

应用弹性力学

奚绍中 郑世瀛 编

高等学校试用教材

中国铁道出版社

52.52
485

高等学校试用教材

应 用 弹 性 力 学

奚绍中 郑世瀛 编

中 国 铁 道 出 版 社

1981年·北京

内 容 简 介

本书系高等学校工程专业试用教材。共分十章，前六章为基础部分，介绍弹性力学基本概念、理论及方法；后四章按工程结构及机械设计的需要介绍开口和闭口薄壁杆件约束扭转理论，以及弹性地基上板的弯曲理论。具有材料力学和结构力学基本知识的人员，均能比较顺利地阅读本书。

本书可供大专院校结构、机械专业师生及有关的科技人员学习、参考。

2F10/25
3

高等学校试用教材

应 用 弹 性 力 学

奚绍中 郑世瀛 编

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：19.75 字数：488千

1981年12月第1版 1981年12月第1次印刷

印数：0001—10,000册 定价：2.05元

前 言

本书是为高等院校工程专业编写的教材，也可供工科院校有关教师以及科技人员参考。书中第一章至第六章为基本部分，讲述有关弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法；第七章至第十章为专题部分，讲述开口和闭口薄壁杆件的约束扭转理论以及弹性地基上板的弯曲等问题。基本部分中标题处注有“*”号的内容以及专题部分的内容，可根据教学情况和专业的要求选择讲授。

在编写本书时，我们注意了抽象思维与物理概念的结合，照顾到与先修课程的衔接；在阐述具体问题时，注意了科学性和严密性，又力图做到深入浅出，便于读者自学。对于初学者不易理解或可能引起误解的地方，都作了必要的详细论述。

本书的专题部分是根据桥梁、铁道工程和起重机械等设计计算中提出的新要求而编写的，引用了一些新的理论。例如闭口薄壁杆件约束扭转问题的分析，采用了考虑周边变形的理论，并考虑横隔板的作用。对于弹性地基，不采用文克勒假设，而将其作为半无限体处理。

本书的第一章至第六章系由郑世瀛同志编写，第七章至第十章系由奚绍中同志编写。全书经兰州铁道学院王业敏同志审阅。兰州铁道学院、北方交通大学、长沙铁道学院、上海铁道学院、大连铁道学院和铁道兵工程学院的同志也对初稿提供了宝贵的意见。在本书编写过程中曾得到西南交通大学固体力学教研室和数学教研室许多同志的大力支持和协助。编者在此向上述各单位的同志深表谢意。

尽管本书的初稿曾经经过试用，但限于编者的水平，书中一定会存在不少缺点和欠妥之处，请读者提出宝贵意见。

编者 于西南交通大学

一九八〇年十月

目 录

基 本 理 论

第一章 绪论及基本概念.....	1
§ 1-1 绪论	1
§ 1-2 基本假设	1
§ 1-3 几个基本概念	3
§ 1-4 弹性力学中的空间问题和平面问题	6
§ 1-5 受力体内一点处的应力状态	7
§ 1-6 边界条件	10
§ 1-7 圣维南原理	11
§ 1-8 弹性力学命题概述	14
习 题	14
第二章 平面问题 (一) —— 直角坐标解答.....	16
§ 2-1 在直角坐标系中的基本方程	16
§ 2-2 应力函数·双调和方程	25
§ 2-3 用多项式求解平面问题	26
§ 2-4 承受端荷载的悬臂梁	32
§ 2-5 匀布荷载作用下的简支梁	37
§ 2-6 用差分法求解深梁内的应力	41
§ 2-7 富里哀级数的应用	49
习 题	59
第三章 平面问题 (二) —— 极坐标解答.....	64
§ 3-1 以极坐标表达的基本方程	64
§ 3-2 受力平板上小圆孔的影响·应力集中系数	69
§ 3-3 楔形体的应力分析及其在变截面构件中的推广和应用	74
§ 3-4 边界上受集中力及局部分布力作用的半无限平面问题	80
习 题	88
第四章 用有限单元法解答平面问题.....	90
§ 4-1 概述	90
§ 4-2 单元位移场·解答的收敛性	91
§ 4-3 单元上外力的简化	95
§ 4-4 单元刚度矩阵.....	100
§ 4-5 结点平衡方程组——总刚度矩阵的组集.....	101
§ 4-6 算例.....	104

§ 4-7 单元划分中的几个问题	111
§ 4-8 附录: 矩阵代数的基础知识	114
习 题	120
第五章 空间 (三维) 问题	122
§ 5-1 平衡微分方程	122
§ 5-2 几何方程·相容方程	123
§ 5-3 轴对称问题的平衡方程、相容方程和应力函数	126
§ 5-4 界面上受集中力作用时半无限体内的应力和位移	130
§ 5-5 界面上承受局部分布荷载时半无限体内的应力与位移	134
习 题	139
第六章 等直杆的自由扭转	140
§ 6-1 自由扭转与约束扭转	140
§ 6-2 等直杆自由扭转时的应力和位移	141
§ 6-3 矩形截面杆的自由扭转	147
§ 6-4 小挠度薄膜比拟方法	152
§ 6-5 开口薄壁截面杆的自由扭转	155
§ 6-6 闭口薄壁截面杆的自由扭转	159
习 题	161

