

多复变数函数论中的 典型域的调和分析

华 罗 庚

科学出版社

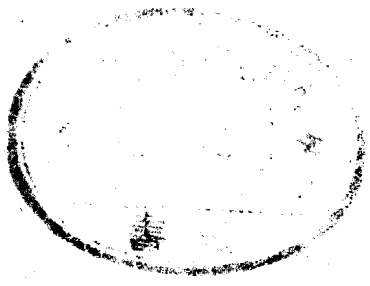


多复变数函数論中的 典型域的調和分析

华 罗 庚

科 学 出 版 社

1958



內 容 提 要

作者自 1952 年以来在多复变函数論方面发表过許多論文,本書包括这些論文的主要結果及一些尚未发表的結果。

在第一章中,証明了一系列的恒等式;第二章是关于矩陣积分的計算;第三章是方陣极坐标表示法及特征流形的体积的計算;第四章是关于核函数及 Cauchy 公式;第五章是矩陣双曲空間的調和分析;第六章是对称及斜对称方陣双曲空間的調和分析;第七章是超球双曲空間的調和分析。

多复变数函数論中的 典型域的調和分析

著 者 华 罗 庚

出版者 科 学 出 版 社

北京朝阳門大街 117 号
北京市書刊出版业营业許可証出字第 051 号

印刷者 中 国 科 学 院 印 刷 厂

总經售 新 华 書 店

1958 年 9 月 第 一 版

書号: 1404

1958 年 9 月 第一次印刷

字数: 167,000

(京) 道精: 1-770

开本: 787×1092 1/18

精平: 1-2,550

印张: 7 插页: 2

定价: (10) 道林精裝本 2.70 元
报纸平裝本 1.23 元

序

本书包括了作者对多复变数函数論的一部分系統的研究，其主要部分先后（从 1949 年至 1955 年）发表在我国“数学学报”上（一些初步报告发表在“苏联科学院报告”上）。除綜合、改組、增补、修訂的工作之外，还包括了一些新結果。

初稿曾在 1955 年的中国科学院第一次学部會議上书面宣讀，1956 年曾在第三屆全苏数学会上宣讀。

这一系列的工作在某种意义上可以說是完整的。但是从 1957 年初，另外一些綫索又在开始发展，那就是与調和函数有关的、与偏微分方程有关的、与羣表示論有关的各方面，并且已經完成了若干工作。其中很大一部分是和陸启鏗同志合作的。为了将来再准备出专集，本书中将不包括与那些有关的部分。

作者尽量設法使本书自給自足，除掉羣表示論的知識以外，并不需要太多的专门知識。

作者乘此感謝陸启鏗同志，他提了很多意見，指出了不少应当改善和修正的地方。龔昇、鍾同德二位同志的意見和幫助也使本书有所改进，一併致謝。

华 罗 庚 1957 年 5 月 · 北京

目 錄

序.....	(i)
导 言	(1)
§ 1. 典型域.....	(1)
§ 2. 域內的正常正交系.....	(2)
§ 3. 羣表示論的一个問題.....	(2)
§ 4. 方陣的极坐标.....	(3)
§ 5. 积分的具体算出.....	(3)
§ 6. 特征流形.....	(4)
§ 7. Cauchy 公式及 Poisson 公式.....	(4)
第一章 若干代数工具	(6)
§ 1.1. 代数恆等式.....	(6)
§ 1.2. 关于幂級数的恆等式.....	(12)
§ 1.3. 續前.....	(14)
§ 1.4. 关于 $N(f_1, \dots, f_n)$ 的若干恆等式.....	(19)
§ 1.5. 关于特征的恆等式.....	(19)
第二章 計算若干积分	(22)
§ 2.1. 与反正切函数相仿的一些积分.....	(22)
§ 2.2. 矩陣双曲空間的总体积.....	(28)
§ 2.3. 对称方陣双曲空間的总体积.....	(30)
§ 2.4. 斜对称方陣双曲空間的总体积.....	(33)
§ 2.5. 超球双曲空間的总体积.....	(34)
第三章 方陣的极坐标	(38)
§ 3.1. 酉积分元素.....	(38)
§ 3.2. 酉羣的傍系的积分.....	(40)
§ 3.3. 爱尔米方陣的极坐标.....	(41)
§ 3.4. 方陣的极坐标.....	(42)
§ 3.5. 对称方陣的极坐标.....	(46)
§ 3.6. 斜对称方陣的极坐标.....	(49)
§ 3.7. 实正交羣的体积及其一个应用.....	(53)
第四章 若干一般性的定理及其应用.....	(57)
§ 4.1. 圓型域的完整系.....	(57)

