博士丛书

解非线性分枝问题的扩展方程方法

吴微 著

科学出版社

博 士 丛 书

解非线性分枝问题的扩展方程方法

吴 微 著

科 学 出 版 社

1993

(京) 新登字 092 号

内 容 简 介

本书研究近年来非线性问题的一大热门 —— 分枝问题，即研究非线性方程的解的个数和稳定性随参数的变化的问题。这方面结果是对非线性动力系统进一步研究（例如系统的终极状态、吸引子、混沌等等）的基础。我们特别注意到带有各种对称性的非线性方程，并采用扩展方程方法作为本书的框架，这样在理论上常常可以将复杂的高阶分枝问题化成简单的低阶分枝问题，更重要的是它的许多结果可以直接用于分枝问题的数值计算，或者给数值计算提供重要信息。本书可供理工科高年级学生作选修课，或作为研究生课程，也可供处理非线性问题的工程技术人员和科研工作者作为参考书。

博 士 丛 书

解非线性分枝问题的扩展方程方法

吴 微 著

责任编辑 毕 颖 林 鹏

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993年12月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1993年12月第一次印刷　　印张：4 3/8

印数：1—2 000　　字数：103 000

ISBN 7-03-003987-4/O · 700

定 价：5.50元

序

环顾当今世界，国家的发达，民族的振兴，无一例外地离不开科学技术的推动作用。年轻博士们历来是科技队伍中最活跃、最富创造性的生力军。他们的科研成果是学科发展强有力的推动力量，是体现一个国家高层次教育水平和科研水平的窗口。为了系统地反映年轻博士们的科研成果，促使他们的快速成长，加强国际国内的学术交流，在老一辈科学家的热心支持下，科学出版社决定出版一套《博士丛书》。

我们指导思想是突出本丛书的学术性、创造性、新颖性、先进性和代表性，使之成为所有青年博士平等竞争的学术舞台和优秀科研成果的缩影。

这套丛书以专著为主，并适时组织编写介绍学科最新进展的综述性著作。它将覆盖自然科学各个领域，是一套充分体现我国青年学者科研成果和特色的丛书。

丛书编委会将在由著名科学家组成的专家委员会指导下开展编辑工作。本丛书得到了国家自然科学基金委员会和全国博士后管理协调委员会的特别资助。在此我们深表谢意。

《博士丛书》编委会

一九九三年十月

《博士丛书》专家委员会

《博士丛书》编委会

引　言

我们所处的世界是个非线性世界，几乎所有稍微准确一些地描述实际问题的方程都是非线性的．近几十年来，随着更加精确地描述和解决实际问题的需要，随着数学研究本身的进展以及大型计算机的出现和完善，各种非线性问题日益引起科学家和工程技术人员的重视和兴趣．分枝理论是非线性问题研究中的重要一环，近一、二十年来得到了突飞猛进的发展，可以说是成果斐然，方兴未艾．分枝理论研究非线性方程的解（包括定常解及周期解）的个数和稳定性随控制参数 λ 的变化．这种变化通常是在导算子的特征值随 λ 变化而穿过虚轴时发生的．另外，分枝理论还给相应的动力系统的更深一步的研究提供了基础（例如动力系统当 $t\to\infty$ 时的极限状态，局部分枝现象引出的同宿、异宿轨道，周期加倍导致混沌等等）．

非线性方程常常具有某种对称性．非线性方程的对称性是它们所描绘的实际问题所在的空间区域的对称性或关于空间变量的周期性等等的反映．一般地，参数越多可能发生的分枝现象就越复杂．但是过多的参数是不切实际的，因为在实际问题中很难同时控制太多的参数．但是带有各种对称性的非线性方程只须较少的参数便可呈现丰富多彩的分枝现象．因此，对称性的影响成为近年来分枝理论研究的一大热门．本书第四章、第五章的内容就是这方面的反映．

本书的另一特点是直接在 Banach 空间或 Hilbert 空间上考虑问题．因此，我们的结果可以直接应用于非线性偏微分方程或微分积分方程等等．

在理论上研究分枝问题的一个主要方法是基于 Liapunov-Schmidt 方法的奇异性理论（singularity theory [5, 6]）．粗略地说，这种方法将一般的高维非线性方程分枝问题化为低维（常常是一

