高等工科院校试用教材

高等数学

下册

合肥工业大学高等数学教材编写组 主编

科学技术文献出版社

高等工科院校试用教材

高 等 数 学

下册

合肥工业大学
高等数学教材编写组　主编

科 学 技 术 文 献 出 版 社

（京）新登字130号

内 容 提 要

本书是根据国家教委颁发的“关于高等学校数学课程基本要求”，结合多年教学经验及教学改革的精神编写的。

本书分上、下两册出版。下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程。书末附有习题答案。

本书纲目清晰，说理浅显，叙述简明，例题较多，习题分类，便于教学与自学。可作为高等工科院校的教材或教学参考书。

高等工科院校试用教材

高 等 数 学

下册

合肥工业大学

高等数学教材编写组 主编

科学技术文献出版社出版

（北京复兴路15号 邮政编码100038）

*

北京通县建新印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本787×1092毫米 32开本 16.25印张 364千字

1993年10月 第1版 1993年11月 第1次印刷

印数：00 001- 5000册

*

ISBN 7-5023-2043-1/O·100

定价：9.00元

目　　录

第七章　多元函数微分法及其应用
第一节　多元函数的基本概念……1
一、区域……1
二、多元函数概念……4
三、多元函数的极限与连续……9
习题7-1……15
第二节　偏导数与全微分……18
一、偏导数概念与计算……18
习题7-2（1）……27
二、全微分……29
习题7-2（2）……40
三、方向导数……42
习题7-2（3）……48
第三节　多元复合函数的微分法……49
一、全导数……49
二、复合函数微分法……53
三、全微分形式的不变性……62
习题7-3……64
第四节　隐函数及其微分法……66
一、一个方程的情形……66
二、方程组的情形……70
习题7-4……77
第五节　偏导数的几何应用……79

一、空间曲线的切线与法平面……79
二、曲面的切平面与法线……85
习题7-5……91
第六节　多元函数的极值及其求法……92
一、多元函数的极值与最大值、最小值……92
二、条件极值拉格朗日乘数法……99
习题7-6……105
第七节　二元函数的泰勒公式……106
习题7-7……112
复习题……113
第八章　重积分
第一节　二重积分的概念与性质……117
一、二重积分的概念……117
二、二重积分的性质……122
习题8-1……124
第二节　利用直角坐标计算二重积分……127
习题8-2……139
第三节　利用极坐标计算二重积分……142
一、极点在区域D的外部(图8-17)……143
二、极点在积分区域的边界上(图8-18)……144
三、极点在积分区域D的内部(图8-19)……145
习题8-3……150
第四节　二重积分的换元法……153
习题8-4……158
第五节　二重积分的应用……159
一、曲面的面积……159
二、平面薄片的重心……164
三、平面薄片的转动惯量……167
四、平面薄片对质点的引力……168

习题8-5 ……………………………………………………171
第六节　三重积分的概念及计算法……………………………172
习题8-6 ……………………………………………………178
第七节　利用柱、球面坐标计算三重积分……………………181
一、利用柱面坐标计算三重积分…………………………181
二、利用球面坐标计算三重积分…………………………184
习题 8-7……………………………………………………192
第八节　含参变量的积分……………………………………195
习题8-8 ……………………………………………………201
复习题………………………………………………………203
第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一型曲线积分（对弧长的曲线积分）…………204
一、第一型曲线积分的概念和性质………………………204
二、第一型曲线积分的计算法……………………………207
习题9-1 ……………………………………………………211
第二节　第二型曲线积分……………………………………212
一、第二型曲线积分的概念与性质………………………212
二、第二型曲线积分的计算法……………………………215
三、两类曲线积分之间的关系……………………………220
习题9-2 ……………………………………………………222
第三节　格林公式……………………………………………223
习题9-3 ……………………………………………………230
第四节　平面曲线积分与积分路径无关的条件……………230
习题9-4 ……………………………………………………237
第五节　第一型曲面积分……………………………………238
一、第一型曲面积分的概念和性质………………………238
二、第一型曲面积分的计算法……………………………240
习题9-5 ……………………………………………………243
第六节　第二型曲面积分……………………………………244

一、第二型曲面积分的概念和性质……………………244
二、第二型曲面积分的计算法……………………248
习题9-6 ……………………253
第七节 高斯公式与斯托克斯公式……………………254
一、高斯公式……………………254
二、斯托克斯公式……………………260
习题9-7 ……………………267
第八节 场论简介……………………269
一、场的概念……………………269
二、方向导数与梯度……………………271
三、流量与散度……………………276
四、环量与旋度……………………280
习题9-8 ……………………285
复习题……………………287
第十章 无穷级数
第一节 无穷级数的基本概念及性质……………………289
一、无穷级数的基本概念……………………289
二、级数的基本性质……………………294
习题10-1……………………299
第二节 正项级数的审敛法……………………300
一、比较审敛法……………………303
二、比值审敛法……………………306
三、根值判别法……………………309
习题10-2……………………310
第三节 任意项级数的敛散性……………………311
一、交错级数及其审敛法……………………311
二、任意项级数的绝对收敛与条件收敛……………………313
习题10-3……………………318
第四节 幂级数……………………319

