高等学校教学用书

連續介質力学

第三册

Л. Д. 朗兰道 著
E. M. 栗弗席兹
彭旭麟 譯

人民教育出版社

第三册　目录

第二部分　彈性理論

第一章　彈性理論的基本方程

第二章　杆与板的平衡

第三章　彈性波

第四章　固体的导热性与粘滞性

第二部分　彈性理論

第一章　彈性理論的基本方程

§1. 形变張量

所謂彈性理論即是把固体作为連續介质来处理的力学。

固体在作用力的影响下，将发生不同程度的形变，換句話說，将改变它原有的形状和体积。物体形变的数学描述是按下述方法进行的。物体任一点的位置由該点在某一坐标系內的矢徑 $\boldsymbol{r}$（其分量为 $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$）来确定。当物体变形时，一般来說，物体上所有各点都会移动。現在来看其中任一确定的点，形变前它的矢徑是 $\boldsymbol{r}$，而在形变后的物体內它的矢徑将取另一值 $\boldsymbol{r}'$（其分量为 x'_i）。于是在形变时物体上点的位移可用矢量 $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ 来表示。我們将它記为 $\boldsymbol{u}$:

$$u_i=x'_i-x_i。\tag{1,1}$$

矢量 $\boldsymbol{u}$ 名为形变矢量（或位移矢量）。当然，点移动后的坐标 x'_i 应該是它在移动前的坐标 x_i 的函数。因此，形变矢量 u_i 也是坐标 x_i 的函数。将矢量 $\boldsymbol{u}$ 作为 x_i 的函数給出后，物体的形变即已完全确定。

当物体变形时，点与点間的距离是有改变的。考察任何两个无限接近的点。如果它們之間的矢徑在形变前为 dx_i，則在形变

后的物体中。这两点間的矢徑将变为 $dx'_i = dx_i + du_i$。点間的距离在形变前为

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

在形变后为

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}。$$

依照和式的通常写法①，我們可以写

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2。$$

以 $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ 代入，将 dl'^2 改写为

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l。$$

由于右边第二項应按指标 i 及 k 求和，故可写出

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k。$$

在第三項中把指标 i 与 l 的位置掉换一下。于是，最后得出 dl'^2 的如下表达式：

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k, \tag{1,2}$$

其中張量 u_{ik} 的定义如下：

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)。\tag{1,3}$$

物体变形时，长元之改变即由以上各式确定。

張量 u_{ik} 名为形变張量。由定义便知它是对称的，即

$$u_{ik} = u_{ki}。\tag{1,4}$$

以上結果之求得，是由于将 dl'^2 中的 $2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k$ 写成了显然对称的形式：$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k$。

① 按通常規則，我們把依矢量指标及張量指标求和的符号省略了；而对于(所給式中)所有两度出現的指标都将令指标遍历 1, 2, 3 的值来求和。

象任何对称張量一样,我們可以将每一給定点上的張量 u_{ik} 变到主軸上去。换言之,在任一給定点上可以选取这样的坐标系(張量的主軸),使 u_{ik} 在其中的分量仅有"对角綫"分量 u_{11}, u_{22}, u_{33} 不为零。我們把这几个分量,卽形变張量的主値,記为 $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$。但必須記得,虽然把物体上某一点上的張量 u_{ik} 变成主軸張量,然而,一般来說,在所有其他点上的張量却依然是非对角綫張量。

如果将給定点上的形变張量化为主軸張量,则在包含該点的体元内,长元(1, 2)将取以下形式:

$$dl'^2=(\delta_{ik}+2u_{ik})dx_i\,dx_k=$$
$$=(1+2u^{(1)})dx_1^2+(1+2u^{(2)})dx_2^2+(1+2u^{(3)})dx_3^2。$$