§ 4.2. 核函数	(58)
§ 4.3. 典型域 $\mathfrak{R}_I, \mathfrak{R}_{II}, \mathfrak{R}_{III}$ 的核函数	(61)
§ 4.4. 域 $\mathfrak{R}_{IV}$ 的核函数	(63)
§ 4.5. 圓型域的特征流形	(65)
§ 4.6. Cauchy 核	(67)
§ 4.7. Cauchy 公式	(68)
§ 4.8. 典型域的 Cauchy 核	(70)
§ 4.9. Poisson 核	(74)
第五章 矩陣双曲空間的調和分析	(76)
§ 5.1. 矩陣双曲空間的正交系	(76)
§ 5.2. 类函数的积分	(78)
§ 5.3. 續前	(80)
§ 5.4. 核函数	(82)
§ 5.5. 特征流形上的調和分析	(84)
§ 5.6. Cauchy 型积分	(86)
§ 5.7. 一个微分运算的方陣及調和函数	(88)
第六章 对称及斜对称方陣双曲空間的調和分析	(91)
§ 6.1. 对称西方陣上的正交系	(91)
§ 6.2. 核的在子空間中的射影	(92)
§ 6.3. $\mathfrak{R}_{II}$ 的正常正交函数系	(95)
§ 6.4. 斜对称空間的特征流形	(97)
第七章 超球双曲空間的調和分析	(98)
§ 7.1. 超球多項式	(98)
§ 7.2. 球面上的調和分析	(101)
§ 7.3. 核在子空間的投影	(102)
§ 7.4. 特征流形上的正交系	(104)
§ 7.5. $\mathfrak{R}_{IV}$ 的正常正交完整系	(105)
§ 7.6. 化重积分为单积分	(107)
§ 7.7. (7.6.3) 式的另一形式	(109)
§ 7.8. (7.7.5) 的証明	(110)
附录一 一些等式	(115)
附录二 矩陣坐标变換公式	(119)
参考文献	(121)

导 言

§ 1. 典型域

本文中所討論的典型域是指以下的四种域:

第一种是 m 行 n 列的矩陣双曲空間, 今后以 $\mathfrak{R}_I$ 表示. 它是由 m 行 n 列的复元素矩陣 Z 之适合于条件

$$I^{(m)} - Z \bar{Z}' > 0$$

者所組成, 此处 $I^{(m)}$ 表示 m 行列的单位方陣, $\bar{Z}'$ 表示由 Z 行列互換并取共軛复数所得出的矩陣, 因此它是 n 行 m 列的. 如果 H 是一个 Hermite 方陣, 則以 $H > 0$ 表示 H 是定正的.

第二种是 n 行列的对称方陣的双曲空間, 今后以 $\mathfrak{R}_{II}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素对称方陣 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} - Z \bar{Z} > 0$$

者所組成.

第三种是 n 行列的斜对称方陣的双曲空間, 今后以 $\mathfrak{R}_{III}$ 表示. 它是由 n 行列的复元素斜对称方陣 Z 之适合于条件

$$I^{(n)} + Z \bar{Z} > 0$$

者所組成.

第四种可以称为 Lie 球双曲空間, 今后以 $\mathfrak{R}_{IV}$ 表示. 它是由 $n (> 2)$ 維复元素矢量 $z (= (z_1, \dots, z_n))$ 之适合于諸条件

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0$$

及

$$|zz'| < 1$$

者所組成.