维或二维）分枝问题，使该分枝问题的奇异性充分暴露出来，常常可以得到理论上较为圆满的结果. 我们采用的框架则是扩展方程方法，这种方法的基本想法是通过引入新的方程来扩展原来的非线性方程，从而消除分枝问题的奇异性. 这样做的缺点是有时其结果不象奇异性理论那样圆满. 但是这种方法有几个优点，使它成为分枝问题研究领域的一个重要的，甚至是不可缺少的方面军. 我们觉得，它的第一个优点是直接处理高维甚至无穷维问题，不象奇异性理论那样需要将所得结果经过解释方能用于原来的高维问题. 它的第二个（稍大些的）优点是可以将许多复杂的高阶分枝问题（例如不但非线性方程的一阶导算子，而且其它高阶导算子也奇异的时候）化成简单的低阶分枝问题，从而可以直接应用已有的结果. 它的第三个（最大的）优点是其结果常常可以直接用于计算机上的数值计算，或为数值计算提供重要而有用的信息. 可以说，扩展方程方法是数值求解分枝问题的首选方法. 因此，毫不奇怪，在近年的非线性热潮中由计算数学转入分枝问题研究的人们（包括作者本人）中，绝大多数都以扩展方程方法为其手段和工具. 以扩展方程方法为框架研究分枝问题的专著还没有见到，本书试图弥补这一缺憾，权充引玉之砖.

本书第二、三章的结果都是熟知的，不过是按照扩展方程方法的框架加以适当编排. 第三、四章包含一些近年来的新成果，大部分取材于作者以及作者与英国 A. Spence，P. Aston，K. A.-Cliffe，比利时的 D. Roose，国内李荣华先生以及吴柏生、苏毅等人近年来的合作研究. 当然这里和本书其它地方所引文献仅仅表示在那里可以找到相关的内容，并不涉及任何研究成果的优先权等等.

本书大致内容如下。在第一章，我们给出一些本书中反复用到的定义和基本定理，例如隐函数定理. 我们需要用到的泛函分析等等高深一点的知识并不多. 我们希望将它们汇总于这一章，以使得本书基本上自给自足. 在第二章，我们讨论只有一个参数时

的四种最基本的分枝现象：转折点分枝，从已知解曲线的分枝，音叉分枝和 Hopf 分枝．各种适当的扩展方程被用来确定这些分枝点，计算其分枝解，并考察其稳定性．接着，在第三章，我们对带两个参数的非线性方程的几种稍复杂些的分枝问题，通过适当的扩展方程化为第二章中相应问题，从而顺利地得到解答．这个基本思路同样应用于第四、第五章，分别考虑带 Z_2-对称性和 $O(2)$-对称性的非线性方程．特别地，在第五章，我们将注意力集中于几种特殊的周期解和拟周期解：立波，行波和拟行波．

吉林大学数学系李荣华教授、黄明游教授和清华大学数学系王铎教授阅读了书稿，并提出宝贵意见，作者谨此致以深深谢意．作者也衷心感谢科学出版社林鹏编辑的热情帮助．由于作者水平所限，加之成书时间较为仓促，本书疏漏之处，在所难免．诚望各界不吝赐教，多多批评．

目　录

第一章　预备知识

本书研究非线性发展方程

$$u_t = f(u,\ \Lambda),f: U \times R^m \to V \tag{1.1}$$

及相应的定常方程

$$f(u,\ \Lambda) = 0 \tag{1.2}$$

的解的分枝问题.这里 U 和 V 是两个 Banach 空间,我们总假定 $U \subset V$,f 是光滑的非线性算子,u 是状态变量,Λ 是控制参数.通常 Λ 表示(1.1)或(1.2)所描述的物理化学等实际问题中可以人工控制的参数,而 u 表示给定 Λ 后上述问题的状态.在本书我们只考虑 $m=1$ 和 2 的情形.让我们给出两个著名的非线性方程的例子.

例 1.1　Lorenz 气象方程([13]):

$$x_t = -\sigma x + \sigma y, \tag{1.3a}$$

$$y_t = \gamma x - y - xz, \tag{1.3b}$$

$$z_t = -bz + xy. \tag{1.3c}$$

相应于一般形式(1.1),我们有 $u=(x,y,z)$,$\Lambda=(\sigma,\gamma,b)\in R^3$,$U=V=R^3$.这里参数 σ,γ 和 b 分别表示 Prandtl 数,Rayleigh 数和形态比,u 表示气象状态.在实用中可根据需要选用一个或两个参数,固定其它参数.