我們看到,上式已分解为三个独立的項。卽是說,在物体的任一体元内,可将形变看成是在三个互相垂直方向(形变張量的主軸方向)上的三个独立形变的总和。每一个这样的形变都是沿相应方向的单純拉伸(或压縮):沿第一个主軸,长度 dx_1 变为长度 $dx_1'=\sqrt{1+2u^{(1)}}\,dx_1$,沿另两个軸的情形也与此类似。因而,量 $\sqrt{1+2u^{(i)}}-1$ 卽是沿这些軸的相对伸长 $\dfrac{dx_i'-dx_i}{dx_i}$。

事实上,几乎在物体的一切形变中,形变的程度都很小。卽是說,物体内任何一段距离的改变量都远較該段距离本身为小。换言之,相对伸长远小于一。以后我們将认定所有形变都很小。

如果物体的形变很小,则由上可知,在物体内用来确定长度相对变化的形变張量的所有分量也很小。至于形变矢量 u_i,则在某些情形中,纵使形变很小,而形变矢量还是可能較大。以一細长的杆为例。卽使作大弯曲的时候,卽杆的两端在空間内有显著的变位时,杆内部的拉伸和压縮也是微不足道的。

除开(与上述杆的形变)类似的特殊情形以外①,形变小则形

① 除了細杆的形变以外,薄板弯成柱面的情形也应归入此类。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

变矢量也小。事实上，任何“三維的”物体(卽在任何方向的尺寸都非特別小的物体)显然不能作这样的形变：卽物体的各别部分在空間內都有很大的变位，而物体內部却不出現强烈的拉伸和压縮。

关于細杆的問題，我們将在第二章中专門討論。因而在其余情形中将是形变小則 u_i 小，所以在一般表达式(1,3)中現在可以略去最后的一項，因为它是二級微量。于是在小形变的情况下，形变張量卽以下式确定：

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)。\tag{1,5}$$

現在，长元沿(給定点的)形变張量主軸的相对伸长，在不計高阶量时，等于

$$\sqrt{1+2u^{(i)}}-1\approx u^{(i)},$$

卽直接等于張量 u_{ik} 的主値。

让我們来考虑任何一个无限小的体元 dV，并确定在物体变形后它的大小 dV'。为此，选取考虑点上的形变張量之主軸作为坐标軸。于是，形变以后，沿这些軸的长元 dx_1, dx_2, dx_3 将变为 $dx_1'=(1+u^{(1)})dx_1$ 等等。体积 dV 等于 $dx_1dx_2dx_3$，体积 dV' 則等于 $dx_1'dx_2'dx_3'$。于是，

$$dV'=dV(1+u^{(1)})(1+u^{(2)})(1+u^{(3)})。$$

由此，略去高級微量，卽得

$$dV'=dV(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)})。$$

大家知道，張量主値的和：$u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$ 是个不变量，在任何坐标系中恒等于对角綫分量之和 $u_{ii}=u_{11}+u_{22}+u_{33}$。

于是，

$$dV'=dV(1+u_{ii})。\tag{1,6}$$

由此可見，形变張量的对角綫分量之和卽是体积的相对变化：$\frac{dV'-dV}{dV}$。

有时，应用形变張量在球面坐标或柱面坐标中的分量較之在笛卡儿坐标中的更为有利。为便于查考，下面列出了几个公式，将这些分量利用位移矢量在这两种坐标中的分量的导数表示了出来。在球面坐标 r, θ, φ 中，我們有

$$\left.\begin{aligned}
&u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r},\\
&u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{u_r}{r},\\
&2u_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}-u_\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},\\
&2u_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},\\
&2u_{\varphi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}。
\end{aligned}\right\} \tag{1,7}$$

在柱面坐标 r, φ, z 中，

$$\left.\begin{aligned}
&u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r}{r}, \quad u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&2u_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},\\
&2u_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}。
\end{aligned}\right\} \tag{1,8}$$

§ 2. 应力張量

在变形前的物体中，分子的布局是适应于物体的热平衡状态的。同时物体的各个部分彼此处于力学平衡。即是說，如果从物体內部截取任一部分体积来看，則自其余部分施于該体积的作用力的合力为零。