一、函数项级数的一般概念……319
二、幂级数及其收敛区间……320
三、幂级数的性质与运算……327
习题10-4……330
第五节　函数的幂级数展开式……332
一、泰勒级数……332
二、函数的幂级数的展开式……336
习题10-5……344
第六节　幂级数的应用……344
一、函数的近似公式……344
二、近似计算……345
三、尤拉公式……348
习题10-6……350
第七节　周期函数的傅立叶级数……350
一、三角函数系的正交性……350
二、周期函数的傅立叶级数……354
习题10-7……366
第八节　正弦级数和余弦级数……368
一、奇、偶函数的傅立叶级数……368
二、函数展开成正弦或余弦级数……374
习题10-8……380
复习题……381
第十一章　微分方程
第一节　微分方程的基本概念……383
习题11-1……388
第二节　可分离变量的微分方程……389
习题11-2……394
第三节　齐次方程……395
一、齐次方程……395

二、可化为齐次方程的方程……400
习题11-3……403
第四节　一阶线性微分方程……404
一、一阶线性微分方程……404
二、贝努利方程……409
习题11-4……411
第五节　全微分方程……413
一、全微分方程……413
二、积分因子……414
习题11-5……417
第六节　可降阶的高阶微分方程……417
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程……418
二、$y''=f(x, y')$型的微分方程……418
三、$y''=f(y, y')$型的微分方程……422
习题11-6……425
第七节　二阶线性微分方程解的结构……427
习题11-7……431
第八节　二阶常系数线性齐次微分方程的解法……431
习题11-8……443
第九节　二阶常系数线性非齐次微分方程的解法……444
一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型……444
二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型……448
习题11-9……455
第十节　尤拉方程……457
习题11-10……459
第十一节　微分方程的幂级数解法举例……459
习题11-11……463
复习题……464

第七章　多元函数微分法及其应用

我们在前面研究了一个自变量的函数的导数、微分和积分，通常称为一元函数的微积分学。但在很多实际问题中往往有多种因素决定着事物的变化，这些反映在数学上就是多个变量之间的函数关系。为了解决实际问题及理论上研究的需要，本章将在一元函数微分学的基础上，进一步研究多元函数微分法及其应用。多元函数的微分法许多概念和方法与一元函数的情形类似，但因自变量个数的增多，有些地方会出现新的概念与方法。因此，在学习多元函数微分学时，要注意同一元函数相应内容的联系与区别。本章以二元函数为主，因为从二元函数推广到三元函数甚至更多个自变量的函数时就没有什么更多实质性的区别。

第一节　多元函数的基本概念

一、区域

在一元函数中任一实数x与数轴上点P有一一对应关系，x即为点P的坐标，实数全体表示数轴上一切点的集合，此集合记为R^1，叫做一维空间。我们称满足不等式$a<x<b$的点x集合为开区间，相应在平面上就有区域和闭区域的概念。任意一个实二元有序数组(x, y)与平面上的点P一一对应，(x, y)即为点P的坐标。所有实二元数组(x, y)表示平面上一切点集合，此集合记为R^2，叫做二维空间。同样，任意一个实三元有序数组(x, y, z)与空间点P一一

对应，(x, y, z) 即为点P的坐标，所有实三元数组 (x, y, z) 表示空间一切点的集合，此集合记为R^3，叫做三维空间。一般地，设n为取定的一个自然数，我们称实n元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体为n维空间，而每一个 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫做n维空间的点，记作$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，数x_i叫做点P的第i个坐标。n维空间记为R^n。类似于空间解析几何里两点间的距离公式，n维空间R^n中两点$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

显见，当$n=1, 2, 3$时，上式即为数轴、平面与空间内两点间的距离。下面介绍平面上的邻域与区域概念。

1.邻域

设$P_0(x_0, y_0)$为xoy平面上已知点，δ为某一正数。以点P_0为中心，δ为半径圆内部点$P(x, y)$的集合，称为P_0的δ邻域（见图7-1），记成$U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta\}$$

