声波导

〔英〕M. R. 雷特伍特著　严仁博譯

上海科学技术出版社

声·波·导

〔英〕M. R. 雷特伍特 著
严仁博 譯

上海科学技术出版社

內容提要

本书是探討声波导的行为和特性的理論著作。全书分十三章，分別介紹无界媒质中的連續波、界面上波的反射和折射、流体和固体波导中的連續波和脉冲、多层波导、固体諧振器和各向异性媒质等。

本书供声学研究和教学人員参考。

MECHANICAL WAVEGUIDES

Martin R. Redwood

Pergamon Press (1960, 第1版)

声·波·导

严仁博 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 8 4/32　排版字数 199,000

1965年7月第1版　1965年7月第1次印刷

印数 1—1,500

統一书号 13119·615　定价(科六) 1.20元

序　言

在遇到使用声波导的許多研究工作中，对波导本身的研究仅是輔属的．研究工作者的主要兴趣可能是在材料中衰減的测量方面(他希望从这种工作中，找到有关这些材料的某些物理性质)，而他的专业知識可能是在物理学、化学、冶金学或者工程技术的某个分支方面．在应用多种的实驗技术时，如果他的测量要可靠的話，那末，他必須了解一些导行声波的性质．

由于研究工作者的专业爱好是多种多样的，所以我想把本书作为对导行波性质的引論，讀者在理解了最初几章中所概述的基本原理后，对以后掌握一些更高深的文献就具备了良好的基础．除了描述基本原理外，还对最近的研究作了广泛的論述，这里虽然只可能对其中几篇重要的論文进行詳細的討論，但其他許多篇論文亦附于有关各章的后面．我希望，这些論述能够对在声波导方面有些經驗的研究工作者有所裨益，而介紹基本理論的章节則有参考价值．

全书着重于导行波的理論分析，所以除参考文献一覽表(附录V)以外，我沒有对証实这些理論的实驗技术詳加闡述．在本书中，时常出現有关这些实驗技术的評述，我想，如果讀者还需要更詳細的資料，最好查閱原始文献．

本书的大部分討論中，假設声波受到构成波导本身的这些固体和流体的“內摩擦”，而引起的衰減是很小的．在实际波导中通常选取低損耗的材料，故內摩擦对于傳播速度的影响是可以忽略

的．除了导行波在經过长距离傳播后，整个振幅有所衰減外，对导行波的其他特性的影响是微小的．內摩擦的机理是复杂的，在这个問題上已經刊印了大量有关資料．由于这方面已有多种广袤的評論（見附录 V），故这里将不再作討論了．

另外还有三本同本书有密切联系的书，它們对讀者来說是会有帮助的：Kolsky 著的“固体中的应力波”(Stress Waves in Solids)是一本概述性的著作，包括波的傳播問題，不过它远不如本书討論得詳尽，但对內摩擦的測量也进行了解釋．Love 的經典著作，“彈性力学的数学原理”(Mathematical Theory of Elasticity)包括了本书第 1 章的整个內容，但比本书所述的更为詳細，它还涉及到彈性力学的其他很多方面．Ewing、Jardetsky 和 Press合著的“分层媒质中的彈性波”(Elastic Waves in Layered Media)亦是值得推荐的一本，在数学方面要比本书更深一些，而且較多地闡及到地震学方面的問題（在大尺度自然波导中的低頻傳播），但书中的最初三章全面地綜述了本书第 1、2 章所叙述的一些現象．

有关参考文献方面，这里还需作个說明．在文章中所提及的参考文献是用两个数字来表示的，例如[3·10]表示第 3 章的第 10 篇参考文献．

很多国外文章的英文摘要都刊载在“物理学文摘”(Physics Abstracts)上，它和“应用力学評論”(Applied Mechanics Reviews)几乎包括了所有本书中提及的英文文献的摘要．所有期刊名称的縮写，除了一个例外†，都是按这两种期刊中所采用的縮写代号．

最后，在本书的末尾，讀者可見到第 1～3 章中的一些最重要方程的摘要，因在其他各章的分析中常要用到，故把它們集录在一起．

作者

† *J. A. S. A.—Journal of the Acoustical Society of America.*

目 录

第 1 章

无界媒质中的傳播

本章将討論流体和固体中波的某些一般特性．我們将从应力和应变的定义和胡克定律(描述应力和应变关系)着手,来推导"波动方程"．为了找出在任何有界或无界媒质中波的数学表示式,必須求出这方程的解．如果有边界存在，这些解也还必須要满足边界上的一定条件．本书的大部分将是考察这些"边界条件"，选擇满足这些边界条件的解和解釋所得結果的物理意义．然而，在第1章中，我們将只討論无界媒质的簡单問題.