例 1.2　Sine-Gordon 方程:

$$W_{tt} + \alpha W_t - \Delta W + \beta\sin W = g,(x,t) \in \Omega \times R_+, \tag{1.4a}$$

$$W = 0,\quad 于\ \partial\Omega \times R_+, \tag{1.4b}$$

$$W(x,0) = W_0(x),W_t(x,0) = W_1(x),x \in \Omega. \tag{1.4c}$$

这里 $\Omega\in R^n$ 是光滑开区域,$\partial\Omega$ 是其边界,R_+ 表示正数集合,$\Lambda=(\alpha,\beta,g)\in R^3$ 是参数.令 $v=W_t$,$u=(W,v)$,则(1.4)可改写成

$$u_t = f(u,\ \Lambda),\quad t>0 \tag{1.5a}$$

$$u = (W_0,W_1),\quad t=0 \tag{1.5b}$$

其中

$$f(u,\ \Lambda):=(v,\ -\alpha v+\Delta W-\beta\sin W+g).$$

这时,$U=H^2\times H^2$,$V=H^0\times H^0$,其中 H^0 表示 Ω 上满足零边值条件的无限光滑函数类 C_0^∞ 按以下范数的闭包:

$$\|v\|_{H^0}:=\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{1/2}. \tag{1.6}$$

H^2 表示 C_0^∞ 按以下范数的闭包

$$\|v\|_{H^2}:=\|v\|_{H^0}+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{H^0}+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{H^0}. \tag{1.7}$$

注意 H^0 和 H^2 都是 Banach 空间,即按相应的范数是闭的线性空间.

非线性方程常常具有某种对称性.这里所谓对称性,粗略地说是指存在一族线性算子 $\Gamma:V\to V$(准确地说是存在一个李群)使得 $\Gamma:U\to U$ 并且

$$\gamma f(u,\ \Lambda)=f(\gamma u,\ \Lambda),\forall\ (u,\ \Lambda,\gamma)\in U\times R^m\times\Gamma. \tag{1.8}$$

对称性(symmetry)亦称可交换性(commutability)或等变性(equivariance).作为例子,我们讨论三种对称性:X_0-对称性,Z_2-对称性及 $O(2)$对称性,主要讨论后两种。

X_0-**对称性**(参见第二章§2).$\Gamma=\{\varnothing\}$,其中$\varnothing$是零算子.这时我们总有

$$f(0,\ \Lambda)=0,\quad\forall\quad\Lambda\in R^m. \tag{1.9}$$

例如,例 1.1 中的右端函数即满足 X_0-对称性.例 1.2 当 $g=0$ 时也满足 X_0-对称性.

Z_2-**对称性**(参见第二章§3 及第四章).$\Gamma=\{I,s\}$,其中 I 是单位算子,s 是某一线性算子满足 $s\neq I$,$s^2=I$.例如,定义

$$su=s(x,y,z)=(-x,\ -y,z), \tag{1.10}$$

则例 1.1 具有 Z_2-对称性.

$O(2)$-**对称性**.这时,Γ 是一个一维流形,详见第五章.

本书仅仅需要一些基本的泛函分析知识. 为了读者方便,我们把它们罗列如下.

1.1 **线性空间** 我们将一些元素(称为向量或点)的集合称为(实)线性空间 X,如果对这些元素定义了向量加法(给定 $x,y\in X$,其和 $x+y\in X$)以及向量与实数的乘法(给定实数 α 和向量 $x\in X$,其乘积 $\alpha x\in X$),并且满足以下关系:

(1)$x+y=y+x,\forall\ x,y\in X$;

(2)$(x+y)+z=x+(y+z),\forall\ x,y,z\in X$;

(3)存在 X 的零元素 O 使 $O+x=x+O=x,\forall\ x\in X$;

(4)对每个 $x\in X$,存在逆元素 $-x$ 使 $x+(-x)=0$;

(5)$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,\forall\ \alpha,\beta\in R,x\in X$;

(6)$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\forall\ \alpha,\beta\in R,x\in X$;

(7)$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\forall\ \alpha\in R,x\in X$;

(8)$1x=x,\forall\ x\in X$.

(若在上述定义中将实数域 R 换作复数域 C,可类似定义复线性空间)

例 1.3 $X=R$,这时每一 X 中元素就是实轴上的点,加法和乘法按普通定义.

例 1.4 $X=R^n:=\{x|x=(x_1,\cdots,x_n)$,每一 $x_i\in R\}$. 定义

$$x+y:=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$
$$\alpha x:=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n).$$

例 1.5 X 为所有实系数一元 n 次多项式的集合.

