac{A_1}{A_k} = \frac{e^{-nt_1}}{e^{-nt_k}} = e^{n(t_k - t_1)} = e^{n(k-1)\tau_n}$$

所以

$$n = \frac{1}{(k-1)\tau_n} \ln\left(\frac{A_1}{A_k}\right) \quad (1.20)$$

因此，可以以两个任意点的 A_1 及 A_2 ，测量出两点之间的时间 $t_k - t_1 = (k-1)\tau_n$ 也可以求出阻尼系数。

为使(1.19)式便于应用，现作如下演化：

令
$$\delta = m_n = \frac{2\pi n}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}$$

因为
$$n = \frac{C}{2I}, \quad \omega_n^2 = \frac{1}{Ie}$$

所以
$$\delta = \frac{2\pi \frac{C}{2I}}{\sqrt{\frac{1}{2e} - \left(\frac{C}{2I}\right)^2}} = \frac{\pi C}{I \sqrt{\frac{1}{Ie} - \left(\frac{C}{2I}\right)^2}}, \quad \delta^2 = \frac{\pi^2 C^2}{\frac{1}{e} - \frac{C^2}{4}}$$

因此，得阻尼系数 C

$$C = \sqrt{\frac{1}{e \left[\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{4} \right]}} \quad (1.21)$$

由上可见，从衰减正弦曲线上量得 A_1 及 A_2 后，求出 $\delta = \ln A_1 / A_2$ 值，代入(1.21)式即可求得阻尼系数 C 。式中 I 及 e 为扭摆转动惯量和柔度。在实测中，可量取波峰值，即图1.5中的 $1', 2', \dots$ 。

1.1.3 扭摆有阻尼强制振动

这是扭摆振动问题中最实际的情况。在系统上作用一持续的激振力矩，系统被迫按激振力矩频率进行振动，并存在弱阻尼。阻尼力矩与速度成正比，力系的组成，如图1.6所示。按达朗贝尔定理

$$S + M_c + U + T = 0$$

式中 $T = M \sin \omega t$ —— 激振力矩，其中

M —— 激振力矩的幅值；

ω —— 激振力矩圆频率。

所以
$$I \ddot{\varphi} + C \dot{\varphi} + \frac{\varphi}{e} = M \sin \omega t \quad (1.22)$$

令
$$\omega_n^2 = \frac{1}{Ie}, \quad 2n = \frac{C}{I}, \quad h = \frac{M}{I}$$

则(1.22)式可写成

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega_n^2\varphi = h \sin \omega t \quad (1.23)$$

这是常数非齐次二阶线性微分方程式，它的全解由两部分组成，其通解为

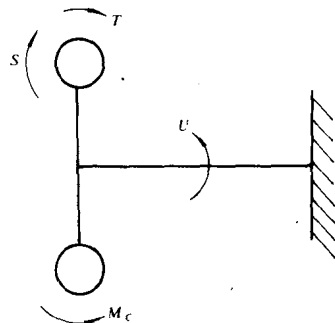


图 1.6

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \varphi = 0$$

$$Ae^{-n't} \sin[\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \varepsilon]$$

即

这就是扭摆有阻尼自由振动的解。它的特解可写成

$$\varphi = A_1 \sin(\omega t - \psi) \quad (1.24)$$

将(1.24)式进行一次及二次微分, 代入(1.23)式可得

$$-A_1 \omega \sin(\omega t - \psi) + 2n\omega A_1 \cos(\omega t - \psi) + A_1 \omega_n^2 \sin(\omega t - \psi) = h \sin \omega t$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \sin(\omega t - \psi) + 2n\omega A_1 \cos(\omega t - \psi) = h \sin \omega t$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2) A_1 [\sin \omega t \cdot \cos \psi - \cos \omega t \cdot \sin \psi]$$

$$+ 2n\omega A_1 [\sin \omega t \cdot \sin \psi + \cos \omega t \cdot \cos \psi] = h \sin \omega t$$

所以

$$[(\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \cos \psi + 2n\omega A_1 \sin \psi] \sin \omega t$$

$$+ [2n\omega A_1 \cos \psi - (\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \sin \psi] \cos \omega t = h \sin \omega t$$

两边对应项相等, 得

$$\begin{cases} (\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \cos \psi + 2n\omega A_1 \sin \psi = h & (1) \\ (\omega_n^2 - \omega^2) A_1 \sin \psi - 2n\omega A_1 \cos \psi = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{两式平方相加, 得}$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2) A_1^2 + 4n^2 \omega^2 A_1^2 = h^2$$

所以

$$A_1 = \frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \quad (1.25)$$

从(2)式可得

$$\psi = \text{arctg} \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (1.26)$$