• 专 题 部 分 •

第七章 矩形板的弯曲	163
§ 7-1 概述	163
§ 7-2 基本假设	167
§ 7-3 受弯板的挠度微分方程	168
§ 7-4 边界条件·静力等效扭矩	170
§ 7-5 四边简支矩形板的重三角级数解 (纳维埃解)	173
§ 7-6 对边简支矩形板的单三角级数解 (李维解)	176
§ 7-7 叠加法	179
§ 7-8 能量法	181
习 题	185
第八章 开口薄壁杆件的约束扭转	188
§ 8-1 概述	188
§ 8-2 约束扭转正应力的分析	192
§ 8-3 主极点和主零点位置的确定	196
§ 8-4 约束扭转正应力所对应的内力——双力矩	200
§ 8-5 约束扭转时的剪应力及其相应的内力	201
§ 8-6 扭转角微分方程式及其解和初参数方程式	204
§ 8-7 引起薄壁杆件约束扭转之外力和应力计算示例	214
§ 8-8 壁厚的影响	218
§ 8-9 有缀板之开口薄壁杆件的约束扭转问题	224

§ 8-10 算 例	229
习 题	237
第九章 闭口薄壁杆件的约束扭转	243
§ 9-1 概述	243
§ 9-2 广义坐标法的原理	244
§ 9-3 横截面上的广义内力	252
§ 9-4 初参数方程式和初参数影响函数表	255
§ 9-5 外力的影响函数	257
§ 9-6 边界条件示例及初参数的确定	259
§ 9-7 阶梯状变截面杆的计算	265
习 题	266
第十章 弹性地基上的矩形板	268
§ 10-1 弹性地基的空间模型和弹性地基上板的弯曲微分方程	268
§ 10-2 弹性地基上板弯曲问题中的普通微分方程	271
§ 10-3 四边自由的板在双对称荷载下的近似计算	279
§ 10-4 算例——四边自由的板在匀布荷载下的近似计算	288
§ 10-5 四边自由的弹性地基上板的一般加载情况	291

第一章 绪论及基本概念

§ 1—1 绪 论

《弹性力学》作为固体力学的一个分支，其基本任务与《材料力学》、《结构力学》相仿，也是分析构件或结构在弹性范围内工作时的应力、变形和位移，为强度和刚度计算提供依据。然而，《弹性力学》的研究对象却要广泛得多，处理问题的方法也严谨得多。

《材料力学》和《结构力学》的基本研究对象是杆件和杆件系统，而《弹性力学》的研究的对象将包括杆、板、壳、块体及由它们所组成的结构，如土建工程中的整体式桥跨、隧道及其它地下结构物、挡墙、基础和地基等等；机械工程方面的如起重、运输机械和动力机械中的许多零部件，诸如机壳、大轴、机座、底盘等等。

为简化工程结构或构件的受力、变形和位移问题的分析，使之满足一般工程设计计算要求，在《材料力学》和《结构力学》中，不但采用简化了的计算图式，而且对结构或构件的受力和变形特征作出某些假定（诸如平截面假设、单向受力假设，等等）。这种处理问题简便、实用的方法，将来在工程设计中仍有其重要意义。当然，这样获得的解答往往比较粗略，通常称之为“初等解答”。

在《弹性力学》里研究问题的时候，尽管也需将实际受力物体抽象成为计算简图，同时引入某些基本假设（见§ 1—2），但对受力物体内部的应力状态和变形状态通常都不作假设，而且静力平衡条件及变形几何关系均从弹性体的无限小单元体引出（微分形式），一般不从整体或整个截面引出（积分形式）。这样，虽然推演过程和所得的解答比较复杂，但能更准确地反映物体内部受力和变形的实际情况，故其解答的精度一般比初等解答更高。对于某些问题便可依此判断初等解答的误差，并可指出在一定的计算精度要求下初等解答的适用范围。《弹性力学》更重要的应用还在于它能解决初等理论所无法解决的工程实际问题，诸如短梁中的应力、局部应力、非圆截面杆的扭转、基础和地基中的应力和位移，等等。《应用弹性力学》中对于一些复杂的问题（例如本教材第七章到第十章中所列的内容），为使分析简化，也将引进某些变形假设和关于应力状态的假设。例如，在分析薄板的弯曲问题时，假设沿板厚的直线在板发生弯曲变形时仍保持为直线，并且垂直于挠曲面（称为直法线假设）。这种假设虽与《材料力学》中的平截面假设相当，但它的限制性却小得多。

随着计算技术和设计程序的现代化，《弹性力学》在工程设计中的应用日益广泛，特别是一些新型结构的设计，更离不开力学中的这一分支。因此，设置本课程是现代化建设事业的需要，也是加强基础理论教育的一个重要环节。

