

现代数学丛书

忻元龙 著

调和映照

HARMONIC
MAPS

XIN YUANLONG

上海科学技术出版社

612
X62
• 现代数学丛书 •

调和映照

忻元龙 著



上海科学技术出版社

383862

Modern Mathematics Series

HARMONIC MAPS

Xin Yuanlong

Shanghai Scientific & Technical Publishers

·现代数学丛书·

调和映照

忻元龙 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 小 1/16 印张 14.75 插页 4 字数 186,000

1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1—1,200

ISBN 7-5323-3669-7/O·184

定价: 23.20 元

(沪)新登字 108 号

内 容 提 要

本书围绕调和映照理论中作者工作过的几个方面展开有关的理论,介绍这些方面的主要定理、方法和最新进展,并系统反映作者本人的研究成果。本书共分6章,第1章是引论,它是第2章至第6章的基础,也是调和映照理论的简捷入门;其中给出了调和映照的几种等价定义及有关几何背景、调和映照的重要公式和基本性质。为方便展开有关理论,一开始先介绍向量丛的初步知识。第2章至第6章依次为守恒律;调和映照和高斯映照;调和映照和全纯映照;存在性,不存在性和正则性;等变调和映照。本书供高等学校数学系高年级学生、研究生及有关的科研人员参考。

DU 92/10

MAIN CONTENTS

The monograph is restricted to some topics in the theory of harmonic maps. We introduce the main theorems, show the basic techniques and describe the author's contributions in those topics. In such a way the contents of Chapter 2~6 are organized. The first chapter is an introductory material, which is not only the base of the later chapters, but also a brief approach to the theory. Among them are several equivalent definitions of harmonic maps, basic formulas and main properties on harmonic maps. For fixing notations and terminologies the chapter begins with elementary knowledge on the vector bundles. Following chapters are conservation law, harmonic maps and Gauss maps, harmonic maps and holomorphic maps, existence, nonexistence and regularity, equivariant harmonic maps. The book may be served as a reference book for graduate students, senior undergraduate students and related scientists.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔划为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series
Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua

Chen Xiru

Ding Xiaqi

Hu Hesheng

Li Tatsien

Liu Yingming

Wang Zikun

Yan Zhida

Ye Yanqian

Chen Hanfu

Cheng Minde

Feng Keqin

Jiang Boju

Liang Youdong

Shi Zhongci

Wu Fang

Yang Le

Zhang Gongqing

出版说明

从60年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著并已在国外出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋3位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于1990年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

1991年4月

序 言

调和映照是微分几何中测地线、极小子流形、调和函数概念的自然推广。它与多复变函数论中的全纯映照、随机过程理论、材料科学中的液晶理论以及理论物理中的非线性场论密切相关。近二十多年来,调和映照理论获得了迅速的发展,它是当前数学中主流方向的课题之一。

本书围绕调和映照理论中作者工作过的几个方面展开有关的理论,介绍这些方面的主要定理、方法,并反映作者本人的研究成果。本书后5章的内容就是这样组成的。第1章引论,它是后5章的基础,也是调和映照理论的简捷入门。限于篇幅,对Riemann几何中熟知的事实往往不加说明地引用。它们在一般Riemann几何书中都能找到,如伍鸿熙等人著的“黎曼几何初步”是很好的参考书。限于作者的学术水平,书中难免有不少欠妥甚至错误之处,恳请读者批评指正。

本书的很多内容曾在复旦大学数学研究所对研究生讲授过多次,并在中国科学院数学研究所,在中国科学技术大学举办的全国研究生暑期教学中心等作过系列演讲。因此,本书也是这些讲稿的自然发展。本书写作过程中得到国家自然科学基金(特别是天元基金)和国家教委博士点基金的资助,在此一并致谢。

最后,特别感谢谷超豪教授和胡和生教授在本书写作过程中所给予的热情鼓励和支持。

忻元龙
1993年7月

目 录

序言

第 1 章 引论	1
§ 1.1 向量丛	1
§ 1.2 调和映照	9
§ 1.3 Bochner 型公式	17
§ 1.4 调和映照基本性质	27
第 2 章 守恒律	39
§ 2.1 应力-能量张量及守恒律	39
§ 2.2 单调不等式	42
§ 2.3 守恒律在刘维尔型定理中的应用	46
§ 2.4 推广和进一步结果	49
第 3 章 调和映照和高斯映照	61
§ 3.1 广义高斯映照	61
§ 3.2 类锥调和映照	64
§ 3.3 广义极值原理	70
§ 3.4 象半径估计及其在子流形理论中的应用	75
§ 3.5 闵可夫斯基空间中类空超曲面的高斯象	78
§ 3.6 伪欧氏空间中类空子流形的高斯象	85
第 4 章 调和映照和全纯映照	96
§ 4.1 部分能量	96
§ 4.2 全纯映照的调和性	98
§ 4.3 调和映照的全纯性	101
第 5 章 存在性、不存在性和正则性	115
§ 5.1 变分直接法	115

§ 5.2	正则性定理	118
§ 5.3	不存在性定理和存在性定理	121
§ 5.4	到正曲率流形调和映照的正则性	126
第 6 章	等变调和映照	141
§ 6.1	Riemann 浸没和等变映照	141
§ 6.2	约化定理	145
§ 6.3	等变变分公式	150
§ 6.4	关于球同伦群的调和代表元	155
§ 6.5	用等参映照构造调和映照	187
§ 6.6	射影空间间的调和映照	197
参考文献		205
索引		216