我們将考虑流体和固体两种情况．方便的方法是先推导出固体的波动方程，然后使剛性模量等于零而得到流体的波动方程．首先，我們必須討論应力和应变的关系.

1·1 应变和位移

考虑各向同性固体中的某点 $P(x,y,z)$．假設固体是理想的，波在里面傳播时，不会因內摩擦而引起振幅的任何損失．如使 P 点有一位移，位移的坐标是 $(u,\ v,\ w)$，其邻点 $Q(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$有一位移$(u+\delta u,\ v+\delta v,\ w+\delta w)$．按 Taylor 定理，

$$\left.\begin{aligned}
u+\delta u&=u+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\delta z\,;\\
v+\delta v&=v+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\delta z\,;\\
w+\delta w&=w+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\delta z\,;
\end{aligned}\right\}\qquad(1\cdot1)$$

式中忽略了高次項．为了簡化分析，使

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e_{xx};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e_{yy};\quad \frac{\partial w}{\partial z}=e_{zz};\tag{1·2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=e_{xy}=e_{yx};\\&\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=e_{zx}=e_{xz};\\&\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=e_{yz}=e_{zy};\end{aligned}\right\}\tag{1·3}$$ †

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\bar{\omega}_z;\\&\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=2\bar{\omega}_y;\\&\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=2\bar{\omega}_x.\end{aligned}\right\}\tag{1·4}$$

現在可把位移写为

$$\left.\begin{aligned}u+\delta u=u&+\left(e_{xx}\cdot\delta x+\frac{1}{2}e_{xy}\cdot\delta y+\frac{1}{2}e_{zx}\cdot\delta z\right)\\&+(\bar{\omega}_y\cdot\delta z-\bar{\omega}_z\cdot\delta y);\\v+\delta v=v&+\left(\frac{1}{2}e_{xy}\cdot\delta x+e_{yy}\cdot\delta y+\frac{1}{2}e_{yz}\cdot\delta z\right)\\&+(\bar{\omega}_z\cdot\delta x-\bar{\omega}_x\cdot\delta z);\\w+\delta w=w&+\left(\frac{1}{2}e_{zx}\cdot\delta x+\frac{1}{2}e_{yz}\cdot\delta y+e_{zz}\cdot\delta z\right)\\&+(\bar{\omega}_x\cdot\delta y-\bar{\omega}_y\cdot\delta x).\end{aligned}\right\}\tag{1·5}$$

容易証明：e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} 各項分别代表 P 点邻近的媒质在平行于 x, y 和 z 軸方向的簡单伸长. e_{xy}, e_{yz} 和 e_{xz} 代表应变的剪切分量，并分别等于原来是方形的体积单元在 xy, yz 和 xz 平面中角度的变动. $\bar{\omega}_x$, $\bar{\omega}_y$ 和 $\bar{\omega}_z$ 相当于把这单元当作剛体时的旋轉.

考虑图 1·1[1·2] 所表示的二維模型. 单元 $ABCD$ 經位移和变形后为 $A'B'C'D'$. 从图中可見，$\delta u/\delta x$ 是长度单元 δx 在有应变时的相对伸长. 此外，

† 必需指出，我們会发現好几个关于切应变的定义. 用在方程 (1·3) 中的是按照 Love[1·1] 的定义. 我們写为 e_{xy}，但也有很多人写成 $2e_{xy}$ 等等的.