这四种域的維数(复数維)各为 mn , $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 及 n . 最后一种, 作者曾經証明(华罗庚[3])它也可以表成为 $2 \times n$ 实元素矩陣的双曲空間. 因此这四种域都可以归入作者所研究过的矩陣几何的范畴之中.

1935 年 E. Cartan [1] 曾經算出: 可递的不可分解的固对称域仅有六种可能性. 除以上的四种之外还有两种, 其一是 16 維的某一种空間, 另一是 27 維的某一种空間. 从維数可以看出这两种域是异常特殊的. 后經 A. Borel [1] 指出, 具体有效地定出这两种域还是問題. 因此一般說来, 以上所提出的四种域在具体地研究多变数函数論时, 是有它的特殊重要意义的, 于是仿典型羣的名称我們称它們为典型域. 本文的目的就在于具体地研究这些典型域的調和分析問題.

§ 2. 域內的正常正交系

以 z 代表 n 个复变数所成的矢量; $\Re$ 代表这 n 維复空間的一个簡單域. 适合于

$$\int_{\Re} |f(z)|^2 \bar{z} < \infty$$

的在 $\Re$ 內解析的函数 $f(z)$ 成一类, 以 B^2 表之, 此处积分过域 $\Re$ 的全部, $\bar{z} = \prod_{k=1}^n (dx_k dy_k)$, 而 $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$. S. Bergmann [1] 曾經証明: B^2 中有一完整正常正交系存在(关于証明可参考 Φ_{YKC} [1]), 即 B^2 中有一函数貫

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_\nu(z), \dots$$

存在, 使

$$\int_{\Re} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\mu(z)} \bar{z} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \nu = \mu, \\ 0, & \text{若 } \nu \neq \mu; \end{cases}$$

且若对所有的 ν 常有

$$\int_{\Re} f(z) \overline{\varphi_\nu(z)} \bar{z} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

則 B^2 中的解析函数 $f(z)$ 恆等于 0. 虽然有这样一般性的定理, 但对一实际域来具体定出一个完整正常正交系并不簡單. 本文的目的之一在于給与具体方法定出典型域中的完整正常正交系.

§ 3. 羣表示論的一个問題

习知, 这四类典型域都是圓型域. 不同次数的多項式是相互正交的, 所以我們的主要考驗在于把同次数的多項式分解为相互正交的系. 更清楚些, 命 $z = (z_1, \dots, z_n)$ 表一矢量, $z^{[l]}$ 表以

$$z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n} \sqrt{\frac{l!}{l_1! l_2! \cdots l_n!}}, \quad l = l_1 + \cdots + l_n$$

为支量的矢量, 这矢量的維数是

$$\frac{1}{l!} n(n+1) \cdots (n+l-1);$$

命

$$w = zU + \text{次数大于1的項}$$

表一把 $\Re$ 变为其自己且使原点不变的变形, 此 U 成一 n 行列方陣的羣, 此羣也以 U 代表. 在 $z^{[l]}$ 上引出了一个变形, 它的綫性部分的方陣 $U^{[l]}$ 是 U 的一个表示, 这是羣 U 的 l 次冪积 (Kronecker's power product). 把 $U^{[l]}$ 分解为不可化的支量, 对应地分解了綫性空間 $z^{[l]}$. 在这样的考虑之下, 我們引出了以下的与羣表示論有关的問題.

从 n 行列的一般綫性羣 GL_n 出发, 命 $f_1, \dots, f_n$ 代表 n 个整数, 并适合于

$$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n \geq 0.$$

对 GL_n 中的一个元素 X , 在 GL_n 的标签为 $(f_1, \dots, f_n)$ 的表示法中, 有对应元素

$$A_{f_1, \dots, f_n}(X),$$

它的行列数通常用 $N(f_1, \dots, f_n)$ 表示. 我們已經知道, 它是一个不可分解的表示法. 如又有一个羣 GL_N 的表示法

$$B_{g_1, \dots, g_N}(Y),$$

显然

$$B_{g_1, \dots, g_N}(A_{f_1, \dots, f_n}(X))$$

仍然是 GL_n 的一种表示法. 我們現在所提的問題是以上的羣表示可以分解为那些不可分解的直和. 这个一般性的問題本身是一个有趣的代数問題, 本文中未能完全地解决它. 但僥倖的是本文所用到的一些特例¹⁾ 确已完滿地解决了.