CONTENTS

Preface

Chapter I Introduction	1
§ 1.1 Vector Bundles	1
§ 1.2 Harmonic Maps	9
§ 1.3 A Bochner Type Formula	17
§ 1.4 Properties of Harmonic Maps	27
Chapter II Conservation Law	39
§ 2.1 Stress-Energy Tensor and Conservation Law	39
§ 2.2 Monotonicity Formula	42
§ 2.3 Applications of Conservation Law to Liouville- type Theorems	46
§ 2.4 Further Generalizations	49
Chapter III Harmonic Maps and Gauss Maps	61
§ 3.1 Generalized Gauss Maps	61
§ 3.2 Cone-like Harmonic Maps	64
§ 3.3 A Generalized Maximum Principle	70
§ 3.4 Estimates of Image Diameter And Its Applications	75
§ 3.5 Gauss Image of a Spacelike Hypersurface in Minkowski Space	78
§ 3.6 Gauss Image of a Spacelike Submanifold in Pseudo-Euclidean Space	85
Chapter IV Harmonic Maps and Holomorphic Maps	96
§ 4.1 Partial Energies	96
§ 4.2 Harmonicity of Holomorphic Maps	98

§ 4.3 Holomorphicity of Harmonic Maps.....	101
Chapter V Existence, Nonexistence and Regularity	115
§ 5.1 Direct Method of the Calculus of Variations	115
§ 5.2 Regularity Theorems	118
§ 5.3 Nonexistence and Existence	121
§ 5.4 Regularity of Weakly Harmonic Maps into Positively Curved Manifolds	126
Chapter VI Equivariant Harmonic Maps	141
§ 6.1 Riemannian Submersions and Equivariant Harmonic Maps	141
§ 6.2 Reduction Theorems	145
§ 6.3 Equivariant Variational Formulas	150
§ 6.4 On Harmonic Representatives of Homotopy Groups of the Sphere.....	155
§ 6.5 Harmonic Maps via Isoparametric Maps	187
§ 6.6 Harmonic Maps of Projective Spaces.....	197
References	205
Index.....	216

第 1 章

引 论

调和映照的几个等价定义、有关的几何背景、它们之间的相互关系，以及调和映照的一些基本性质和基本公式是本章的内容。本章是以后各章的基础，也是进一步研究调和映照的基础，为了方便叙述和交待有关的记号，我们从介绍向量丛开始。

§ 1.1 向 量 丛

向量丛是现代数学的一个基本概念。它不仅有助于了解调和映照，也有助于了解其它几何问题，本节只介绍向量丛的初步知识。

1.1.1 向量丛

向量丛是一种特殊的纤维丛。下面，采用直接的方法来定义。

定义 1.1 设 ξ 和 M 都是微分流形， $\pi: \xi \rightarrow M$ 是可微满映照，且满足下列条件：

1) 对任何 $p \in M$ ， $\pi^{-1}(p)$ 中有向量空间结构（有时记为 $F_p(E)$ 或 F_p ，它的维数以后总假定为常数）；

2) 局部平凡性，即对任何 $p \in M$ ，存在邻域 $p \in U \subset M$ ，和微分同胚

$$h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U),$$

使对任何 $q \in U$ ，映照 $y \mapsto h(q, y)$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\pi^{-1}(q)$ 间的线性同构。这就得到向量丛 $E(\xi, M, \pi)$ 。

我们称 ξ 为全流形， M 为底流形， π 为投影映照， $\pi^{-1}(p)$ 为 p

上的纤维, (U, h) 为 ξ 的局部坐标系. 这里 U 可以是整个底流形, 这时, E 称为平凡向量丛.

定义 1.2 设 $s: M \rightarrow \xi$ 是向量丛 E 的底流形到全流形的可微映照, 如果它还满足

$$\pi \circ s = id (\text{恒等映照}),$$

那末, 称 s 是一个截面, 截面的全体记为 $\Gamma(E)$.

例 1 设 R^n 表示 n 维实向量空间. 它和任何微分流形 M 作乘积, 得到平凡向量丛 $M \times R^n$. 对它的任何一元素 $(p, x) \in M \times R^n$, 投影映照定义为 $\pi(p, x) = p$. 对任何 $t_1, t_2 \in R$, 由

$$t_1(p, x_1) + t_2(p, x_2) = (p, t_1x_1 + t_2x_2)$$

决定纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上的向量空间结构. 当 $n=1$ 时, $M \times R$ 的任一截面就是 M 上的光滑函数.

例 2 微分流形 M 的切丛 TM .

首先, $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$, 其中 $T_p M$ 表示 M 在 p 点的切空间, 构成一个微分流形. 对任何 $(p, v) \in TM$, 投影映照 π 由 $\pi(p, v) = p$ 所定义. $\pi^{-1}(p)$ 中的向量空间结构由

$$t_1(p, v_1) + t_2(p, v_2) = (p, t_1v_1 + t_2v_2)$$

所决定.

下面来说明其局部平凡性.

对任一点 $p \in M$, 存在坐标邻域 $p \in U \subset M$ 和坐标映照 $\varphi(U) = (x^1, \dots, x^n) \subset R^n$ (其中 n 为流形 M 的维数). 设 $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ 是 p 点第 i 坐标曲线切向量, 那么定义 $h: U \times R^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ 如下:

$$h(p, v) = v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

其中 $v = (v^1, \dots, v^n)$. 反过来, 对任何 $e \in \pi^{-1}(U)$, 令

$$p' = \pi(e) \in U,$$

那末

$$e = e^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{p'},$$

我们有