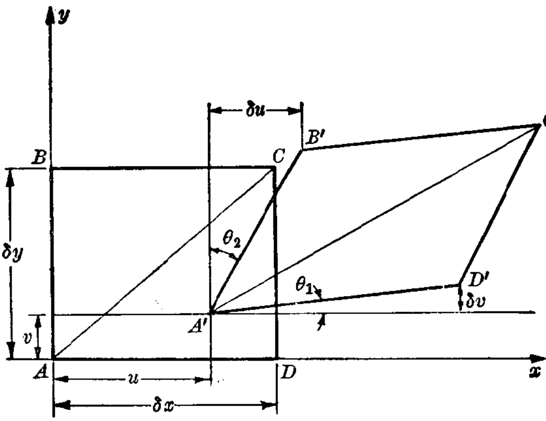

图1·1 纵应变，切应变和旋轉

$$\tan\theta_1=\frac{\delta v}{\delta x},\quad \tan\theta_2=\frac{\delta u}{\delta y}.$$

在极限情况时，

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\theta_1+\theta_2=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=e_{xy},$$

卽为切应变．同样，

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\theta_1-\theta_2.$$

这对应于 AC 所轉动角度的二倍——单元 $ABCD$ 的两边形变为 θ_2 时，使对角綫下降 $\theta_2/2$，而另两边形变时，使对角綫升起 $\theta_1/2$．因此，$\overline{\omega}_z$ 等于单元圍繞 z 軸的旋轉．

在处理应变时，常要用到体积膨脹 Δ．它表示产生位移时体积的改变，幷規定为 δx, δy 和 δz 趋近于零时，比値(体积增量/原来体积)的极限

$$\Delta=\lim_{\delta x,\,\delta y,\,\delta z\to 0}\frac{(\delta x+e_{xx}\cdot\delta x)(\delta y+e_{yy}\cdot\delta y)(\delta z+e_{zz}\cdot\delta z)-\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z}{\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z},$$

$$\Delta=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1·6}$$

旋轉可写成矢量形式 $\overline{\boldsymbol{\omega}}=\frac{1}{2}\operatorname{curl}\mathbf{s}$，其中 $\mathbf{s}$ 是对应于 (u, v, w) 的位移矢量．膨脹 $\Delta=\operatorname{div}\mathbf{s}$．在本书中我們只是偶然地用矢量表

示法，因为在大部分我們所要参考的著作中是不用它的．在附录I中摘录了一些重要方程的矢量表示式，因在有些书刊中会見到它們，而且当要变換坐标时，矢量表示式是很方便的．

矢量和張量在固体方程中用法的詳細討論可在Sommerfeld的著作[1·3]中找到．

1·2 应 力

为描述作用在物体中一个面积单元 δs 上的力，需要九个应力分量[1·1]

$$\begin{matrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{matrix}$$

我們按照习惯，使第一个下标表示垂直于应力作用面的坐标軸，第二个下标表示应力的方向．参閱图1·2会更清楚些．图中表示了以 δx, δy, δz 为边的体积单元，在其几个面上有应力．

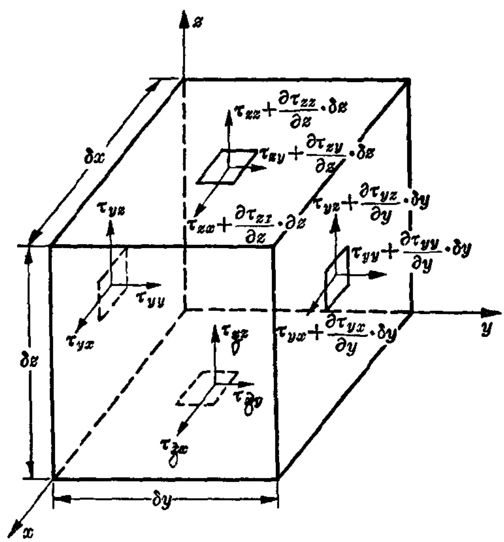

图1·2 受应力情况下，固体体积单元的平衡．这里沒有表示出平行于 yz 平面的应力．作用于面上的应力向着坐标軸的正方向

对不同的轴取力矩,就容易証明 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{zx}=\tau_{xz}$ 和 $\tau_{yz}=\tau_{zy}$. 因此,如有六个分量,应力就完全确定了.