例 1.6 $X=C^\infty$,即在给定区域(R^n 或 R^n 中某一开集)上无限光滑的所有函数的集合.

1.2 **Banach 空间** 线性空间 X 称为赋范线性空间,如果对 X 中向量定义了一种范数(即向量"长度"的一种度量)$\|\cdot\|:X\to R_+$(R_+表示非负实数集合),满足以下三条性质:

(1)$\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

(2)$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\forall\ x,y\in X$;

(3) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$,$\forall \alpha \in R, x \in X$.

下面给出几个赋范线性空间的例子.

例 1.7 $X=R$, $\| x \| := |x|$.

例 1.8 $X=R^n$, $\| x \| := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$(称为最大范数). 或者定义 $\| x \| := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$(称为 l_2 范数).

例 1.9 X 在例 1.5 中定义,范数定义为

$$\| p \| := \sup_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|,$$

这里 $p\in X$,定义为

$$p = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

有了范数以后,就可以很自然地引入收敛和极限等概念. 称 X 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于极限 x_0,如果

$$\| x_n - x_0 \| \to 0, \text{当 } n \to \infty.$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为柯西序列,如果任给 $\varepsilon>0$,都存在正整数 N 使得

$$\| x_n - x_m \| < \varepsilon, \forall\, n,m > N.$$

如果赋范线性空间 X 中所有柯西序列皆有 X 中某点 x_0 为其极限,即 X 是完备的,则称 X 为 Banach 空间.

例 1.7—1.9 皆为 Banach 空间. 容易证明,任何有限维赋范空间都是 Banach 空间. 下面给出两个 Banach 空间和一个赋范空间但非 Banach 空间的例子.

例 1.10 无穷维 l_2 空间. 对无穷维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots)$定义

$$\| x \| := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

记只有有限个分量非零的无穷维向量的集合为 X_0. 显然 X_0 按以上范数成为赋范线性空间,但是并非是 Banach 空间. 记 X 为 X_0 按以上范数的闭包(即 X_0 中所有元素,再加上由 X_0 中元素组成的所有柯西序列的极限点),则 X 当然地成为 Banach 空间.

例 1.11 例 1.2 中的 H^2 和 H^0 都是 Banach 空间,这一类空间称为 Sobolev 空间.

1.3 Hilbert 空间 Hilbert 空间是定义了内积的 Banach 空间. 所谓内积是定义于复线性空间 $X\times X$ 上的一个映射:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to C.$$

这里 C 是复数域(当然我们也可以限制内积是实数),满足以下性质

(1) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta(y,z)$, $\forall\ \alpha,\beta\in C; x,y,z\in X$;

(2) $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$, $\forall\ x,y\in X$;

(3) $\langle x,x\rangle$ 是非负实数, $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$.

由以上性质,对 Hilbert 空间,很自然地应该选择范数为

$$\| x \| := \langle x,x\rangle^{1/2}.$$

例 1.12 l_2 空间(见例 1.10),定义

$$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i,$$

这时我们充许 x 和 y 的分量取复数值.

例 1.13 H^0(见例 1.2),定义

$$\langle x,y\rangle := \int_{\Omega} x(\tau)\,\overline{y(\tau)}\,d\tau.$$

类似地, x 和 y 可以是复值函数.

1.4 线性算子与线性泛函

设 X,Y 是两个 Banach 空间. 一个映射 $l=l(x): X\to Y$ 称为线性算子,如果它满足

$$l(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha l(x_1) + \beta l(x_2),$$

$$\forall\ \alpha,\beta \in R(\text{或复数域 } C), x_1, x_2 \in X.$$

X 到 Y 的所有线性算子的集合记为 $L(X,Y)$. 当 $X=Y$ 时,也记为 $L(X)$. 特别地,当 $Y=R$(或 C 时),也称 l 为线性泛函, Banach 空间 X 上的所有的线性泛函的集合记为 X',称为 X 的对偶空间.

例 1.14 对 Hilbert 空间 X,设 $x_0\in X$ 是某一固定向量,定义

$$l(x) := \langle x,x_0\rangle. \tag{1.11}$$

显然 l 是一线性泛函,可以证明,对 Hibert 空间上的任一线性泛函

$l(x)$，皆存在唯一的 $x_0 \in X$ 使(1.11)成立(Reitz 表现定理).

例 1.15 对 l_2 空间(见例 1.10)X，定义

$$l(x) = x_j, \forall\, x = (x_1, x_2, \cdots) \in X,$$

这里 j 是某一固定下标，则 $l(x)$ 是一线性泛函.