因此, 扭摆有阻尼强制振动微分方程式(1.25)的全解为

$$\varphi = Ae^{-n't} \sin[\sqrt{\omega_n^2 - n^2} t + \varepsilon] + A_1 \sin(\omega t - \psi) \quad (1.27)$$

由(1.27)式可见, 第一项就是扭摆有阻尼自由振动中所讨论过的衰减正弦波; 第二项是正常的正弦波。所以, 扭摆有阻尼强制振动是由这二项叠加而成。当 $A_1 \gg A, \sqrt{\omega_n^2 - n^2} \gg \omega$ 时, 其情形如图1.7所示。

可以看出, 有阻尼自由振动只在开始的过渡阶段存在, 以后它就消失了。因此, 只需考虑第二项正常的有阻尼强制振动, 它有个特点, 即振幅并不因阻尼的存在而衰减, 这是因为激振力矩不断对系统做功的结果。对第二项的分析, 可以引出有阻尼强制振动的基本概念。

先来看一下强制振动振幅 A_1 :

$$A_1 = \frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}$$

$$= \frac{h}{\omega_n^2 \sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + \frac{4n^2}{\omega_n^2} (\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad (1.28)$$

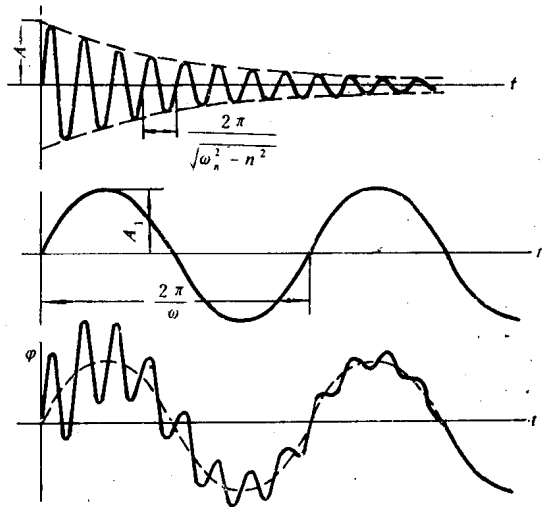


图 1.7

因为

$$\frac{h}{\omega_n^2} = \frac{M}{I} \cdot Ie = Me = A_0$$

A_0 称静振幅, 这是由 M 作用在扭摆上所产生的静变形。令 $\frac{4n^2}{\omega_n^2} = \delta^2$, 它仍间接代表阻尼, 则 (1.28) 式成为

$$A_1 = \frac{A_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + \delta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad (1.29)$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + \delta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad (1.30)$$

A_1/A_0 为强制振动振幅与静振幅之比, 称为放大系数, 用 m 表示在各种不同阻尼之下, 放大系数与频率比之间的关系, 即 $m = A_1/A_0 = f(\omega/\omega_n)$

如图 1.8 所示。

从 $m = A_1/A_0 = f(\omega/\omega_n)$ 关系曲线可引出如下重要概念:

(1) 当 $\omega/\omega_n = 1$, 即激振频率等于自振频率时, 称其为共振。共振时, 如阻尼为零即 $\delta = 0$, 则共振振幅将达到无穷大, 即使有阻尼存在, 振幅比静振幅仍然要大几倍至几十倍。这就是为什么在工程上如此重视共振的原因。

(2) 由于阻尼存在, 即 $\delta \neq 0$, 使振动特性发生了一些重要的变化。

如 $\delta \neq 0$, 共振时 $\omega/\omega_n = 1$, 公式 (1.30) 变成 $A_1/A_0 = 1/\delta$, 这就是说, 由于阻尼存在, 共振振幅变为有限值, 且与阻尼成反比。因此, 在系统中增加阻尼可以控制共振振幅, 这为减振提供了一个重要的途径; 又因 $A_1/A_0 = 1/\delta$, 可写成 $A_1 = A_0 \cdot 1/\delta$, 即放大系数 $m = 1/\delta$, 由此可见, 阻尼越大, 放大系数越小; 反之, 放大系数就越大。这就是说, 可用放大系数来表征系统的阻尼, 即 $A_1 = mA_0$ 。利用此式, 可以进行强制振动计算, 这将在后文 5.2.3 中详加讨论。

又如图中曲线所示, 远离共振点处, 无论阻尼大小, 曲线都互相靠近。由此可见, 阻尼如在共振点附近, 对振幅的影响则十分显著; 而远离共振点时, 其衰减作用将迅速下降。又如, 当阻尼存在时, 曲线的峰值并不出现在 $\omega/\omega_n = 1$ 的共振点处, 而是在此之前。阻尼越大, 出现越早, 这可从对 (1.30) 式求极值的办法中求出峰值所对应的 ω/ω_n 值。(1.30) 式的极值位置取决于根号内的式子, 为简化起见,