在形变中，分子的布局将会改变，从而物体将离开原来所处的平衡状态。因此，将出現促使物体恢复平衡状态的力。这些在形

变中出現的內力称为內应力。如果物体沒有变形，則其中就沒有內应力。

內应力是分子力引起的，卽物体分子間的相互作用力引起的。分子力具有极小的"作用半徑"。对于彈性理論來說，这是最为重要的事实。分子力的影响在产生該力的分子附近仅能达到与分子間距同数量級的距离。而在彈性理論中，象宏观理論中一样，只考虑远較分子間距为大的距离。因此，在彈性理論中应該认为分子力的"作用半徑"为零。也可以說，引起內应力的力，在彈性理論中是"近距作用"力，从一点出发仅能达到它的邻近。因此，物体任一部分所受到的来自各方的力都只能直接通过該部分的表面起作用。

这里必須提出如下說明：若物体形变时其中有宏观电場发生(具有热电性及压电性的物体)，則上述論断就不正确了。但本书不拟討論这类物体的性质。

我們截取物体中的任一部分体积，并考察作用在它上面的合力。一方面，这一合力是作用在所論部分每一元素上的所有力的总和，卽是說，可以将它表示为如下的体积分：

$$\int \boldsymbol{F} dV,$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 为作用于物体单位体积上的力，因此在体元 dV 上的作用力为 $\boldsymbol{F}dV$。另一方面，在所論体积內不同部分的相互作用力不能产生异于零的合力，因为根据作用力与反作用力相等的定律，那些相互的作用力在求和时应彼此相銷。因此所求合力可以认为仅仅是那些自所論体积周圍的物体部分施于該体积的力的总和。但按照上面的說明，这些力是通过該体积的表面而作用于体积的，因此这一合力可以表示为作用于該体积的每一面元上的力的总和，也卽是表示为沿該体积表面的某个积分。

于是，对于物体的任一体积，所有内应力的合力之每一分量 $\int F_i dV$ 都可变换为沿該体积表面的积分。如矢量分析中所熟知的，标量在任一体积上的积分都可变换为一个面积分，只需該标量是某一矢量的散度。在此地的情形中，所牵涉的不是标量的积分，而是矢量的积分。因此矢量 F_i 应該是某一二阶張量的散度，即 F_i 应具如下形式：

$$F_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}。\tag{2,1}$$

于是，作用于某一体积上的力即可写成沿包圍該体积的封閉曲面上的一个积分①：

$$\int F_i dV=\int\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}dV=\oint\sigma_{ik}df_k,\tag{2,2}$$

其中 df_i 为面元矢量 $d\boldsymbol{f}$ 的分量，該矢量的方向，象通常一样，总是沿曲面的外法向②。

張量 σ_{ik} 名为应力張量。由(2,2)可見，$\sigma_{ik}df_k$ 是作用于面元 $d\boldsymbol{f}$ 上的力的第 i 个分量。在平面 $x, y; y, z; z, x$ 上选定面元就可以看到，应力張量的分量 σ_{ik} 是作用在垂直于 x_k 軸的单位曲面上的力的第 i 个分量。比如，在垂直于 x 軸的单位面积上，所作用的法向（x 軸向的）力是 σ_{xx}，而切向（沿 y 軸及 z 軸方向的）力为 σ_{yx} 及 σ_{zx}。

这里必須說明一下力 $\sigma_{ik}df_k$ 的符号問題。在(2,2)中，面积分所表示的是由物体的其余部分作用于被該曲面所包圍的体积上的力。反之，由該体积作用于其表面外圍部分的力就具有相反的

① 按奥斯特洛格拉茨基定理，沿封閉曲面的积分变换为該曲面所含体积上的体积分时，要用算子 $dV\frac{\partial}{\partial x_i}$ 替代面元 df_i。