1·3 应力-应变关系,弹性常数

在胡克定律的普遍形式中,假設六个应力分量的每一个都是六个应变分量的綫性函数. 于是就有 c_{11} 等 36 个弹性常数

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{xx}=c_{11}\\ \tau_{yy}=c_{21}\\ \tau_{zz}=c_{31}\\ \tau_{yz}=c_{41}\\ \tau_{zx}=c_{51}\\ \tau_{xy}=c_{61}\end{array}\right\}e_{xx}+\left.\begin{array}{l}c_{12}\\ c_{22}\\ c_{32}\\ c_{42}\\ c_{52}\\ c_{62}\end{array}\right\}e_{yy}+\left.\begin{array}{l}c_{13}\\ c_{23}\\ c_{33}\\ c_{43}\\ c_{53}\\ c_{63}\end{array}\right\}e_{zz}+\left.\begin{array}{l}c_{14}\\ c_{24}\\ c_{34}\\ c_{44}\\ c_{54}\\ c_{64}\end{array}\right\}e_{yz}$$

$$+\left.\begin{array}{l}c_{15}\\ c_{25}\\ c_{35}\\ c_{45}\\ c_{55}\\ c_{65}\end{array}\right\}e_{zx}+\left.\begin{array}{l}c_{16}\\ c_{26}\\ c_{36}\\ c_{46}\\ c_{56}\\ c_{66}\end{array}\right\}e_{xy}. \tag{1·7}$$

Love[1·1] 証明: 如果弹性能是应变的单值函数,则 $c_{jk}=c_{kj}$,而独立弹性常数的数目是 21 个. 最复杂的晶体需要这 21 个弹性常数来确定应力-应变关系;但在具有对称面的晶体中,数目可减少. 立方形晶体只有 3 个弹性常数,而各向同性的固体只有 2 个,就是 Lame 常数 λ 和 μ. μ 亦称做剛性或切变模量. 对于流体, μ 等于零,故只需要知道 λ.

在各向同性的固体中,

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=c_{12}=c_{13}=c_{21}=c_{23}=c_{31}=c_{32};\\ \mu=c_{44}=c_{55}=c_{66}=\dfrac{1}{2}(c_{11}-c_{12});\\ \lambda+2\mu=c_{11}=c_{22}=c_{33}.\end{array}\right\} \tag{1·8}$$

所有其他系数都等于零．我們有

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{xx}=\lambda(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})+2\mu e_{xx}=\lambda\Delta+2\mu e_{xx};\\&\tau_{yy}=\lambda(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})+2\mu e_{yy}=\lambda\Delta+2\mu e_{yy};\\&\tau_{zz}=\lambda(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})+2\mu e_{zz}=\lambda\Delta+2\mu e_{zz};\\&\tau_{yz}=\mu e_{yz},\ \tau_{zx}=\mu e_{zx},\ \tau_{xy}=\mu e_{xy}.\end{aligned}\right\}\tag{1·9}$$

λ 和 μ 完全确定了各向同性固体的彈性性质．然而，为了方便起見，常应用另外 3 个常数，卽楊氏模量 E，泊松比 σ 以及体积彈性模量或不可压縮性系数 k．Love[1·1] 証明了它們同 λ 及 μ 的关系是

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)};\ \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)};\\&E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu};\ \sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)};\ k=\lambda+\frac{2}{3}\mu.\end{aligned}\right\}\tag{1·10}$$

$\lambda=\mu$ 时的特殊情形称“泊松关系”，这时 $\sigma=1/4$，$k=5\mu/3$．在地震工作中有时假設 $\lambda=\mu$．

对于理想流体，μ 等于零，同时 $\tau_{xx}=\tau_{yy}=\tau_{zz}=k\Delta$．而且

$$-p=k\Delta;\tag{1·11}$$

式中，p 是流体静压力．負号是因为压力向內时算作正的，而应力向外时算作正的．液体的 k 值很大，但气体并不如此．对于不可压縮流体 $k=\infty$，$\sigma=1/2$．

1·4 固体和流体的运动方程

为导出物体中的波动方程，再次考虑一个体积单元（图 1·2）的平衡．重力之类这些作用于物体上的静力都从方程中略去．

作用于体积单元上合力的 x 分量是

$$\left(\tau_{xx}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\cdot\delta x-\tau_{xx}\right)\cdot\delta S_x+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\cdot\delta y-\tau_{yx}\right)\cdot\delta S_y$$
$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\cdot\delta z-\tau_{zx}\right)\cdot\delta S_z;$$

式中，$\delta S_x=(\delta y\cdot\delta z)$ 等等．故該分量可写为

$$\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z.$$

按牛顿第二定律，这个力将等于 x 方向的惯性力

$$\left(\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z\right);$$

其中 ρ 是材料的密度.

相似的理由可用于 y 和 z 方向的分力，因此我們得三个方程：

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z};\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z};\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{1·12}$$

这些方程对于各向同性的和各向异性的媒质都是正确的.