或者 $$U(P_0, \delta)=\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

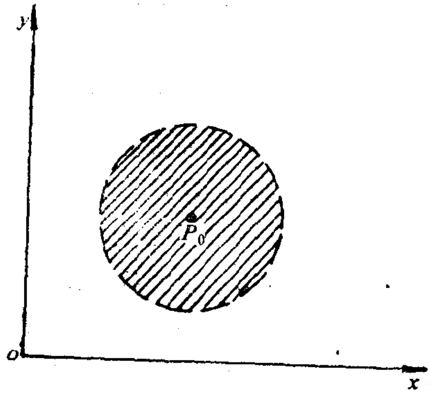

图 7-1

2. 区域

设E为一平面点集，P为平面上一已知点。若存在点P的一个邻域$U(P)$，使得$U(P)\subset E$，则称点P为E的内点（见图7-2）。显然E的内点属于E。

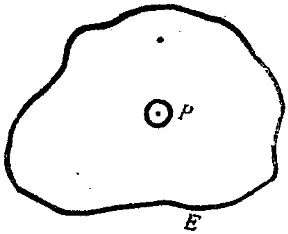

图 7-2

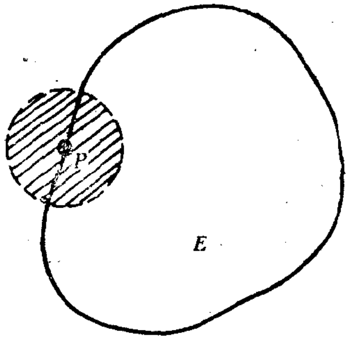

图 7-3

如果平面点集E的点全是内点，则称E为开集。

如果点P的任何一个邻域内总有E的点，也总有不属于E的点(点P本身可以是$P\in E$或$P\overline{\in}E$)，则称点P为E的边界点（见图7-3）。E的边界点的全体称为E的边界。

例如，点集$E=\{(x, y) \mid x^2+y^2<R^2\}$，$E$中每一点都是$E$的内点，所以$E$为开集。圆周$x^2+y^2=R^2$为$E$的边界，它不属于$E$。又如，点集

$$E_1=\{(x, y) \mid x+y\geqslant 1\}$$

其边界为直线$x+y=1$，它属于E_1。

设D为开集，如果对于D内任意两点都能用全属于D的折线连结起来，则称开集D为连通集。连通的开集称区域或开区域。例如

$$\{(x, y) \mid 0<x^2+y^2<2\}及\{(x, y) \mid y>x^2\}$$

都是区域。

区域连同它的边界称为闭区域。例如

$$\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}\text{及}\{(x,\ y)\mid y\geqslant x^2\}$$

都是闭区域。

对于点集E，如果它总能包含在一个以原点为心的圆内，则称E为有界点集，否则称为无界点集。例如

$$E_1=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$$

为有界闭区域，而

$$E_2=\{(x,\ y)\mid y>x^2\}$$

为无界开区域。

3．聚点

设E是平面上一个点集，P为平面上一已知点。如果点P的任意一个邻域内总有E的无限多个点，则称点P为E的聚点。显见，E的内点必为E的聚点，E的边界点也可能是E的聚点。另外，聚点本身可以属于E，也可以不属于E。例如集合

$$E=\{(x,\ y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$$

原点$o(0,\ 0)$是E的边界点，也是E的聚点，此聚点不属于E。圆周$x^2+y^2=1$为E的边界，圆周上每一点都是E的聚点，而这些聚点全属于E。有关平面上区域、聚点等概念可以推广到n维空间。

二、多元函数概念

在很多实际问题中经常会遇到多个变量之间的依赖关系如

例1 底半径为r，高为h的圆柱体的体积

$$V=\pi r^2 h$$

其中$r>0$，$h>0$。当r、h在集合$\{(r,\ h)\mid r>0,\ h>0\}$内取定每一组值$(r,\ h)$时，体积$V$有唯一确定的值和它对应。

例2 一定量的理想气体的压强P、体积V及绝对温度T有如下关系

$$p=\frac{RT}{V}$$

其中R为常数。当V、T在集合$\{(V,\ T)\mid V>0,\ T>T_0{}^{\circ}k\}$内取定每一组值$(V,\ T)$时，压强$p$有确定的对应值。

例3 在空间直角坐标于原点O处放上电量为q的正电荷。在此电场范围内任一点$M(x,\ y,\ z)$处的电位

$$u=\frac{kq}{r_{oM}}$$

其中k为常数，r_{oM}是原点到点M的距离：

$$r_{oM}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

除原点外，电位随电场内点M的位置而确定，亦即值点M的坐标变量$(x,\ y,\ z)$而确定。

上面三个例子的共同点：在多个变量的相互关系中，其中一个变量随其它变量的确定而确定之。我们得出多元函数的定义。

定义1 设D是坐标平面上一个点集。如果对于D内每一点$P(x,\ y)$，变量z按照确定的法则有确定的值和它对应，则称变量z是变量x、y的二元函数（或点P的函数） 记成

$$z=f(x,\ y) \qquad (\text{或} z=f(P))$$

x，y称自变量，z称因变量，点集D称为函数的定义域。

类似地可定义三元函数

$u=f(x, y, z)$,　(或$u=f(P)$)