② 严格說来，当我們确定作用于变形后的物体体积上的合力时，不应按原来的坐标 x_i 来积分，而应按变形后物体上点的坐标 x_i' 来进行。同样，导数(2,1)应依 x_i' 来取。但由于形变小，按 x_i 与按 x_i' 的导数所差只是高級无穷小，因此可以按坐标 x_i' 来微分。

符号。因此，比如由內应力方面作用于物体整个表面上的力便等于

$$-\oint \sigma_{ik} d f_k,$$

其中积分是遍历物体表面来取的，而 $d\boldsymbol{f}$ 是沿外法綫方向。

我們来确定作用于物体某部分的力所产生的矩。大家知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所产生的矩可以写成以 $F_i x_k - F_k x_i$（x_i 为着力点的坐标）为分量的二阶反对称張量的形式①。因此，作用于体元 dV 的力矩为 $(F_i x_k - F_k x_i) dV$，而作用于整个体积的力矩为

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV。$$

象作用于任一体积的合力一样，这些力矩也应表示为沿体积表面的积分。把表达式 (2,1) 中的 F_i 代入，得

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV =$$

$$= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV。$$

注意到在第二项中，若两坐标相同则一个对另一个的导数等于一，若两坐标不同，则一个对另一个的导数等于零（三个坐标都是独立变量）。因而，$\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$，此处 δ_{kl} 为单位張量；乘以 σ_{ik} 以后，給出 $\delta_{kl} \sigma_{il} = \sigma_{ik}$，$\delta_{il} \sigma_{kl} = \sigma_{ki}$。而第一項中，积分号下是某一張量的散度；按奥斯特洛格拉茨基公式，这一积分可改为面积分。結果是

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV。$$

为使 M_{ik} 也能用面积分表示，必須这里的第二項恒为零，即是說，必須 $\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 0$，或

① 力 $\boldsymbol{F}$ 的矩可定义为矢量积 $[\boldsymbol{rF}]$；由矢量分析可知，两矢量的矢量积之分量組成象正文中写出的那种二阶反对称張量。

$$\sigma_{ik}=\sigma_{ki}。\tag{2,3}$$

因此，我們得出一項重要的結果，卽应力張量为对称張量。作用于物体某一部分的力矩現在可以写成如下簡单形式：

$$M_{ik}=\int(F_i x_k-F_k x_i)dV=\oint(\sigma_{il}x_k-\sigma_{kl}x_i)df_l。\tag{2,4}$$

在物体全部均匀压縮的情形中，物体的应力張量是容易写出来的。在这种压縮中，作用于物体每一单位表面积的压力大小是相等的，方向則处处与表面垂直并且是向着物体的內部。如果将压力記为 p，則作用在面元 df_i 上的力等于 $-pdf_i$。另一方面，这个力旣要用应力張量表示，那就应該具有 $\sigma_{ik}df_k$ 的形式。将 $-pdf_i$ 写成 $-p\delta_{ik}df_k$ 以后，可以看到，在全部均匀压縮时，应力張量将具有如下形式：

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}。\tag{2,5}$$

所有异于零的分量都与压力相等。

在任意形变的一般情形中，应力張量的非对角綫分量也有异于零的。卽是說。在物体內任一面元上不仅有垂直于面元的力作用，还有与面元相切的使平行面元彼此錯开的“剪切”应力。

当平衡时，在物体的每一体元中的內应力必須互抵；換言之，必須有 $F_i=0$。因此，变形物体的平衡方程有下列形式：

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=0。\tag{2,6}$$

如果物体在重力場內，則作用在物体单位体积上的內应力与重力 $\rho\boldsymbol{g}$ 之和：$\boldsymbol{F}+\rho\boldsymbol{g}$ 应等于零（此处 ρ 为密度[①]。$\boldsymbol{g}$ 为重力加速度矢量，方向是朝下的）；在这情形中，平衡方程是

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\rho g_i=0。\tag{2,7}$$

① 严格地説，物体变形时它的密度是会改变的。但在微小形变中，計算这种改变只会得出高級无穷小量，因此是无足輕重的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