对于各向同性的固体，以方程(1·9)代入方程(1·12)得出三个方程，其中第一个是

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\varDelta+2\mu e_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(\mu e_{yx})+\frac{\partial}{\partial z}(\mu e_{zx}).$$

代入方程(1·2)和(1·3)来表示应变，我們得

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=(\lambda+\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u;\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=(\lambda+\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v;\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=(\lambda+\mu)\frac{\partial\varDelta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w;\end{aligned}\right\}\tag{1·13}$$

式中，拉普拉斯算子是

$$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

我們可把这些方程写为矢量形式

$$\left.\begin{aligned}&\rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\varDelta-2\mu\operatorname{curl}\bar{\boldsymbol{\omega}};\\ \text{式中，}\quad&\bar{\boldsymbol{\omega}}=\frac{1}{2}\operatorname{curl}\mathbf{s};\ \varDelta=\operatorname{div}\mathbf{s}.\end{aligned}\right\}\tag{1·13a}$$

利用算子 grad, div 和 curl(附录 I)的适当形式,我們可以写出在其他坐标系統中的相当于方程(1·13)的方程.

对于流体, $\mu=0$ 和 $\lambda=k$, 故

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=k\frac{\partial\Delta}{\partial x};\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=k\frac{\partial\Delta}{\partial y};\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=k\frac{\partial\Delta}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{1·14}$$

1·5 固体和流体的波动方程

1·5·1 用势函数 ϕ 和 ψ 表示:直角坐标

如果我們引入两个势函数, 将使以后在直角坐标中的分析簡单些. 这两个势函数就是标量势 ϕ 和具有分量为 ψ_x, ψ_y, ψ_z 的矢量势 ψ,其定义如下[1·4]:

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z};\\ v&=\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi_x}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z}{\partial x};\\ w&=\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{1·15}$$

因此,膨胀为

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\nabla^2\phi.\tag{1·16}$$

現在可把方程(1·13)中的第一个方程写成这样的形式:

$$\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)+\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi_z}{\partial t^2}\right)-\rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right)$$
$$=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\phi)+\mu\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi_z)+\mu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\phi)-\mu\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\psi_y).$$

要滿足这个方程和由方程 (1·13) 导出的另两个类似方程, ϕ 和 ψ 必須是方程

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{c_d^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},\tag{1·17}$$

$$\nabla^2\psi_i=\frac{1}{c_t^2}\cdot\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}\quad (i=x,\ y,\ z)\tag{1·18}$$

的解；式中，

$$c_d^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho};\tag{1·19}$$

$$c_t^2=\frac{\mu}{\rho}.\tag{1·20}$$

波动方程(1·17)和(1·18)表明，在一个彈性固体中，可以傳播的扰动有两种．势函数 ϕ 所代表的一种波以速度 c_d 傳播，并不包含旋轉．用以描述这种波的形容詞有好几个，其中有"纵的"、"压縮的"、"膨脹的"和"无旋的"．我們用下标"d"表示"膨脹的"．地震学家常称这种波为"P"波(显然是表示"推进的"的意思)，偶而我們也要用这个縮写字．

另一种对应于ψ的波称为"横波"、"切变波"、"等体积波"、"旋轉波"或"畸变波"．我們用下标"t"表示其中第一个名称"横波"．同样，地震学家的縮写字"S"表示"切变波"．

在流体中，$\mu=0$，只可能有一种傳播速度

$$c_d=\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}=\sqrt{\frac{k}{\rho}}.\tag{1·21}$$

方程(1·18)趋于消失，因为理想流体中不能存在横波．流体中压力和 ϕ 的关系是容易求得的．由方程(1·11)知 $p=-k\Delta$，同时利用方程(1·16)、(1·17)和(1·19)得

$$p=-k\Delta=-k\nabla^2\phi=-\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.\tag{1·22}$$

流体中任一点的速度可用量 $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ 来描述，点子表示对时間的导数．u, v, w 得自方程(1·15)．

有时候 ϕ 的定义同这里规定的不同，而是等于我們这里的 $\partial\phi/\partial t$，即 $\dot{\phi}$．当然，$\dot{\phi}$ 同 p 以及 u, v 和 w 的关系是

$$p=-\rho\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial t};\quad \dot{u}=\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial x}\ 等等.$$