上述P是R^3中某点集E上以(x, y, z)为坐标的点。前面例3中的电位u即是点M坐标(x, y, z)的三元函数。

一般地，设D为n维空间R^n中的点集，则可类似定义n元函数

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

也可记为　$u=f(P)$　$(P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in D)$

当$n=1$时，即为一元函数。当$n\geqslant 2$时，n元函数统称为多元函数。

如果对于点P，函数$u=f(P)$有确定的对应值，就称函数$u=f(P)$在点P有定义。使函数有定义的点集即为函数的定义域。

关于多元函数的定义域，如果是用一个算式表示函数，则使得这个算式有定义的点集即为定义域；如果函数中的变量具有实际含义，则应该根据实际意义确定出函数的定义域。例如，函数$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域是平面上满足不等式

$$x-\sqrt{y}\geqslant 0 \quad 且 \quad y\geqslant 0$$

的一切点(x, y)，即点集（见图7-4）

$$D=\{(x, y)\mid x^2\geqslant y\geqslant 0\}$$

它是位于第一象限内抛物线$y=x^2$右侧的无界闭区域。

又如，函数$z=\arccos\frac{2y}{x}$，它的定义域是满足不等式

$$\left|\frac{2y}{x}\right|\leqslant 1 \quad 且 \quad x\neq 0$$

一切点(x, y)，即平面点集

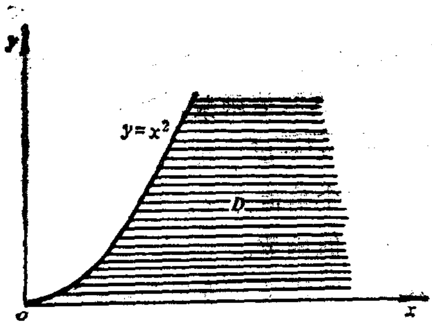

图 7-4

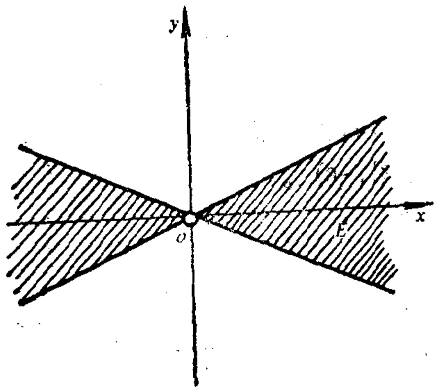

图 7-5

$$E=\{(x,\ y)\ \Big|\ |y|\leqslant\frac{1}{2}|x|,\ \text{且}x\neq 0\}$$

(见图7-5)，它是介于两条直线$y=\pm\dfrac{1}{2}x$之间包含有x轴在内且除去原点的部分。注意，这里的点集E不是区域。

同一元函数一样，多元函数也有单值与多值之分。例如，由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

确定的函数$z=f(x, y)$，就是定义在圆形闭区域$D=\{(x, y) | x^2+y^2\leqslant a^2\}$上的双值函数，

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \quad 和 \quad z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

就是双值函数的两个单值分支。以后如果不作特别声明，我们讨论的都限于单值函数。

二元函数的几何意义　设函数$z=f(x, y)$的定义域是D。我们把自变量x，y及因变量z作为空间点的直角坐标。对于任一取定的点$P(x, y)\in D$，过点P作xoy面的垂线，在此垂线上取一点M，使点M的竖坐标等于因变量z，这样$(x, y, f(x, y))$即为点M的坐标。当点P在D上变动时，对应的点M的轨迹就是二元函数$z=f(x, y)$的几何图形，一般说来是一张曲面，而定义域D正是这曲面在xoy面上的投影区域（见图7-6）。

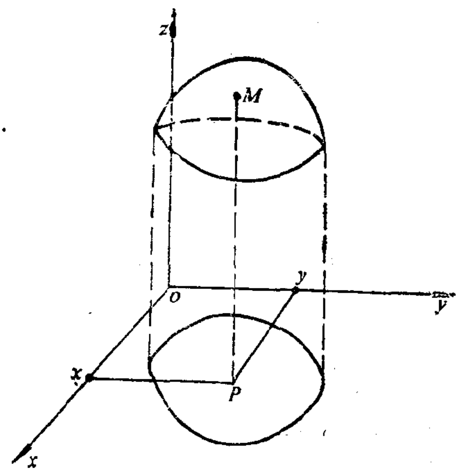

图　7-6