相应于 Banach 空间 X 上的任一非零线性泛函 l，可以分解 X 为

$$X = X_0 \oplus X_1, \tag{1.12}$$

其中

$$X_0 := \{x \in X, l(x) = 0\},$$

$$X_1 := \mathrm{span}(\varphi_0) := \{x \mid x = \alpha\varphi_0, \alpha \in R\},$$

φ_0 是 X 中满足 $l(\varphi_0)=1$ 的某一向量，而$\oplus$表示直接和，即 X 中任一元素可唯一地表为 $x=x_0+x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1$. (1.12)的证明留作习题.

1.5 导算子 设 X 和 Y 是 Banach 空间，分别具有范数 $\|\cdot\|_X$和 $\|\cdot\|_Y$. $f=f(x): X\to Y$ 是一映射. 如果对给定 $x \in X$，存在 $X\to Y$ 的线性算子 $A=A(x)$使得

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(x+h)-f(x)-Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \tag{1.13}$$

则称 $f(x)$在 x 点处 Frechet 可微. 线性算子 A(记为 f_x 或 $f_x(x)$当需要特别指出 x 点时)称为 $f(x)$的 Frechet 导数，亦称导算子或线性化算子等等. 导算子 $f_x(x)$作用在 $h \in X$ 上成为

$$f_x(x)h = \frac{d}{d\tau} f(x+\tau h)\Big|_{\tau=0} = \lim_{\tau\to 0} \frac{f(x+\tau h)-f(x)}{\tau}, \forall\, h \in X. \tag{1.14}$$

上式右端的极限当然是在 $\|\cdot\|_Y$ 范数意义下. 从(1.14)看出，$f_x(x)h$相当于在 x 点处沿 h 方向 $f(x)$的方向导数.

例 1.16 设 $f=(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$是 R^n 到 R^m 的光滑多元函数，则其导算子为

$$
f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.
$$

这时，也称 f_x 为 Jacobi 矩阵.

也可以类似地定义高阶导算子. 例如 $f(x)$ 的 m 阶导算子 $A=A(x)$ 是 $X^m \to Y$ 的一个线性算子，定义为

$$
Ah_1h_2\cdots h_m := \frac{d^m}{d\tau_1\cdots d\tau_m} f(x+\tau_1h_1+\cdots+\tau_mh_m)\Big|_{\tau_1=\cdots=\tau_m=0}.
$$

另外，对带参数的非线性映射，例如 $f(x,\lambda): X\times R \to Y$，可以类似地定义偏导数 $f_\lambda, f_{x\lambda}$ 等等：

$$
f_\lambda = f_\lambda(x,\lambda) := \frac{d}{d\tau} f(x,\lambda+\tau)\Big|_{\tau=0},
$$

$$
f_{x\lambda}h = f_{x\lambda}(x,\lambda)h := \frac{d^2}{d\tau_1 d\tau_2} f(x+\tau_1 h, \lambda+\tau_2)\Big|_{\tau_1=\tau_2=0}.
$$

我们提请注意，例如 $f_{xx}(x,\lambda)h_1h_2$ 表示在 (x,λ) 处定义的二阶导算子 $f_{xx}(x,\lambda)$ 作用到点 h_1, h_2 上，得到的结果是 Y 中一个向量. 而 $f_{xx}(x,\lambda)h_1$ 则表示 $L(X,Y)$ 中一个线性算子，它作用到 $h_2\in X$ 上的结果便是 $f_{xx}(x,\lambda)h_1h_2$. 我们总假定 $f(x,\lambda)$ 是足够光滑的，从而有 $f_{xx}(x,\lambda)h_1h_2 = f_{xx}(x,\lambda)h_2h_1$ 等等.（这一点与多元函数足够光滑时，求偏导数的次序可以变动这一点类似）

象在实数域上一样，我们对定义在 Banach 空间上的光滑函数 $f(x): X\to Y$ 也有 Taylor 展式. 记 $f^{(m)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 m 阶导算子，则

$$
f(x+h) = f(x) + f^{(1)}(x)h + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2 + \cdots \tag{1.15}
$$

$$
+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + O(\|h\|_X^{n+1}).
$$

类推地可以处理带参数的映射 $f(x,\lambda)$，只须将 $(x,\lambda)\in X\times R^m$ 看作新的向量 x，$X\times R^m$ 看作新的 Banach 空间 X，在(1.15)中和在本书