至于直接加于物体表面的外力(它們通常是引起形变的根源),則将出現在平衡方程的边界条件中。設 $\boldsymbol{P}$ 为作用于物体表面单位面积上的外力,則作用于面元 df 上的力为 $\boldsymbol{P}df$。平衡时,它必与作用在該面元上的内应力 $-\sigma_{ik}df_k$ 相抵。因此,必須

$$P_i df-\sigma_{ik}df_k=0。$$

将 df_k 写成 $df_k=n_k df$ 后(其中 $\boldsymbol{n}$ 为外法向的单位矢量),即得

$$\sigma_{ik}n_k=P_i。\tag{2,8}$$

这便是,处于平衡中的物体表面所应满足的条件。

現在还要推出一个用来确定形变物体中应力張量平均值的公式。为此,以 x_k 乘方程 (2,6),并沿物体整个体积求积分:

$$\int\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k dV=\int\frac{\partial(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}dV-\int\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}dV=0。$$

我們将右边的第一个积分化为沿物体表面的积分:第二个积分中注意到 $\frac{\partial x_k}{\partial x_l}=\delta_{kl}$。即得

$$\oint\sigma_{il}x_k df_l-\int\sigma_{ik}dV=0。$$

将(2,8)代入第一个积分中,求出

$$\oint P_i x_k df=\int\sigma_{ik}dV=V\bar{\sigma}_{ik},$$

式中,V 为物体体积,$\bar{\sigma}_{ik}$ 为应力張量在整个体积中的平均值。引用关系式 $\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$,便可将以上公式写成对称的形式:

$$\bar{\sigma}_{ik}=\frac{1}{2V}\oint(P_i x_k+P_k x_i)df。\tag{2,9}$$

因此,应力張量的平均值可以直接依据作用于物体的外力来确定,无需預先解出平衡方程。

§3. 形变热力学

让我們考察任一变形的物体,并且假設,物体的形变这样变

化：即形变矢量 u_i 改变一微量 δu_i。我們来确定这时由內应力所作的功。以 δu_i 与力 $F_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$ 相乘，并沿整个物体体积来积分，我們有

$$\int\delta R dV=\int\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i dV。$$

这里，我們以 δR 表示单位体积物体中內应力所作的功。由分部积分法，并利用奥斯特洛格拉茨基公式，得

$$\int\delta R dV=\oint\sigma_{ik}\delta u_i df_k-\int\sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}dV。$$

考察在无穷远处不发生变形的无限介质，我們将第一个积分的积分曲面推向无穷远处，于是，在該曲面上的 $\sigma_{ik}=0$，故积分值等于零。利用張量 σ_{ik} 的对称性，可将第二个积分写成

$$\int\delta R dV=-\frac{1}{2}\int\sigma_{ik}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\delta u_k}{\partial x_i}\right)dV=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sigma_{ik}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)dV=-\int\sigma_{ik}\delta u_{ik}dV。$$

因此，可以写出

$$\delta R=-\sigma_{ik}\delta u_{ik}。\qquad(3,1)$$

这便是按形变張量的变化来确定功 δR 的公式。

如果物体的形变足够小，則当引起形变的外力停止作用后，物体将恢复未变形前的状态。这种形变称为彈性形变。当形变較大时，外力停止作用并不能使形变完全消失，依旧保留着一些所謂剩余形变，致使物体所处状态与外力开始作用前的不同。这种形变称为受范形变。以下我們只研究彈性形变。

另外，我們还假設，形变的过程是如此緩慢，使每一时刻在物体內都能建立与物体当时所处外界条件相适应的热动平衡状态（实际上，这項假設几乎总能滿足）。大家知道，这样一来，这一过程便属于热力学的可逆过程了。

以后，我們規定所有热力学量，如熵 S，內能 $\mathscr{E}$ 等等都是就物体单位体积来說的①（而不是象以前在流体动力学中那样，对于单位质量来說的），并且以相应的大写字母来表示。

內能的无限小变化 $d\mathscr{E}$，等于物体內所給单位体积得到的热量与內应力所作的功 dR 之差，而可逆过程中的热量等于 TdS，此处 T 表示温度。因此，$d\mathscr{E}=TdS-dR$；按(3,1)取 dR，得

$$d\mathscr{E}=TdS+\sigma_{ik}du_{ik}。\tag{3,2}$$

这便是关于变形物体的热力学恒等式。

在等度全面压縮时，应力張量等于 $\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}$(2,5)。在此情况下，

$$\sigma_{ik}du_{ik}=-p\delta_{ik}du_{ik}=-pdu_{ii}。$$

但是我們知道［参看(1, 6)］，和数 u_{ii} 即是形变中体积的相对变化。如果考察的是单位体积，則 u_{ii} 即是該体积的变化，而 du_{ii} 即这一变化的元素 dV。这时，热力学恒等式将取通常的形式：

$$d\mathscr{E}=TdS-pdV。$$

引用物体的自由能 $F=\mathscr{E}-TS$，而不用能量 $\mathscr{E}$，我們便得出如下形式的热力学恒等式：

$$dF=-SdT+\sigma_{ik}du_{ik}。\tag{3,3}$$

最后，将物体的热力势 Φ 定义为

$$\Phi=\mathscr{E}-TS-\sigma_{ik}u_{ik}=F-\sigma_{ik}u_{ik}。\tag{3,4}$$

此式即 Φ 的通常表达式 $\Phi=\mathscr{E}-TS+pV$②的推广。将(3,4)代入

① 关于这一点应作下列注釋。严格地說，应将物体变形前与变形后的单位体积加以区别；一般来說，两种体积包含着不等量的实物。以后提到各个热力学量时，都是就变形前物体的单位体积，也即是就含于这一体积內的实物数量来說的（而形变后的实物可能与其初始体积略有不同）。与此相应，比如說，物体的总能量总是将 $\mathscr{E}$ 沿变形前的体积积分得出的。

② 全面压縮时，表达式(3,4)即化为

$$\Phi=F+pu_{ii}=F+p(V-V_0),$$

式中 $V-V_0$ 是因形变而致的体积变化。可見，这里所取的 Φ 的定义，与热力学中通常所取的定义 $\Phi=F+pV$ 多了 $-pV_0$ 这一項。

(3,3)，得

$$d\Phi=-SdT-u_{ik}d\sigma_{ik}。\tag{3,5}$$

在(3,2)与(3,3)中的独立变量分别是 S, u_{ik} 与 T, u_{ik}。将 $\mathscr{E}$ 或 F 分别在熵 S 不变和温度 T 不变的情况下对形变張量的分量取导数，卽可得出应力張量的分量：

$$\sigma_{ik}=\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S=\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T。\tag{3,6}$$

同样，将 Φ 对分量 σ_{ik} 求导数，卽得分量 u_{ik}：

$$u_{ik}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}}\right)_T。\tag{3,7}$$

§4. 胡克定律

为使一般的热力学关系可以应用到形变的各种具体情形中，我們必須将物体的自由能 F 表示为形变張量的函数。由于形变小。因而将自由能展开为 u_{ik} 的冪級数以后，卽易求出上述表达式。暫时，我們只研究各向同性物体的情形，关于晶体的相应表达式将在§10中給出。

考察处于某一（沿物体为恒定的）温度下的变形物体，我們认定，在同一温度下（由于有热的膨脹，所以需要提出这一声明；詳見以后几节）当外力不存在时，物体是处于未变形的狀态。此时，当 $u_{ik}=0$ 时，内应力也应当不存在，卽是說，应当有 $\sigma_{ik}=0$。旣然 $\sigma_{ik}=\dfrac{\partial F}{\partial u_{ik}}$，可見，在 F 按 u_{ik} 的冪次展开的展式中应該缺少綫性項。

其次，由于自由能是个标量，因此，在 F 展开式中的任一項也必須是标量。用对称張量 u_{ik} 的分量可以构成两个独立的二次冪的标量；可以取对角綫分量和的平方 u_{ii}^2 及張量 u_{ik} 的所有分量的平方和 u_{ik}^2 作为这两个标量。将 F 展成 u_{ik} 的冪級数，結果得出，

准确到二阶項的表达式为

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2。 \tag{4,1}$$

这便是变形后各向同性物体的自由能之一般表达式。量 λ 与 μ 称为拉梅系数。

在§1中看到，形变中体积的改变由和数 u_{ll} 决定。如果这一和数等于零，那便是說，在形变中所給物体的体积不变，而改变的只是物体的形状。这种不改变体积的形变称为切变。

与以上情形相反的是体积改变而形状不变的形变。在这种形变中，物体的每一体元保持各自的形状不变。§1中已經知道，这种形变的張量具有 $u_{ik} = \text{const.}\, \delta_{ik}$ 的形式。这种形变称为全部压縮。

任何形变都可以表示为純切变与全部压縮这两种形变之和。为此，只需写出恒等式

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}。 \tag{4,2}$$

显然，右边第一項是純切变，因为它对角綫上各項之和等于零(記住，$\delta_{ii} = 3$)。而第二項則与全部压縮相关。

利用上述的将任意形变分解为純切与全部压縮的办法，写成某种形式，以替代 (4,1)，而作为变形后的各方同性物体自由能的一般表达式，将更方便。这便是，分别取 (4,2) 中第一項与第二項的分量平方和，卽 $\left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2$ 与 u_{ii}^2，作为两个独立的二次冪标量。此时，F 取如下形式①：

$$F = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ll}^2。 \tag{4,3}$$

① 常数項 F_0 是变形前物体的自由能，以后我們不考虑它。因此，为簡单起見，永远把它略去，符号 F 只理解为我們所关心的形变自由能，或如通常所說的彈性自由能。

量 K 与 μ 分别名为**全部压缩模数**与**切变模数**。K 与拉梅系数通过下式联系：

$$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu。\tag{4,4}$$

大家知道，在热动平衡状态中，自由能取极小值。如果没有任何外力作用于物体，则 F 作为 u_{ik} 的函数，应該在 $u_{ik}=0$ 时取极小值。这便意味着，二次型 (4,3) 必須为正，如果选擇 u_{ik} 使 $u_{ll}=0$，则 (4,3) 中只剩下第一項。如果所取的張量形如 $u_{ik}=\mathrm{const.}\,\delta_{ik}$，则(4,3)中剩下的是第二項。由此可知，二次型 (4,3) 为正的必要条件(也显然是充分条件)是系数 K 与 μ 一并为正。

于是，得出以下結果，卽压縮模数与切变模数永远是正的：

$$K>0,\quad \mu>0。\tag{4,5}$$

現在，来利用一般的热力学关系(3,6)，并借以确定应力張量。为了算出导数 $\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$，我們写出(在恒温下的)全微分 dF：

$$dF=Ku_{ll}du_{ll}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)d\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)。$$

在第二項中第一个括号乘以 δ_{ik} 后卽等于零，所以剩下的是

$$dF=Ku_{ll}du_{ll}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)du_{ik}。$$

将 du_{ll} 写成 $\delta_{ik}du_{ik}$，则

$$dF=\left[Ku_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\right]du_{ik}。$$

由此卽得出应力張量：

$$\sigma_{ik}=Ku_{ll}\delta_{ik}+2\mu\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)。\tag{4,6}$$

这便是对于各向同性物体，利用形变張量确定应力張量的表达式。由上式可知，就特例而言，当形变为純切变或純全部压縮时，则 σ_{ik} 与 u_{ik} 的联系仅仅由切变模数或全部压縮模数来决定。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com