§ 1—2 基本假设

实际物体的特征及其受力后所表现的力学性能相当复杂，因而在理论分析中不可能完全如实地加以描述，必须略去一些次要方面，对研究对象作出能够反映其主要方面的基本假

设。

《理论力学》中的“刚体”，《材料力学》和《结构力学》中的“线性弹性体”等，都是根据一定的条件从实际问题中抽象、简化而得的“力学模型”。在本教材所涉及的范围内，采用与《材料力学》中相同的基本假设，作为分析各种问题的共同基础，这些假设大致分为两类。

第一类假设——物理假设

1. 均匀连续假设

所谓均匀性假设，就是认为物体各点处的材料都具有相同的性质。因此，从任何一点处取出的微小单元体，其性质均可作为整体的“代表”，对它进行分析后所引出的结论可应用于整个物体之中。所谓连续性假设，就是认为物体所占据的空间内不存在任何空隙。因此，任何物理量，如应力、应变等在物体内部均是连续变化的，从而可用点的坐标之连续函数加以表达。据此就可以利用微积分的数学手段来分析物体受力后各物理量的变化。

显然，这种抽象后的模型与实际物体的构造特征是有差异的。众所周知，在客观世界中，不均匀、不连续是绝对的。然而，实践证明，只要物体的尺寸远远大于其中的颗粒（或晶粒）和空隙的尺寸，并且它们的分布比较均匀（亦即只要物体相对均匀、相对连续），那末，基于这种假设而得到的弹性力学解答，其精度还是很高的，它确能反映问题的主要方面。

2. 线性和完全弹性假设

所谓完全弹性是指物体一经解除外力或其它致使变形的因素，它就能立即恢复其原先的形状和尺寸，而没有任何残留变形。因此，在物体内部，一定的应变状态必对应着一定的应力状态。

所谓线性的完全弹性体，则是指应力与应变呈线性关系的完全弹性体。对于这种物体可利用虎克定律将应力与应变作线性转换，二者之间相互转换所涉及的弹性系数不随应力或应变的大小而异，这就是弹性常数。工程上常用拉压弹性模量（ E ）、剪切弹性模量（ G ）和泊桑比（ ν ）来表示它们。

由实验可知，对于大多数工程材料，当应力不超过一定限度时，这个假设基本上符合事实。

3. 各向同性假设

这个假设认为物体在各个方向上弹性性质相同。具有这种性质的弹性体称为各向同性体。

木材、竹材显然是各向异性的，经过单向碾压或拉拔的钢材，在不同方向上其性质也有所差异。但是，一般说来，金属材料由于其晶粒的尺寸很小而数目极大，且排列又是随机的，所以尽管每个晶粒是各向异性体，然而如此构成的整体却具有统观的各向同性的性质。具有这种性质的物体，在任何方向上均存在相同的应力-应变关系。因此，对于各向同性的线性弹性体，就可任何方向上应用形式相同的虎克定律，并具有相同的弹性常数。

以上的几个假设统称为理想弹性体假设。在本教材中把所要研究的对象，即实际的受力物体，都当作理想弹性体，整个分析就是建立在这种力学模型的基础之上的。

当然，在一般的受力物体中还有着初应力。只有当初应力与荷载或温度变化等引起的

应力相叠加后的总应力不超过材料的比例极限时，按弹性力学所得的结果才是正确的。为了简单起见，本书将认为初应力为零。

第二类假设——几何假设

弹性体在受力的同时必然发生相应的变形和位移，其初始的几何形状和尺寸随之改变。因此，严格说来，在研究弹性体的平衡问题时，应以变形后的情况为准。但由于在一般情况下弹性体的变形和位移都很小，建立平衡条件时是否考虑变形和位移，在实际上差别不大。因此为了简化数学分析，通常都略去变形和位移的影响，把弹性体作为“刚体”来列出平衡方程，亦即采用了所谓的硬化原理。同样，在分析变形或位移时，也在变形或位移微小的条件下，作几何上的简化，并略去高阶微量（例如，应变的乘积与应变本身的值相比，前者即可略去）。

这种应用硬化原理或能够利用上述数学上简化的前提是变形或位移微小，它也是今后分析问题的基础之一。某些受力物体，可能与此不符，但为便于理论分析，假定它们仍属于小变形或小位移问题，这种假定就称作小变形假设或小位移假设。

对一个实际的受力物体作了上述假设之后，所导出的基本方程就统统简化为线性的偏微分方程和代数方程，从而极大地减少了求解中的困难。如果有几个力系同时作用在一个物体上，欲求其中的应力或位移时，只要物体仍然是弹性的，即可按叠加原理来处理，也就是说，可将一个复杂的受力问题假想地分解成为几种简单的受力情形，分别求解，然后将解得的各应力或位移叠加起来，即成为原问题的解答。这种处理问题的办法，今后经常采用。

§ 1—3 几个基本概念

本节将介绍《弹性力学》中的几个基本概念，即关于外力、应力、位移和应变的概念。虽然这些概念在《材料力学》和《结构力学》中已经运用过，但对其含义尚有进一步说明的必要。

作用于物体上的外力可以分成两大类。作用于物体表面的外力称为表面力或面力，如物体之间的接触力（包括土压力、流体压力等）；作用于物体内部每个质点的外力则称为体积力或体力，常见的有重力和惯性力。

如果所研究的是置于压力油中的小球，则其面力是均匀分布的，面力的作用方向均垂直于球面。在球面上每一点处，这种分布力的作用就以单位面积上压力的合力来衡量。对于一般的受力物体，面力的分布并不均匀，为了表述它在表面某一点 M 处的作用（图 1—1），就得应用极限的概念。设想在该点附近取出一小块表面积 ΔA ，而作用于 ΔA 上的面力之合力为 ΔP ，比值 $\Delta P / \Delta A$ 就是小块表面 ΔA 上面力的平均集度；现令 ΔA 逐渐缩小，以致趋于零，则在此过程中， $\Delta P / \Delta A$ 将不断地改变其大小和方向；假如面力是连续分布的，则其极限

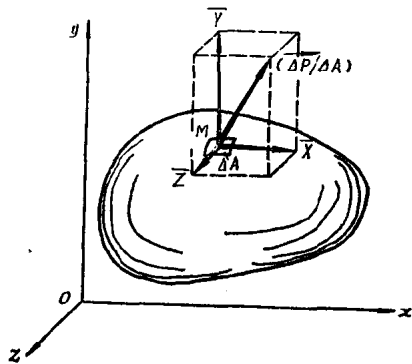


图 1—1

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\vec{\Delta P} / \Delta A)$$

就是点 M 处面力的集度。为了便于表达,面力集度 $\vec{p}$ 常用它在 x 、 y 、 z 三个坐标轴上的投影 $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{Z}$ 来表示,称之为一点处的面力分量,其量纲是[力]·[长度]⁻²(常用单位: N/m²)。沿坐标轴正向的面力分量取正号,反之取负号。

同样,体力集度也是按极限的概念来定义的,即作用于物体内任一点处的体力其集度为

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\vec{\Delta F} / \Delta V)$$

在此, ΔV 表示物体内某点附近的一小块体积,而 $\vec{\Delta F}$ 为作用于该小块上体力之合力。重力和物体作平动(加速运动)时的惯性力等,它们的集度处处相同,即属于常体力情况;当物体作高速旋转运动时,其惯性力就是变体力。体力也和面力一样,习惯上常用它在三个坐标轴上的投影 X 、 Y 、 Z 表示,这三个投影称作一点处的体力分量。它们的量纲为[力]·[长度]⁻³(常用单位: N/m³)。沿着坐标轴正向的体力分量规定为正的,反之为负的。

关于应力的定义、记号以及正负号规定,读者在学习《材料力学》时已经熟悉,在此,我们将从更普遍的意义作一些说明。

图1—2, a 所示为一任意的受力体,它在外力系作用下处于平衡状态。由于外力的作用,受力体内产生了附加的分布内力。所谓一点处某一截面上的应力就是指该截面上的附加分布内力在该点处的集度。

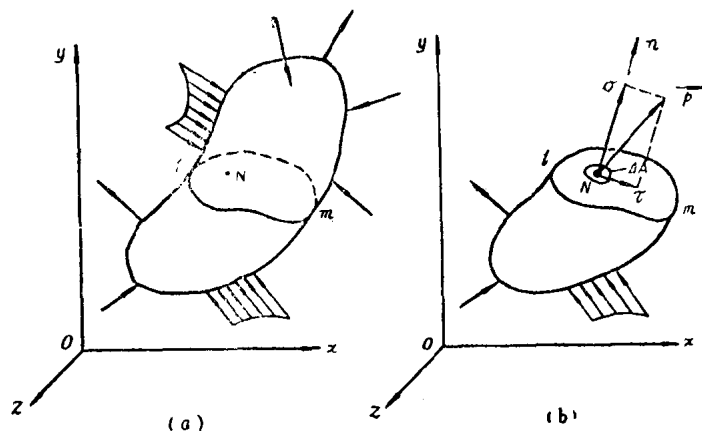


图 1—2

为了表示其中某一点 N 处 lm 截面上的应力,先假想地将受力体沿截面 lm 截开,然后,移去任一部分(图1—2, b),并将移去部分对留下部分的作用以分布在该面上的分布力代替之。设作用在点 N 附近一小块截面积 ΔA 上的分布力之合力为 $\vec{\Delta R}$,则在 ΔA 上的平均总应力为 $\vec{\Delta R} / \Delta A$,当 ΔA 逐渐向点 N 收缩时, $\vec{\Delta R} / \Delta A$ 不断地改变其方向和大小,其极限值

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}}{\Delta A}$$

就是点 N 处在该截面上的总应力(图1—2, b)。习惯上将 $\vec{p}$ 分解为该截面的法向(n)分量——正应力 σ 和切向分量——剪应力 τ 。显然,应力不但与点的位置有关,而且还与截

面方位有关。为了全面地描述受力体内某一点处的应力状态，一般都在该点附近按坐标轴的方向取一个微分单元体，各棱边长度分别为 dx 、 dy 、 dz （图1-3），并标出每个面上的应力分量。

图中，各应力符号的脚标表示这些应力分量的作用面及其方向。例如，在与 x 轴垂直的 x -面上，其正应力分量记作 σ_x ，而该面上的剪应力分量又按坐标轴分解成两个分量，记作 τ_{xy} 和 τ_{xz} ，它们都带有两个脚标，第一个表示其作用面，第二个表示其方向。在一般情况下，单元体的每个微分面上都有这样三个应力分量。

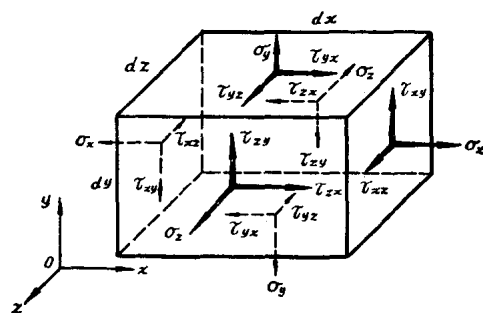


图 1-3

关于正应力分量正负号的规定，与《材料力学》中完全相同，不再赘述。但剪应力分量的正负号规定则不同，在此规定：在外法线指向与坐标轴正向一致的面上，剪应力分量与坐标轴正向一致者为正，反之为负；而在外法线指向为坐标轴负向的面上，剪应力分量指向坐标轴负向者为正，反之为负。按照上述正负号规则，图1-3中所示的全部应力分量均为正的。

可以证明，上述单元体各面上的剪应力分量中，凡含有相同的两个脚标者，不论顺序如何，其代数值均相等，即有

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

这也就是大家所熟悉的剪应力互等定理*。因此，对于一般的情况，受力体内一点处的单元体上只有六个应力分量是独立的。以后将要证明，物体任一点处这六个独立的应力分量被确定之后，该点处任意方位之截面上的应力均可用它们来表示，即该点处的应力状态就完全确定了。

物体受到外力或其它外因的作用时，由于发生变形，每个质点在空间的位置将发生变化，这就是质点的位移**。它是弹性力学中的基本未知量之一。

设弹性体中的任一点 $P(x, y, z)$ 因为物体变形而产生位移 $\vec{\delta}$ （图1-4）。一般地说，位移 $\vec{\delta}$ 是一个三维矢量；习惯上常按坐标轴 x 、 y 、 z 的方向将它分解为三个分量，

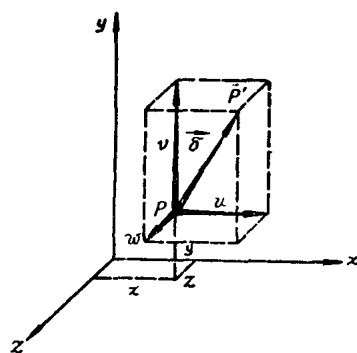


图 1-4

分别标以 u 、 v 、 w 。沿坐标轴正向的位移分量规定为正的，反之规定为负的。它们的量纲均为〔长度〕。

一个弹性体的整体变形可能是很复杂的，但就其中的每个微小单元体来说情况却比较简单，无非是这样两类变形，即棱边长度的改变和两相交面之间夹角的改变（图1-5）。棱边长度的相对改变量为线应变（ ϵ ），两相交面之间夹角（直角）的改变量（用弧度表示）为剪应变（ γ ）。图1-5中示出了各应变分量的记号。习惯上，线应变以伸长为正，缩短为负；剪应变以单元体上与正向坐标面平行的两个正交面的夹角减小为正，反之为负。按此规定，图1-5中所示均

* 对于考虑体力（不包括体力矩），以及各面上应力有变化的情况，此关系仍然成立，其证明见第二章及第六章。

** 通常所说的位移，是指具有足够约束的弹性体内质点的位移，即整个弹性体没有刚体位移。

为正的应变分量。

一般说来, 受力弹性体内任意一点处的面力分量、体力分量、应力分量、位移分量和应变分量都随点的位置而改变, 因而它们都是点的坐标的函数。

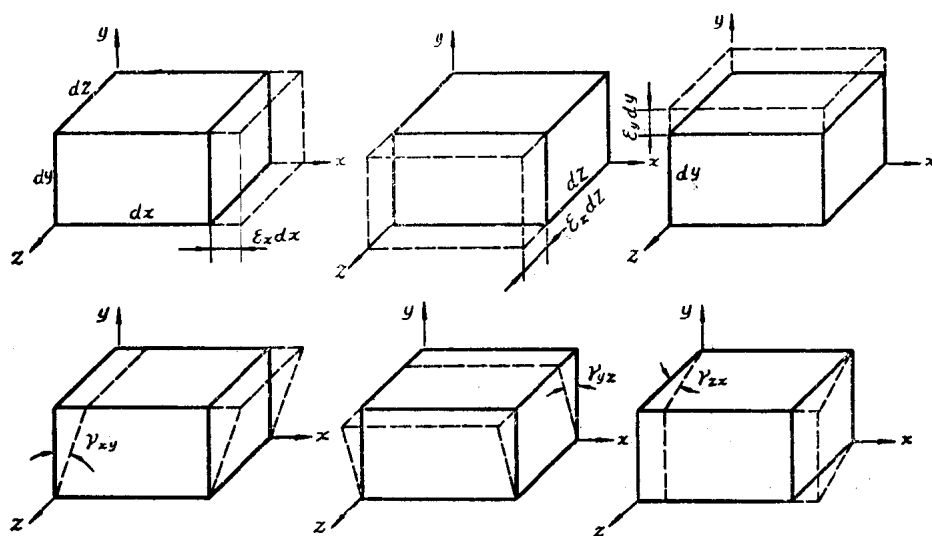


图 1—5

§ 1—4 弹性力学中的空间问题和平面问题

任何弹性体都是空间（三维）物体，它所承受的外力通常也是空间力系。因此，严格地说，弹性体内一点的位移和该点处的应力应是点的三维坐标的函数，亦即

$$\{\delta\} = \{\delta(x, y, z)\} \quad (\text{位移})$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma(x, y, z)\} \quad (\text{应力})$$

这就是说，一般的弹性力学问题均为空间问题。但在某些情况下，考虑到物体的形状特征、受力情况和约束条件等，可将空间问题简化为平面问题。此时，只须研究某一平面内的应力和应变（或位移），从而大大简化了问题的处理。

平面问题又可分为两种：平面应力问题和平面应变问题。图 1—6，a 所示的薄平板，当它在该板平面内受力时，如果外力沿板的厚度 t 没有变化，则可认为任一点 $P(x, y, z)$ ，

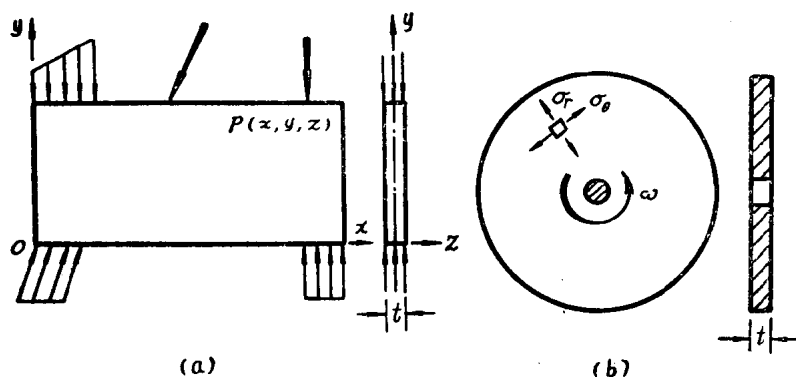


图 1—6

z 处的应力与坐标 z 无关, 而仅仅是 x 、 y 的函数。此时, 由于在板的两侧表面是自由表面, 所以我们有理由认为在此类薄板中均存在

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

这样, 有待确定的应力分量只剩下同一平面内的 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} , 这就是平面应力问题。同理, 图 1—6, b 所示的高速旋转的薄圆盘也属于平面应力问题。应该注意的是, 在平面应力问题中, 正是因为把 z 方向看作没有任何约束, 所以受力体在该方向上通常将发生位移 w 。

图 1—7 示出了另一类平面问题——平面应变 (或平面变形) 问题的几个实例。当把它们近似地看成无限长, 外力垂直于长度方向, 且沿长度保持不变的时候, 就可以认为各横截面上的应力分量、应变分量和位移分量都是一样的, 即它们与坐标 z 无关。在这种情况下, 任一横截面均可视为对称面, 因而其中的任何一点均不可能有纵向 (z 向) 位移分量 w , 所以纵向的线应变为零, 即

$$\varepsilon_z = 0$$

于是有待确定的位移分量只剩下 xy 平面内的 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 。换句话说, 对于此类问题, 有待确定的应变只剩下同一平面内的三个分量 ε_x 、 ε_y 和 γ_{xy} , 故通常称之为平面应变问题。

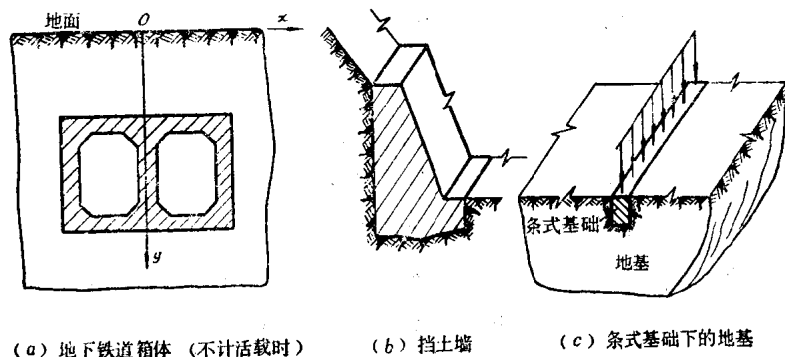


图 1—7

应该看到, 在平面应变问题中正因为 z 方向的位移受到约束, 该方向上的应力 σ_z 必然存在。显然, 对于实际上并非无限长的弹性体, 在其端部附近的部分会有纵向位移和纵向线应变, 弹性体的这部分的应力、应变分析已不属于平面应变问题。

从上面的分析可知, 真正的平面应力或平面应变问题是不存在的, 通常我们只是把某些空间问题按其受力、变形的特征作了近似的简化而已。

§ 1—5 受力体内一点处的应力状态

在《材料力学》中曾研究过受力构件内一点处的应力状态, 导出了通过一点之“任意”斜截面上其应力分量的表达式, 进而导出了以应力圆求这些应力分量的图解法; 还推得了求一点处主应力、主方向和最大剪应力的计算公式。然而那里所作的分析带有一定的局限性。因为所选取的“任一斜截面”只是一簇垂直于已知的主平面的截面, 所以所得结论只能用于平面应力状态, 或一个主应力为已知的空间应力状态。在本节中, 我们将分析最一般的空间应力状态。

试从图 1—3 所示的微分单元体中用任意方位的平面 ABC 截取一个四面体, 如图 1—8

所示。设该微分四面体的斜截面 ABC 之面积为 dA ，而其外法线 N 的方向余弦为

$$\cos(N, x) = l \quad \cos(N, y) = m \quad \cos(N, z) = n \quad (a)$$

该面上的总应力 p 在三个坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影分别以 p_x 、 p_y 、 p_z 表示(见图 1—8)。根据四面体的平衡条件，并注意到四面体中与三个坐标面平行的三角形之面积分别等于斜面 ABC 的面积在各坐标面上的投影，则有

$$\left. \begin{aligned} p_x dA &= \sigma_x dA \cdot l + \tau_{xy} dA \cdot m + \tau_{xz} dA \cdot n \\ p_y dA &= \tau_{xy} dA \cdot l + \sigma_y dA \cdot m + \tau_{yz} dA \cdot n \\ p_z dA &= \tau_{xz} dA \cdot l + \tau_{yz} dA \cdot m + \sigma_z dA \cdot n \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

消去 dA 并引用剪应力互等关系，式 (b) 变为

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (1-1)'$$

前面，我们在建立平衡方程 (b) 时没有列入体力。因为在此所要研究的实质上是一点处应力随坐标系旋转而变化的情况，即，是一个坐标变换问题，与该处体力无关。这里只不过是运用了平衡的手段来作这种变换而已，但也可以看到，出现在平衡方程中的四面体体力分量的合力含有四面体的体积这个因子，它是三阶无穷小，消去面积 dA (二阶无穷小) 之后，

对于极限情形它是自然消失的项。

该斜截面上的正应力为该面上各总应力分量在法线 N 上的投影之和，即

$$\sigma = p_x l + p_y m + p_z n \quad (c)$$

将式 (1-1) 代入上式得

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} nl \quad (1-2)$$

至于斜截面上的剪应力，则由图 1—9 可知，为

$$\tau = \sqrt{p^2 - \sigma^2}$$

即

$$\tau = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma^2} \quad (1-3)$$

所以，如果已经知道一点处三个相互垂直面上的六个应力分量，就可按式 (1-1)、(1-2)、(1-3) 计算任意方位之斜截面 (其方向余弦为 l 、 m 、 n) 上的正应力和剪应力。因此，我们可以说一点处的六个应力分量完全决定了该点处的应力状态。倘若斜截面 ABC

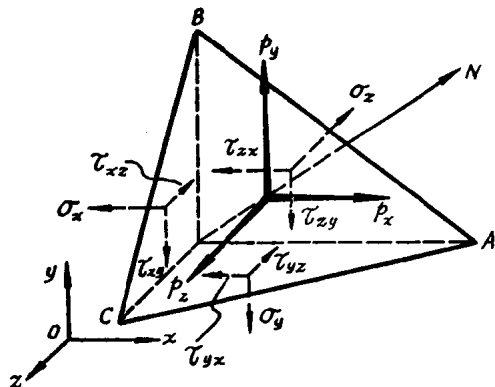


图 1-8

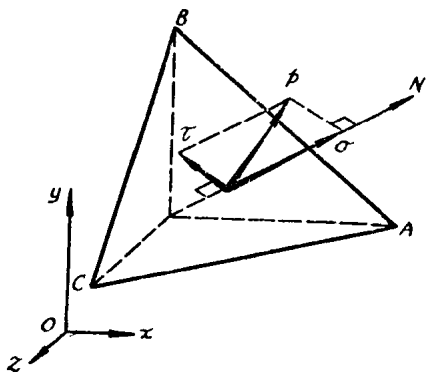


图 1-9

就是一个主平面（即其上的剪应力分量等于零），则总应力 p 与该平面的法线 N 重合，亦即 $\sigma = p$ ，因而根据投影关系有

$$p_x = \sigma \cdot l \quad p_y = \sigma \cdot m \quad p_z = \sigma \cdot n \quad (d)$$