令 $y = [1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + \delta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2; \quad x = \frac{\omega}{\omega_n}$

则 $y = [1 - x^2]^2 + \delta^2 x^2$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 即 $4x^2 - 2(2 - \delta^2)x = 0$

由此可得 $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{2}}$

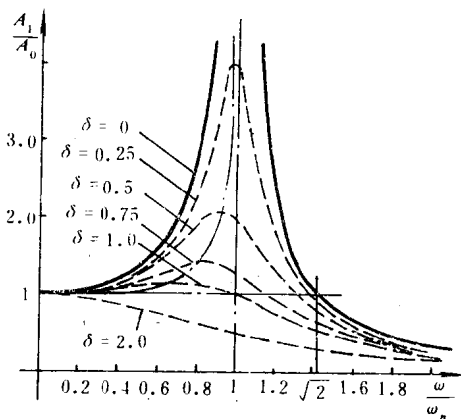


图 1.8

即当 $\delta \neq 0$ 时, 峰值所对应的 $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$, 这时峰值为

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 - \frac{\delta^4}{4}}}$$

因为一般轴系 δ 都较小, 均在 $\delta < 0.1$ 的范围, 所以在一般扭振分析中, 均近似地将其看成为峰值出现在 $\omega/\omega_n = 1$ 处, 峰值为 $A_1/A_0 = 1/\delta$. 本书在以后的讨论中均作如此处理。

(3) 激振频率与自振频率的比值 ω/ω_n 对振动特性有着重要的影响

即使无阻尼 $\delta = 0$, 当 $\omega/\omega_n = \sqrt{2}$ 时, 放大系数 $A_1/A_0 = 1$. 而当 $\delta \neq 0$, $\omega/\omega_n = \sqrt{2 - \delta^2}$ 时, $A_1/A_0 = 1$. 无论阻尼为何值, 只要 $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, 都能使强制振动振幅小于静振幅, 即 $A/A_0 < 1$.

由此可见, 调整频率比 ω/ω_n , 以避免强共振是解决扭振问题的另一重要途径。激振频率 ω 是由内燃机转速所决定, 即受内燃机用途所要求, 因此, 调整频率比, 实际上是指调整自振频率, 亦即改变系统的转动惯量 I 及柔度 e 来调频。

最后, 我们来讨论相位角 ψ . 这是激振力矩与位移之间的夹角, 其值可由 (1.26) 式确定。

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{\delta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

在无阻尼强制振动中, ψ 只有 0 与 π 两种情况, 因此可以用振幅值正或负来表示。在有阻尼强制振动中, 位移的振幅值永远为正值 (见 (1.29) 式), 而它与激振力矩振幅之间的相位差则由上式来决定。

ψ 角受阻尼及频率的影响, 其一个重要的性质是不论阻尼值如何, 当共振时, 即 $\omega/\omega_n = 1$ 时, 相位角总是 $\pi/2$, 而且在共振点附近, ω/ω_n 对 ψ 的影响比较显著。在 $\omega/\omega_n < 1$ 时, δ 愈大, ψ 亦愈大, 如图 1.9 所示。

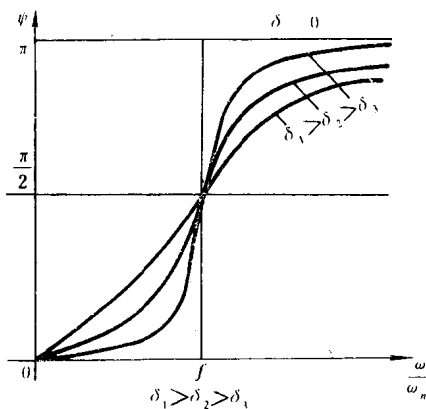


图 1.9

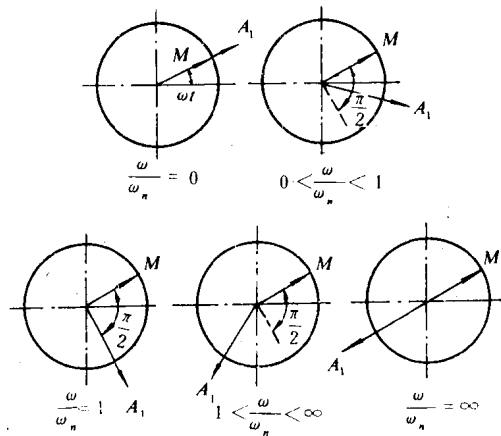


图 1.10

当 ω/ω_n 从 0 变化到 ∞ 时, ψ 值变化如下: