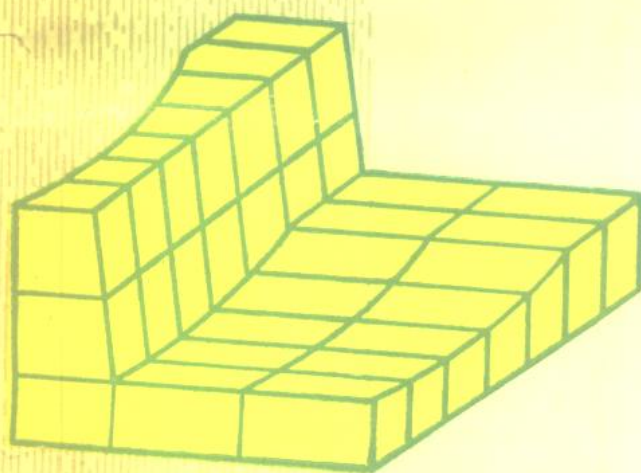


刚塑性有限元 及其在轧制中 的应用

刘相华 著



冶金工业出版社

刚塑性有限元 及其在轧制中的应用

刘相华 著

冶金工业出版社

(京)新登字036号

内 容 简 介

本书是在作者博士论文及近年来有关刚塑性有限元研究学术论文的基础上,参考了国内外150多篇文献写成的。全书共有8章,其中第1章介绍了刚塑性有限元求解轧制过程的发展过程和背景,第2、4章给出了刚塑性有限元的基本理论和求解轧制问题时的基本公式,第3章介绍了程序开发和程序实例,5、6章是用刚塑性有限元分析具体轧制过程的应用实例,第7章讨论了刚塑性有限元求解轧制过程的几个难点和解决办法,第8章介绍了轧制过程温度场的有限元解法,并给出了程序和计算实例。

本书反映了国内外在轧制理论研究和数值模拟方面的最新进展,在系统地阐述刚塑性有限元基本理论的基础上侧重于分析刚塑性有限元在各种轧制过程中的具体应用。为建立起理论与应用之间的桥梁,书中附有程序清单。

本书主要适用于高等院校金属压力加工专业的教师、研究生、本科生和从事轧钢专业的科研人员、设计人员和工程技术人员,对上述领域内的教学、科研和设计等工作都具有参考价值。

刚塑性有限元及其在轧制中的应用

刘相华 著

冶金工业出版社出版发行

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店总店科技发行所经销

河北省三河市印刷厂印刷

850×1168 1/32 印张 11.25 字数 296 千字

1994年7月第一版 1994年7月第一次印刷

印数1~1100册

ISBN 7-5024-1477-0

TG·181 定价12.00元

前 言

现代轧钢生产和轧制技术的发展为轧制理论研究提出了一系列新的课题，例如提高中厚板的成材率、薄板的平直度控制、H型钢开坯的不均匀变形等，往往涉及到轧制过程中的金属流动速度场、温度场、应力场、应变场等分布量的定量计算，传统的轧制理论很难精确处理这类问题，而以有限元为代表的数值分析方法在这些方面表现出其突出的优越性，并且已经在求解这类问题中取得了令人瞩目的新进展。

最近几年国际上用有限元作为轧制理论研究工具的文章已经远远超过其它任何理论分析方法，用有限元求解各类轧制过程的范围在不断扩大，从2维扩大到2维半和3维，从稳定轧制扩大到轧件头尾的不稳定变形过程，从板带扩大到各种型钢和环形件的轧制过程，从一般的参数计算扩大到裂纹分析、材质预报以及反向模拟、坯料设计等广泛的领域。塑性加工有限元法的出现以及在轧制领域内的大面积推广应用，为现代轧制理论研究注入了新的活力。把80、90年代称为轧制理论研究发展阶段中的有限元时代并不为过。

作者自1983年以来从事刚塑性有限元法求解轧制过程方面的研究工作。多年的实践切身感到在有限元难点处理、程序开发和调试等方面的艰辛，深知对从事轧钢专业的人员来说，有限元法决不是仅通过理论学习和公式推导就能真正掌握的，需要了解有限元程序，埋头开发和调试程序。而开发程序具有继承性，如果每个要使用有限元法的人都从头开始去编写有限元程序，必然是事倍功半。因而在已有工作的基础上进行系统化的总结，为后来者提供一个继续向上攀登的阶梯就显得十分必要了。这也正是作者萌发写作本书想法的初衷。

本书是在作者博士论文及近年来有关有限元在轧制领域中应用研究工作的基础上，参考国内外150多篇文献写成的。本书力求反映出国内外在轧制领域有限元应用研究的最新进展，在系统地阐述刚塑性有限元基本理论的基础上，侧重于在分析各种轧制过程中的具体运用。为建立起理论与应用之间的桥梁，书中附有程序清单。

在从事用刚塑性有限元求解型钢轧制过程的研究中，得到白光润教授的精心指导，写作本书的过程中得到张强教授、王国栋教授的支持和帮助，有些基本理论问题曾与赵志业教授进行了多次有益的探讨，姜正义、刘全等同志曾参加了部分与本书内容有关的研究工作，在此表示深切的谢意。

由于本人水平有限，书中疏漏之处在所难免，希望广大读者批评指正。

主要符号表

- x, y : 轧制方向、厚度方向坐标, mm(2维);
 x, y, z : 轧制方向、宽度方向、厚度方向坐标, mm(3维);
 ξ, η : 轧制方向、厚度方向局部坐标(2维);
 ξ, η, ζ : 轧制方向、宽度方向、厚度方向局部坐标(3维);
 $H, h, \Delta h$: 轧件轧前厚度, 轧后厚度, 压下量, mm;
 $B, b, \Delta b$: 轧件轧前宽度, 轧后宽度, 宽展量, mm;
 S : 前滑值, %;
 r : 压下率, %;
 α, γ, ϕ : 咬入角, 中性角, 接触角;
 l : 接触弧长水平投影, mm;
 R, R' : 轧辊半径, 考虑弹性压扁的轧辊半径, mm;
 v_R : 轧辊线速度, mm/s;
 v_x, v_y, v_z : x, y, z 方向的轧件速度分量, mm/s;
 $\bar{p}, \overline{p}$: 单位压力, 平均单位压力, MPa;
 P : 轧制力, kN;
 T : 轧制力矩, kN·m, 温度, °C;
 T_s, T_f, T_b : 张力、前张力、后张力, kN;
 t, t_f, t_b : 张应力、前张应力、后张应力, MPa;
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: x, y, z 方向上的正应力, MPa;
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$: 剪应力, MPa;
 $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z$: x, y, z 方向上的变形速度, s^{-1} ;
 $\dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}$: 剪变形速度, s^{-1} ;
 $\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}$: 应力张量, 应力偏量;
 $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\varepsilon}'_{ij}$: 变形速度张量, 变形速度偏量;
 δ_{ij} : 克罗内克尔符号;

$\dot{\varepsilon}_v, \dot{\varepsilon}_m$: 体积变形速度, 平均变形速度, s^{-1} ;

σ_m : 静水压力, MPa;

K : 平面变形抗力, MPa;

$\sigma_s, \bar{\sigma}$: 屈服应力, 等效应力, MPa;

τ_f, τ_k : 摩擦剪应力, 屈服剪应力, MPa;

$\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}$: 等效变形程度, 等效变形速度;

J_1, J_2, J_3 : 应力张量1、2、3次不变量;

J'_1, J'_2, J'_3 : 应力偏量1、2、3次不变量;

g, λ, β : 可压缩参数, Lagrange乘子, 惩罚因子;

m, n : 速度敏感指数, 加工硬化系数;

m, f : 摩擦因子, 摩擦系数;

h_r, h_c, h_i : 辐射, 对流, 热阻放热系数;

c, ρ, k : 比热, 密度, 导热系数;

V, S : 体域, 面域;

S_p, S_v : 外力已知表面, 速度已知表面;

S_f, S_t, S_s : 接触面, 张力作用面, 速度不连续面;

$\bar{p}_1, \bar{v}_1$: 边界上已知外力, 边界上已知速度;

$\Delta V_f, \Delta V_s$: 相对滑动速度, 速度不连续量;

ϕ, ϕ_e : 总能耗率泛函, 单元能耗率泛函;

ϕ_p, ϕ_f : 塑性功率泛函, 摩擦功率泛函;

ϕ_t, ϕ_s : 外力功率泛函, 剪切功率泛函;

$N_1, [B]$: 形状函数, B矩阵;

$[J], |J|$: Jacobi矩阵及其行列式;

$[K]$: 优化矩阵, 温度刚度矩阵;

$t, \Delta t$: 时间, 时间间隔;

$\nabla f(x)$: 多元函数 $f(x)$ 的梯度, (一阶偏导数向量);

$\nabla^2 f(x)$: 多元函数 $f(x)$ 的Hessian矩阵, (二阶偏导数矩阵)。

目 录

1	绪论	1
1.1	现代轧制理论研究的发展背景	1
1.1.1	现代轧钢生产和轧制技术的发展	1
1.1.2	现代轧制理论研究的基本任务	3
1.2	轧制理论中数值方法的发展	5
1.2.1	初等理论中的数值方法	5
1.2.2	滑移线理论及其数值解法	6
1.2.3	能量法及其数值解法	8
1.2.4	弹塑性有限元法	11
1.2.5	其他数值方法	13
1.3	刚塑性有限元法概述	16
1.3.1	Lagrange乘数法	17
1.3.2	罚函数法	19
1.3.3	可压缩法(Slightly Compressible Method)	21
2	刚塑性有限元法的基本理论	25
2.1	刚塑性材料模型	25
2.1.1	理想刚塑性材料	25
2.1.2	刚塑性硬化材料	25
2.1.3	刚塑性可压缩材料	27
2.2	刚塑性材料的变分原理	36
2.2.1	理想刚塑性材料的第一变分原理	37
2.2.2	刚塑性可压缩材料的变分原理	39
2.2.3	刚塑性材料的广义变分原理	42
2.2.4	速度敏感材料的总能耗率泛函	46
2.3	刚塑性有限元的求解途径	47
2.3.1	轧制变形区的有限元离散化	47
2.3.2	总能耗率泛函的离散化	51
2.3.3	总能耗率泛函的最小化	53

2.4	刚塑性有限元的基本公式	56
2.4.1	单元内的速度插值、形状函数	56
2.4.2	变形速度与节点速度的关系、B矩阵	59
2.4.3	Jacobi矩阵及其逆矩阵和行列式	61
2.4.4	高斯(Gauss)积分	62
2.4.5	能耗率泛函的一阶偏导数(梯度)	64
2.4.6	能耗率泛函的二阶偏导数(Hessian矩阵)	67
2.4.7	接触表面速度边界条件的处理	70
2.4.8	初速度场的设定	72
2.4.9	收敛判定	73
3	2维轧制问题的有限元分析及其程序开发	75
3.1	刚塑性有限元程序开发的特点和基本要求	75
3.2	FAR-2D程序概况	76
3.2.1	FAR-2D程序框图	76
3.2.2	FAR-2D的程序段集合	78
3.2.3	FAR-2D的程序结构树	79
3.3	主程序及公用数据区	80
3.4	预处理程序	83
3.4.1	数据准备	83
3.4.2	有限元网格自生	85
3.4.3	单元、节点和未知数的调查	89
3.5	有限元基本矩阵计算程序	93
3.6	迭代求解程序	99
3.7	后处理及其他辅助程序	118
3.8	2维轧制问题的有限元分析结果	126
3.8.1	FAR-2D程序的计算结果举例	126
3.8.2	轧件头部弯曲现象的有限元分析	129
4	3维单元分析	138
4.1	3维单元的类型	138
4.2	线性块状(Brick)等参单元	140
4.2.1	形状函数	141
4.2.2	B矩阵	144

4.2.3 Jacobi矩阵及其逆矩阵和行列式	146
4.3 二次块状等参单元	148
4.4 简化3维单元	153
4.4.1 分数维单元的概念及单元维数的定义	153
4.4.2 几种分数维单元举例	154
4.4.3 2.7维单元分析	158
4.5 3维单元的总能耗率泛函优化矩阵	161
4.5.1 塑性变形功率的偏导数	161
4.5.2 摩擦功率的偏导数	167
4.5.3 张力功率的偏导数	169
4.5.4 速度不连续面上剪切功率的偏导数	170
4.5.5 梯度及Hessian矩阵的合成	1725
板材轧制的3维有限元分析	174
5.1 板材轧制的3维变形特点及研究进展	174
5.2 板材轧制3维有限元分析的几个基本问题	176
5.2.1 有限元网格剖分	176
5.2.2 坐标系选取及节点坐标的计算	177
5.2.3 速度边界条件	180
5.2.4 宽展及侧边鼓形的计算	182
5.3 平辊轧制的3维有限元计算	185
5.3.1 带双鼓形断面厚板的平轧	185
5.3.2 板坯立轧	193
5.4 平板轧制积分量的3维有限元计算	212
5.4.1 轧制参数积分量的计算	213
5.4.2 计算方法和计算条件	215
5.4.3 计算结果及其与实测值的比较	215
5.4.4 改变参数的模拟计算结果	218
5.5 板形问题的有限元分析	226
5.5.1 板形及其主要影响因素	227
5.5.2 轧制带凸度板的有限元网格及公式	227
5.5.3 模拟计算条件	229
5.5.4 板形问题的有限元计算结果	229

6	型材轧制的刚塑性有限元分析	235
6.1	型材轧制过程有限元分析的特点	235
6.1.1	型材变形区的有限元网格剖分	235
6.1.2	分析型材轧制所用的单元	235
6.1.3	分析型材轧制过程的有限元程序	236
6.2	H型钢轧制过程的有限元分析	237
6.2.1	H型钢变形区的几何关系	238
6.2.2	单元划分及速度边界条件	244
6.2.3	模拟计算条件及计算结果	245
6.3	角钢轧制过程的有限元分析	249
6.3.1	变形模式法简介	250
6.3.2	角钢切分孔(Splitting Pass)的解析	250
6.3.3	角钢蝶形孔(Butterfly Pass)的解析	256
6.4	叶片钢轧制过程的有限元分析	261
6.4.1	解析方法概要	261
6.4.2	计算和实验条件	263
6.4.3	有限元解析结果	264
6.5	简单断面型钢轧制过程的有限元分析	267
6.5.1	椭圆-圆孔型系统解析	267
6.5.2	椭圆-方孔型系统解析	272
6.5.3	三辊Y型轧机及二辊平轧线材解析	275
7	刚塑性有限元法的几个基本问题及其处理技巧	279
7.1	初速度场的设定	279
7.1.1	用初等方法设定初速度场	280
7.1.2	用细化网格的方法设定初速度场	281
7.1.3	G函数法设定初速度场	281
7.2	奇异点的处理	285
7.2.1	第一类奇异点	285
7.2.2	第二类奇异点	287
7.3	静力学条件检验及自由表面检验	288
7.3.1	静力学条件检验	288
7.3.2	自由表面检验	291

7.4	摩擦边界条件的处理	291
7.5	大矩阵的处理	293
7.5.1	B矩阵的处理	293
7.5.2	Hessian矩阵的处理	294
7.6	迭代过程的1维搜索	297
7.6.1	进退法搜索	297
7.6.2	黄金分割法搜索	299
8	轧制过程温度场的有限元解	300
8.1	求解轧制过程传热问题的基本理论	300
8.1.1	含内热源的热传导基本方程	300
8.1.2	初始条件和边界条件	302
8.1.3	传热问题的泛函和变分原理	303
8.1.4	有限元求解公式	305
8.2	求解轧件温度场的有限元程序	309
8.2.1	HEAT-2程序概况	310
8.2.2	主程序和公用数据区	312
8.2.3	预处理子程序	315
8.2.4	有限元基本矩阵计算子程序	318
8.2.5	生成温度刚度矩阵和变温矩阵子程序	320
8.2.6	输出结果子程序	325
8.3	轧件温度场的有限元计算结果	327
8.3.1	H型钢温度场	327
8.3.2	钢轨的温度场	332
8.3.3	窗框钢的温度场	334
8.4	轧制过程温度场数值模拟的发展前景	336
8.4.1	温度场与速度场联合求解	336
8.4.2	温度场与材质预报	337
8.4.3	半凝固状态加工温度场的研究	338
	参考文献	343

1 绪 论

1.1 现代轧制理论研究的发展背景

轧制过程的理论研究是与轧钢生产发展的实际需要密切相关的。早期的轧制理论适应于以手工操作和单体设备机械化为主的轧钢生产过程的需要,主要是解决诸如轧制压力、力矩、功率、宽展、前滑等轧制过程参数的近似计算问题。这个时期轧制理论的主要进展是提出了卡尔曼(Karman)方程和奥罗万(Orowan)方程,以及以这两个方程为基础附加一些假设条件推导出的一些轧制压力公式、宽展公式等,并逐渐形成了以工程法(Slab Method)为核心的传统轧制理论体系。

本世纪60年代以后,轧钢生产和轧制技术飞速发展,对轧制理论研究工作提出了更高的要求。在产品精度要求越来越高,控制参数越来越多,各种高新轧制技术不断出现的新形势下,传统的工程法已显得力不从心,而以计算机为工具、以现代数值分析方法为特征的现代轧制理论研究工作在这种形势之下得到了迅速的发展。

1.1.1 现代轧钢生产和轧制技术的发展

现代轧钢生产发展大体可分为两个阶段,50年代到70年代,轧钢生产的发展趋势是大型化、高速化、连续化;70年代之后,轧钢生产主要是向着提高产品质量、降低消耗、优化轧制过程、开发新钢材、新品种的方向发展。

50、60年代世界经济大幅度增长,汽车、高速公路、超高建筑等现代化设施都需要大量钢材,使世界轧钢产量增长进入了一个黄金时期。这期间主要工业国家先后建起了一大批冷、热连轧板带生产线和H型钢生产线,现代电子计算机控制技术开始用于轧钢生产过程控制,促进了轧制速度的稳定提高和产品精度的明

显改善。轧制技术获得了长足的进步。

70年代中期之后,在当时石油危机的冲击之下,人们的技术观念发生了变化。轧钢生产也从追求产量向质量效益型转化。美国、日本等钢材生产大国的产量先后达到饱和状态而停滞不前,但国际市场对钢材质量、品种方面的要求越来越高,例如在钢材的外型尺寸精度方面,目前冷轧板带厚度精度先进水平已达 $\pm 0.003\text{mm}^{[1]}$,热轧大型H型钢的厚度精度也已达 $\pm 0.05\text{mm}^{[2]}$;在使用性能方面,已生产出抗拉强度达800MPa的热轧汽车用钢板^[1],冷轧预应力钢丝的抗拉强度可达1700MPa^[3],低温用钢、耐腐蚀钢、原子能容器用钢等具有特殊性能要求的新钢材、新品种不断出现,各种各样的高效钢材正在逐渐取代那些传统的钢材品种。成材率的大幅度提高和能源消耗的明显下降,使生产成本降低,从而使钢材在与高分子等材料的市场竞争中处于有利的地位。

轧钢生产方面的要求促进了轧制技术的发展,近年来轧钢生产过程中各个方面都有一大批高新技术涌现出来。在制坯工序有方坯、板坯和薄板坯的连铸技术、连铸直接轧制技术CC-DR (Continuous Cast Direct Rolling)、连铸热装轧制技术CC-HCR (Continuous Cast Hot Charge Rolling)等;在板带材生产方面有厚度自动控制技术AGC (Automatic Gauge Control)、板形自动控制技术AFC (Automatic Flatness Control)、张力自动控制技术ATC (Automatic Tension Control)、自由程序轧制技术SFR (Schedule-Free Rolling)等;在型钢生产方面有尺寸自动控制技术ADC (Automatic Dimension Control)^[4]、高精度轧制技术HPR (High Precision Rolling)^[5]、H型钢的自由尺寸轧制技术^[6]、中小型型钢的紧凑式大压下连轧技术、线材的高速无扭连轧技术等。这些新技术的出现,使轧钢的现代化生产进入了崭新的阶段。

进入90年代以来,薄板坯、薄带坯的连铸连轧和连续铸轧取得了令人振奋的进展。德国施罗曼-西马克公司SMS (Schloe-

mann-Siemag AG) 研制的紧凑式带钢生产方式CSP (Compact Strip Production) 在美国Nucor厂的成功经验展示了板带生产的革命性变化已经到来。而曼内斯曼-德马克公司MDH (Mannesmann Demag Hüttentechnik) 开发的薄板坯连续铸轧新技术ISP, (In Line Strip Production), 通过 在未完全凝固之前对薄板坯的液芯轧制, 则开辟了进一步节能降耗、缩短板带生产流程的新途径。此外, 还有钢管、金属制品、冷弯型钢等方面的新技术, 以及横轧、斜轧和楔横轧的零件轧制技术等。这些高新技术的出现和推广应用, 使轧钢的现代化生产进入了一个崭新的阶段。

电子计算机在轧钢工业中的广泛应用, 对轧制技术的飞速发展起到了关键的作用。在手工操作条件下, 每秒百米以上的线材轧制速度和高速轧制情况下动态调整板形等是不可想像的, 而在计算机的参与之下, 轧钢工作者多年的梦想一个个变成现实。计算机在模型控制阶段所表现出的自适应、自学习等非凡的功能已经取得巨大成功。80年代之后计算机人工智能在轧钢中的应用, 又使轧钢生产的管理和过程控制水平得到进一步的提高。计算机辅助设计CAD (Computer Aided Design)的普遍应用, 计算机辅助设计、辅助制造、辅助工程CAD/CAM/CAE (Computer Aided Design/Computer Aided Manufacturing/Computer Aided Engineering) 一体化的出现, 计算机集成制造系统CIMS (Computer Integral Manufacturing System)的研制, 显示出计算机在轧钢行业中所扮演的角色将更加重要。特别是近几年专家系统在轧钢行业中的应用初露端倪, 已经有板形控制^[7]、板坯分配^[8]、板卷运送^[9]等专家系统和型钢锯切优化的人工智能控制系统^[10]用于现场生产。这标志着轧钢生产中控制和管理的人工智能时代正在到来。

1.1.2 现代轧制理论研究的基本任务

现代轧钢生产与轧制技术的飞速发展为轧制理论研究提出了一系列新的课题。例如, 传统的轧制理论中, 一向把板材轧制看

成是可以简化成平面变形的最佳对象，而现代板形控制技术则要求我们掌握轧板时横向的轧制压力分布和金属流动规律；过去虽然也把温度看成是轧制过程中的一个重要参数，但通常是取道次的平均温度来做近似处理，而现代热带连轧技术不仅要求了解轧件横向的温差，还要掌握轧件在加热炉中水印带来的纵向温差，同时也要考虑轧辊的温差和变形；过去型钢孔型设计主要依靠经验，而现代轧制过程最优设计则要求对有关孔型中轧制时金属流动分布做更为精确的计算。总而言之，现代轧钢生产中所需要解决的大量新问题与传统轧制理论所能够解决的问题已不可同日而语。概括起来，现代轧制理论研究工作的基本任务是：

（1）求解轧制变形区中的各种分布量，如应力场、应变场、速度场、温度场等，为板形板厚控制、型钢孔型设计等提供理论基础。

（2）对轧制过程中工具及工件的温度与变形进行综合研究，为钢材的高精度轧制及轧机的高精度控制服务。

（3）加强对轧件的不均匀变形及轧件头尾的不稳定变形阶段的理论研究，为提高成材率、优化轧制规程服务。

（4）提高轧制过程参数的理论解析精度，建立并不断改进控制各种类型轧机的数学模型。

（5）开展对轧制过程热—力学及冶金学过程参数的一体化研究，对各类轧制过程中的温度、变形、金属的微观组织结体（如相变、动态再结晶、晶粒尺寸、析出物形态等）及产品的最终性能（如强度、硬度、塑性、韧性等）进行综合模拟，实现根据产品的使用要求来进行钢材成分和轧制规程的预设计。

（6）处理并解决CAD、CAM、CAE、CIMS、专家系统等计算机辅助工具及人工智能应用于轧钢生产过程的控制与管理工作中所遇到的轧制理论方面的新问题。

用以工程法为核心的传统轧制理论来解决上述问题是极为困难或者几乎是不可能的。而以电子计算机为工具，以现代数值分析方法为特征的一些现代轧制理论新方法在试图解决上述问题的

过程中逐渐发展起来，一套有别于传统理论、优于传统方法的新的解法体系正在形成。

1.2 轧制理论中数值方法的发展

各种数值分析方法在求解各类轧制问题中表现出很强的生命力，目前已经成为轧制理论研究中的最为有效的工具。回顾轧制理论中各种数值分析的发展，有助于加深对它们的了解，以及对刚塑性有限元法出现的背景和环境有所认识。

1.2.1 初等理论中的数值方法

数值方法在轧制理论分析中的应用是从初等解法开始的，即利用数学上解偏微分方程的有限差分法来求解轧制理论中的卡尔曼方程或奥罗万方程。其基本思路是在变形区内取微元体 dV ，研究微元体 dV 上的力平衡关系（如图1-1），建立力平衡微分方程，然后在变形区内进行差分网格分割（如图1-2），用差分法在

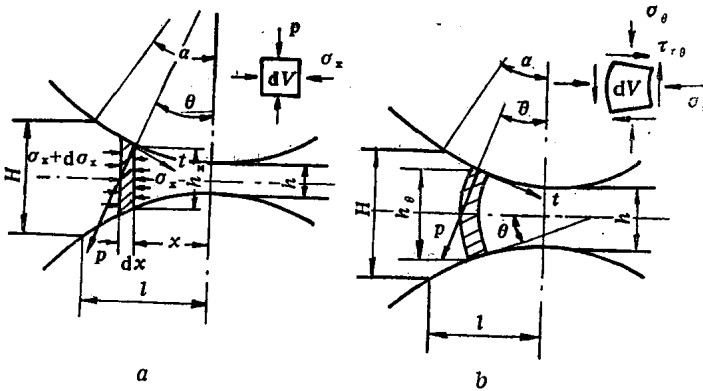


图 1-1 轧制变形区内微元体上受力分析简图

a—Karman方程；b—Orowan方程

已知的边界条件下求解所建立起的微元体上的力平衡方程。具体作法通常是从已知的边界点开始，用迭代算法逐点向内计算。早在60年代初期，特罗斯特 (Troost)^[11]曾做了采用这种方法对