将式 (d) 代入式 (1-1)' 可得

$$\begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (e)$$

这是一个齐次线性方程组。因为方向余弦 l 、 m 、 n 之间有如下关系：

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (f)$$

它们不能同时为零，所以确定该主平面方向余弦的方程组 (e) 其系数行列式必然等于零，即

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

这就是应力状态的特征方程。展开此行列式，可得如下形式的三次方程：

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1-4)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

三次方程 (1-4) 的三个根 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 （均为实根*）就是一片处的三个主应力。式中的系数 I_1 、 I_2 、 I_3 称为应力状态不变量。这是因为在给定荷载的作用下，物体内任一点处的主应力及其方向是一定的，它们与坐标系的选择无关，因而用以确定主应力的方程 (1-4) 中各系数也必与坐标的选择无关。也就是说，当坐标变换（坐标轴旋转）时，尽管相应的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 $\dots$ 、 τ_{xz} 随之改变，但按式 (1-5) 组合而成的三个系数仍保持不变。

将任意一个主应力，例如 σ_1 ，代入式 (e) 中任何两个方程再与式 (f) 联立求解，即可得到该主应力所在的主平面的方向余弦 l_1 、 m_1 、 n_1 ；同理可得其余两个主平面的方向余弦 l_2 、 m_2 、 n_2 和 l_3 、 m_3 、 n_3 。

下面来分析三个主平面之间的关系。将任何两个主应力连同其主平面的方向余弦代入方程 (e)，便得到下列六个方程：

* 其证明可参看：徐芝伦编《弹性理论》（人民教育出版社，1979年）§ 8-3；又见，王龙甫编《弹性理论》（科学出版社，1978年）§ 2-5。

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0 \\
 \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0 \\
 \tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 &= 0 \\
 (\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2 &= 0 \\
 \tau_{xy}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2 &= 0 \\
 \tau_{xz}l_2 + \tau_{yz}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2 &= 0
 \end{aligned}$$

将前三式分别乘以 l_2 、 m_2 、 n_2 ，而后三式则分别乘以 $-l_1$ 、 $-m_1$ 、 $-n_1$ ，然后将它们总加起来，经整理之后得

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0 \quad (g)$$

由此可见，如果 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ，则必有

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \quad (h)$$

由解析几何可知，式(h)就是两个平面互相垂直的条件。因此，这就证明：当某两个主应力不等时，它们所在的主平面必定互相垂直。而如果 $\sigma_1 = \sigma_2$ ，则由式(g)可知 $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$ 可以为任何值，也就是说，两个主平面之间可有任意的夹角，亦即与第三个主平面相垂直的面均为主平面。极言之，假如三个主应力均相等，那末，任何方位的面均为主平面。

平面应力状态是空间(三维)应力状态的特例，故以上分析方法完全可用于研究平面应力状态。图1—8所示微分四面体上若 σ_z 、 $\tau_{yz}(=\tau_{zy})$ 、 $\tau_{zx}(=\tau_{xz})$ 等于零，则即属此情况。此时与Z轴相垂直的面为主应力等于零的主平面，而式(1—1)变为

$$\left. \begin{aligned}
 p_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m \\
 p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m \\
 p_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

而任意斜截面ABC上正应力与剪应力的表达式(1—2)、(1—3)则简化为

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy}lm \quad (1-7)$$

$$\tau = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - \sigma^2} \quad (1-8)$$

在垂直于xy面的平面上，由于此类平面仅 $n=0$ ，式(1—7)的形式不变，而式(1—8)变成

$$\tau = -(\sigma_x - \sigma_y)lm + \tau_{xy}(l^2 - m^2) \quad (1-8)$$

它们与《材料力学》中的分析结果实际上完全一致，仅仅因为剪应力的正负号规定不同，所以式中的正负号改变了。

§ 1—6 边界条件

运用《弹性力学》的方法解答具体问题，与用《材料力学》的方法时一样，事先也必须给出受力体边界上的荷载条件和或约束条件。我们统称其为边界条件。它有两种基本形式，即力的边界条件和位移的边界条件；前者所给定的是边界上的外力(面力)，而后者所给定的是边界位移。

1. 力的边界条件

倘若图1—8所示的微分四面体其倾斜面ABC不是物体内部的某个截面，而就是物体的表面(边界面)，那末该面上的 p_x 、 p_y 、 p_z 就是表面上该处的给定面力分量 $\bar{X}(x, y,$