§ 4. 方陣的极坐标

在运用羣表示的方法获得了正交系之后, 我們又遇到另一个困难問題, 就是具体地算出正常化系数的問題. 为了这个目的, 在进行具体計算时, 引进了一个工具, 我們称它为方陣的极坐标. 例如, 我們已知任一复元素的对称方陣 Z 可以表成为

$$Z = U \Lambda U'$$

(华罗庚[1]), 此处 U 表示酉方陣, Λ 表示对角綫方陣, 其对角綫上的元素是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 且适合于 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. 命 $\{U\}$ 表酉羣对其子羣 $[\pm 1, \dots, \pm 1]$ 的傍系, 則一般說来, 一对称方陣 Z 与 $\{U\}$ 中的一元素及一个 Λ 是一一对应的. 这方陣 Λ 可以称为 Z 的向径, 而 U 可以称为幅角部分. 关于由 Z 到它的极坐标之間的具体計算关系(如函数行列式等), 在本文中都已算出. 本文中并列出若干虽与本文主题无直接关系但属于同一范畴的一些与矩陣极坐标有关的运算.

§ 5. 积分的具体算出

一些积分的具体算出也是本文中的一个环节, 例如我們算出了所有的四种域的欧几里得体积, 这些公式不在緒言中一一枚举. 但我們必須提出其中的一个, 即我們算出了: 当 $\alpha > -1$, $\alpha + \beta > -n$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{IV}} (1 - \bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2})^\alpha (1 - \bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2})^\beta z \\ = \frac{\pi^n \Gamma(\alpha + 1)}{2^{n-1}(\alpha + \beta + n) \Gamma(\alpha + n)}. \end{aligned}$$

从这一积分可以得到当 $\lambda < 1$ 时,

$$\int_{\pi_{IV}} (1 - 2\bar{z}z' + |zz'|^2)^{-\lambda} z = \frac{\pi^n \Gamma(1 - \lambda)}{2^{n-1}(n - 2\lambda) \Gamma(n - \lambda)}.$$

1) 在作者获得这些結果以后, 段学复教授指出, Thrall (Thrall [1]) 也曾得出这一結果, 但他所用的方法与本書中所用的方法完全不同. 特此致謝.

这解决了作者在 1946 年所提出的一个问题, 即在 $\mathfrak{R}_{IV}$ 域中 Poincaré 級数的收敛指数 $\geq 1 - \frac{1}{n}$, 并且这是最好的结果.

§ 6. 特征流形

关于特征流形有两种定义: 一是由极大值原理出发的; 另一是由决定性出发的. 换言之, 特征流形 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{R}$ 域的边界上的一部分. 前者是说, 凡 $\mathfrak{R}$ 内的解析函数都在 $\mathfrak{C}$ 上取极大绝对值, 并且对 $\mathfrak{C}$ 上的任一点, $\mathfrak{R}$ 中一定有一解析函数在该点取极大值. 后者是说, 一个 $\mathfrak{R}$ 内的解析函数, 如果已知它在 $\mathfrak{C}$ 上的值, 那么它就唯一决定了. 不难证明, 前者的性质包括后者的性质; 前者所定义的特征流形是唯一的, 而后者不一定. 我们可以提出适合于后者而不适合于前者的例. 今后我们所指的特征流形是专指由极大值原理出发的情况.

现在我们列举典型域的特征流形.

域 $\mathfrak{R}_I$ 的边界上适合于 $Z\bar{Z}' = I$ 的矩阵 Z 成一特征流形 $\mathfrak{C}_I$. 当 $m = n$ 时, $\mathfrak{C}_I$ 是由所有的 n 行列的酉方阵所获得的, $\mathfrak{C}_I$ 的实维数等于 $n^2 - (n - m)^2 = m(2n - m)$ (今假定 $n \geq m$).

域 $\mathfrak{R}_{II}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{II}$ 是适合于 $Z\bar{Z} = I$ 的对称方阵所成的流形. $\mathfrak{C}_{II}$ 的实维数等于 $\frac{1}{2}n(n + 1)$.

域 $\mathfrak{R}_{III}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_{III}$ 的写出稍为困难; 若 n 是偶数, 它就是所有斜对称酉方阵所成的集合, 它的实维数是 $\frac{1}{2}n(n - 1)$; 若 n 是奇数, 它就是由形如

$$UDU'$$

的斜对称方阵所组成的集合, 此处 U 过所有酉方阵而

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 0,$$

它的实维数是 $\frac{1}{2}n(n + 1) - 1$.

域 $\mathfrak{R}_{IV}$ 的特征流形是由形如

$$e^{i\theta}(x_1, \dots, x_n)$$

的矢量所组成的, 此处 $(x_1, \dots, x_n)$ 中的 $x_1, \dots, x_n$ 都是实数, 且适合于

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

在特征域上也有它的一组正常正交函数系. 这些流形 $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}_I, \dots, \mathfrak{C}_{IV})$ 都是一种齐性空间 (Homogeneous space), 且可由域 $\mathfrak{R}$ 的零点稳定群变 $\mathfrak{C}$ 的一点为另一点. 关于齐性空间已有一般性的理论 (如 E. Cartan [1], H. Weyl [1], A. Weil [1]), 但本文的着眼点如 §§ 2—3 所述, 在于具体算出其上的正常正交系, 当然也遭遇到同样的困难.

§ 7. Cauchy 公式及 Poisson 公式

和上一问题有连带关系的是 Cauchy 公式及 Poisson 公式. 提綱挈領地说: 在 $\mathfrak{R}$ 内有

一完整正常正交函数組

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_\nu(z), \dots,$$

这一組可用如次的取法使当 $\nu \neq \mu$ 时,

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu(\xi) \overline{\varphi_\mu(\xi)} \xi = 0.$$

命

$$\int_{\mathfrak{C}} |\varphi_\nu(\xi)|^2 \xi = \rho_\nu$$

及

$$H(z, \bar{\xi}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(\xi)}}{\rho_\nu},$$

則 Cauchy 公式的形式是

$$f(z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi) \xi.$$

这一公式当然对 $\Re_I, \Re_{II}, \Re_{III}, \Re_{IV}$ 都是正确的, 我們还証明了一些更一般的結果. 在 Cauchy 公式中命 $f(z) = u(z) H(\bar{w}, z)$, 則可以得到

$$u(z) H(\bar{w}, z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) u(\xi) H(\bar{w}, \xi) \xi,$$

取 $w = z$, 即得 Poisson 公式:

$$u(z) = \int_{\mathfrak{C}} \frac{H(z, \bar{\xi}) H(\bar{z}, \xi)}{H(z, \bar{z})} u(\xi) \xi.$$

对于在 $\Re$ 的閉包上解析的函数 $u(z)$, 上式成立. 但有了这一公式, 我們就不一定要假定 $u(z)$ 是解析的了. 我們可以定义: 对于任一在 $\mathfrak{C}$ 上連續的函数 $u(\xi)$, 由 Poisson 积分就定义出一个函数, 称为 $\Re$ 域的調和函数.

因此建議出典型域上的調和函数的研究, 当然这并不是 $\Re$ 域的調和函数的最好定义. 我們应当找出偏微分方程来刻划这种調和函数, 并且解决相应的 Dirichlet 問題. 本书仅在第五章中略提一下, 詳尽的研究將見于华罗庚、陸启鏗[2]合作的工作中.

第一章

若干代數工具

§ 1.1. 代數恆等式

假定 $n \geq 2$, 命

$$D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

定理 1.1.1. 我們有恆等式

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{1, 2, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \dots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1}^2) (1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \dots (1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_n}^2)} \\ = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)}, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

此处 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 乃由 $1, 2, \dots, n$ 之排列而得. 若 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的偶排列, 則 $\delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{1, 2, \dots, n} = 1$; 若是奇排列, 則 $\delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{1, 2, \dots, n} = -1$.

定理 1.1.2. 命 $v = \left\lfloor \frac{1}{2} n \right\rfloor$, 我們有恆等式

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{1, 2, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \dots x_{i_{2v}}^1}{(1 - x_{i_1} x_{i_2}) (1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \dots (1 - x_{i_1} \dots x_{i_{2v}})} \\ = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)}. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

在証明以上两个代數恆等式的时候, 我們需要一些与 Vandermonde 行列式有关的不难証明的結果. 习知

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \dots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (1.1.3)$$

命 $D_i = D(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$, 不难証明

$$\sum_{i=1}^n x_i^l D_i = \begin{cases} D(x_1, \dots, x_n), & \text{若 } l = 0, \\ 0, & \text{若 } 1 \leq l \leq n-1, \\ (-1)^{n-1} D(x_1, \dots, x_n) x_1, \dots, x_n, & \text{若 } l = n. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

又由于

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{x_1}{1-x_1}, & \frac{x_2}{1-x_2}, & \cdots, & \frac{x_n}{1-x_n} \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ x_1(1-x_1), & x_2(1-x_2), & \cdots, & x_n(1-x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}(1-x_1), & x_2^{n-1}(1-x_2), & \cdots, & x_n^{n-1}(1-x_n) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n-1+\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} D(x_1, \cdots, x_n),
 \end{aligned}$$

可知

$$\sum_{i=1}^n D_i \frac{x_i}{1-x_i} = (-1)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} D(x_1, \cdots, x_n). \quad (1.1.5)$$

在此式中换 x_i 为 $-x_i$, 可知

$$\sum_{i=1}^n D_i \frac{x_i}{1+x_i} = \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} D(x_1, \cdots, x_n). \quad (1.1.6)$$

将 (1.1.4) 式中 $l=0$ 时的等式与 (1.1.5) 式相加, 可得

$$\sum_{i=1}^n D_i \frac{1}{1-x_i} = D(x_1, \cdots, x_n) \left\{ 1 + (-1)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \right\}. \quad (1.1.7)$$

也易得

$$\sum_{i=1}^n D_i \frac{1}{1+x_i} = D(x_1, \cdots, x_n) \left\{ 1 - \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \right\}. \quad (1.1.8)$$

根据这些结果, 我们可以证明定理 1.1.1 及定理 1.1.2.

定理 1.1.1 的证明: 当 $n=2$ 时, (1.1.1) 式之左为

$$\frac{x_1}{(1-x_1^2)(1-x_1^2x_2^2)} - \frac{x_2}{(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)} = \frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(1 - x_1^2)(1 - x_1 x_2)(1 - x_2^2)} = \frac{D(x_1, x_2)}{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (1 - x_i x_j)},$$

故当 $n = 2$ 时定理成立. 今用归纳法证明本定理, 假定 $n - 1$ 时定理成立, 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_n} \delta_{i_1, \dots, i_n}^{1, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 \cdots x_{i_n}^2)} \\ &= \sum_{a=1}^n (-1)^{n-a} \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \delta_{i_1, \dots, i_{n-1}}^{1, \dots, a-1, a+1, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 \cdots x_{i_n}^2)} \\ &= \sum_{a=1}^n (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a (1 - x_1^2 \cdots x_n^2)} \times \\ & \quad \times \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \delta_{i_1, \dots, i_{n-1}}^{1, \dots, a-1, a+1, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-2} x_{i_2}^{n-3} \cdots x_{i_{n-2}}^1}{(1 - x_{i_1}^2) \cdots (1 - x_{i_1}^2 \cdots x_{i_{n-1}}^2)} \\ &= \sum_{a=1}^n (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a (1 - x_1^2 \cdots x_n^2)} \cdot \frac{D(x_1, \dots, x_{a-1}, x_{a+1}, \dots, x_n)}{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq a, j \neq a}} (1 - x_i x_j)} \\ &= \frac{1}{(1 - x_1^2 \cdots x_n^2) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \sum_{a=1}^n D_a \prod_{i=1}^n (1 - x_i x_a). \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

因为

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i x_a) = \sum_{l=0}^n \sigma_l x_a^l,$$

此处 σ_l 是 $x_1, \dots, x_n$ 的初等对称函数, 由 (1.1.4) 式可知

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n D_a \prod_{i=1}^n (1 - x_i x_a) &= \sum_{a=1}^n D_a \sum_{l=0}^n \sigma_l x_a^l = \sum_{l=0}^n \sigma_l \sum_{a=1}^n D_a x_a^l \\ &= D(x_1, \dots, x_n) + (-1)^n x_1 \cdots x_n \cdot (-1)^{n-1} D(x_1, \dots, x_n) x_1 \cdots x_n \\ &= D(x_1, \dots, x_n) (1 - x_1^2 \cdots x_n^2). \end{aligned}$$

将上面的结果代入 (1.1.9) 式, 即得定理 1.1.1.

定理 1.1.2 的证明: 当 $n = 2$ 时, (1.1.2) 式显然成立. 今用归纳法证明本定理, 假定当 $n - 1$ 时定理成立, 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_n} \delta_{i_1, \dots, i_n}^{1, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots (1 - x_{i_1} \cdots x_{i_{2n}})} \\ &= \sum_{a=1}^n (-1)^{n-a} \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \delta_{i_1, \dots, i_{n-1}}^{1, \dots, a-1, a+1, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \cdots x_{i_{n-1}}^1}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots} \end{aligned}$$

$$= \sum_{a=1}^n (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a (1 - \varepsilon x_1 \cdots x_n)} \times \\ \times \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} \delta_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}^{1, \dots, a-1, a+1, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-2} \cdots x_{i_{n-2}}^1}{(1 - x_{i_1} x_{i_2}) (1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \cdots}, \quad (1.1.10)$$

此处 ε 的定义如下: 若 n 是奇数, 则 $\varepsilon = 0$; 若 n 是偶数, 则 $\varepsilon = 1$. 由归纳法的假定, 内和等于

$$\frac{D(x_1, \dots, x_{a-1}, x_{a+1}, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (1 - x_i x_a)}{1 - x_a^2}.$$

代入 (1.1.10) 式, 可知 (1.1.2) 式之左方等于

$$\sum_{a=1}^n (-1)^{n-a} \frac{x_1 \cdots x_n}{x_a (1 - \varepsilon x_1 \cdots x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \dots, x_{a-1}, x_{a+1}, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (1 - x_i x_a)}{1 - x_a^2} \\ = \frac{1}{(1 - \varepsilon x_1 \cdots x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \sum_{a=1}^n \frac{D_a}{1 - x_a^2} \prod_{i=1}^n (1 - x_i x_a) \\ = \frac{1}{(1 - \varepsilon x_1 \cdots x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \sum_{l=0}^n \sigma_l \sum_{a=1}^n \frac{D_a x_a^l}{1 - x_a^2}. \quad (1.1.11)$$

今分三种情形讨论 (1.1.11) 式之内和:

1) l 是奇数, 由于

$$\frac{x_a - x_a^l}{1 - x_a^2} = x_a (1 + x_a^2 + \cdots + x_a^{l-3}),$$

故

$$-\frac{x_a^l}{1 - x_a^2} = x_a (1 + x_a^2 + \cdots + x_a^{l-3}) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_a}{1 - x_a} + \frac{x_a}{1 + x_a} \right).$$

利用 (1.1.4), (1.1.5) 及 (1.1.6) 可知

$$\sum_{a=1}^n \frac{D_a x_a^l}{1 - x_a^2} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \left(\frac{x_a}{1 + x_a} + \frac{x_a}{1 - x_a} \right) D_a \\ = \frac{1}{2} D(x_1, \dots, x_n) x_1 \cdots x_n \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)} + \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + x_i)} \right\}. \quad (1.1.12)$$

2) 当 l 是正偶数时, 由于

$$\frac{1 - x_a^l}{1 - x_a^2} = 1 + x_a^2 + \cdots + x_a^{l-2},$$

故

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2} = 1 + x_a^2 + \cdots + x_a^{l-2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x_a} + \frac{1}{1+x_a} \right).$$

利用 (1.1.4), (1.1.7) 及 (1.1.8) 可知

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n \frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2} &= - \sum_{a=1}^n D_a + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \left(\frac{1}{1-x_a} + \frac{1}{1+x_a} \right) D_a \\ &= -D(x_1, \cdots, x_n) + \frac{1}{2} D(x_1, \cdots, x_n) \left\{ 1 + (-1)^{n-1} \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} + 1 - \frac{x_1 \cdots x_n}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} - \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

3) 当 $l=0$ 时有

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n \frac{D_a}{1-x_a^2} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \left(\frac{1}{1-x_a} + \frac{1}{1+x_a} \right) D_a \\ &= D(x_1, \cdots, x_n) + \frac{1}{2} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} - \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

由 (1.1.12), (1.1.13) 及 (1.1.14) 可知

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n \sigma_l \sum_{a=1}^n \frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2} &= D(x_1, \cdots, x_n) \\ &+ \frac{1}{2} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} - \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} - \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \right\} \sum_{l=1}^n \sigma_l \\ &+ \frac{1}{2} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} + \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \right\} \sum_{l=2}^n \sigma_l \\ &= D(x_1, \cdots, x_n) + \frac{1}{2} D(x_1, \cdots, x_n) x_1 \cdots x_n \times \\ &\times \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \sum_{l=0}^n \sigma_l + \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i)} \sum_{l=0}^n (-1)^{l+1} \sigma_l \right\} \end{aligned}$$

$$= D(x_1, \dots, x_n) \left\{ 1 + \frac{1}{2} x_1 \cdots x_n ((-1)^{n-1} - 1) \right\}, \quad (1.1.15)$$

易知 $(-1)^{n-1} - 1 = -2\varepsilon$, ε 的定义如前. 将 (1.1.15) 代入 (1.1.11), 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - \varepsilon x_1 \cdots x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \cdot D(x_1, \dots, x_n) (1 - \varepsilon x_1 \cdots x_n) \\ &= \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)}. \end{aligned}$$

定理 1.1.2 证完.

附记: 和 (1.1.1) 及 (1.1.2) 相仿, 我们有下列恒等式:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_n} \delta_{i_1, \dots, i_n}^{1, \dots, n} \frac{x_{i_1}^{n-1} \cdots x_{i_n}^1}{(1 - x_{i_1}) (1 - x_{i_1} x_{i_2}) \cdots (1 - x_{i_1} \cdots x_{i_n})} \\ &= \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j) \prod_{i=1}^n (1 - x_i)}. \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

因为在本文中并不用它, 所以证明从略.

我们还需要以下的较容易的恒等式.

定理 1.1.3.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1}, \dots, \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \dots \dots \dots \frac{1}{x_n + y_1}, \dots, \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix} = \frac{D(x_1, \dots, x_n) D(y_1, \dots, y_n)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_i + y_j)}. \quad (1.1.17)$$

证: 从第二行、第三行、 $\dots$ 、第 n 行中各减去第一行, 且利用等式

$$\frac{1}{x_l + y_k} - \frac{1}{x_1 + y_k} = \frac{x_1 - x_l}{(x_1 + y_k)(x_l + y_k)}, \quad l = 2, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n,$$

可知上面的行列式等于

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)}{\prod_{k=1}^n (x_1 + y_k)} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \frac{1}{x_2 + y_1}, & \frac{1}{x_2 + y_2}, & \dots, & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \dots \dots \dots \frac{1}{x_n + y_1}, & \frac{1}{x_n + y_2}, & \dots, & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}. \quad (1.1.18)$$

由第二列、第三列、 $\dots$ 、第 n 列中各减去第一列, 则 (1.1.18) 之行列式等于

甲