张 量 流 体 力 学

范大年　　徐重光

水 利 电 力 出 版 社

内 容 提 要

本书介绍了著者发展的、易于掌握的广义矩阵运算法，用以系统地从事张量的分析和运算，来推求三维空间任意坐标系(正交或非正交坐标系)中空间和曲面的有关几何性质及各种张量的微分算子，进而得出流体力学需要的偏微分方程、积分方程及应力边界条件(包括粘性及表面张力)。书中附有非正交坐标系的例题，全面地阐述了广义矩阵运算法的应用。全书共分七章：绪论；空间几何学；曲面几何学；张量的微分算子；流体力学中的偏微分方程；流体力学中的积分方程；螺旋线——笛卡儿坐标系的例题。为读者(尤其是自学者)掌握张量流体力学提供了方便。本书的中文版根据读者意见和使用需要，较之英文版有重要的修改与增删，并增加了特殊正交坐标系的逆变换的附录。

本书读者对象主要为工程技术人员、科研工作者、大专院校教师及研究生，也可供有志于流体力学研究的自学者使用。

TENSORIAL FLUID MECHANICS

BY

DAH-NIEN FAN
Department of Mechanical Engineering
Howard University
United States of America
ZHONG-GUANG XU
Department of Mechanical Engineering
Hangzhou Institute of Electronic Engineering
People's Republic of China

The Water Resources and Electric Power Press
Beijing 1985
First Edition

张量流体力学

范大年　徐重光

*

水利电力出版社出版
(北京三里河路6号)
新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售
水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米　16开本　10.5印张　236千字
1985年1月第一版　1985年1月北京第一次印刷
印数0001—3080册　定价4.60元
书号 15143・5616

序

《张量流体力学》是一本实用而格式又异乎寻常的书。本书有按照张量分析的方法特别设计的表格，可供研究者有效地、循序渐进地推导流体力学方程的解析表达式，张量的算子，以及研究者所深切企求的在任意坐标系条件下空间和曲面的有关的几何性质。书中附有示例说明表格的使用。即使读者对张量分析及其在流体力学中的应用一无所知，在使用本书的过程中遇到的困难也是很小的。读者如果能熟悉张量理论，虽然不是必需的，但却是所期望的。

本书的编排具有一系列的特点。首先，使用者可自由地规定一组合适的独立的方向（不限于切于坐标曲线）或者基，在这里叫做物理基。对于矢量的分量，即指取自流体力学方程组及张量算子的流体速度、力系及其他等，由于选择了物理基，可以非常方便地使用于某些流体力学问题的数学公式，增强了适应性；第二，矩阵的乘法已经扩充为不仅是一般矩阵通常的行和列，而是有了第三个标志叫做页，从而一个三阶张量的分量，现在也可以表示为一个扩充的矩阵。这样使得一个三阶张量的内积或缩并，现在也可以用矩阵的乘法来处理，并且可以减少求和时产生误差的可能性；第三，本书包含有一个全面性的例子来说明书中每个表的使用。书中的示例将使初学者很快掌握怎样完成表的填写，特别是有助于自学者。

在著述本书时，我们既根据流体力学研究的需要，又从便于教学的角度来考虑。随着计算技术的迅速进步，使流体力学在各个科技领域的应用日趋广泛，同时，流体力学及其相应问题的数学处理常常需要选择新的坐标系和基。在一般曲线（非正交）坐标系中，流体力学的微分方程及边界条件常常是很复杂的。有时一个简单的方程就包含有几百项。文献中不乏方程计算失误而使大量计算报废的教训。联系到这一点，就在我们为本书的举例时，还无意中发现一篇最近发表的论文中，在使用螺旋线——笛卡儿坐标系计算粘性耗散函数时所产生的错误❶。从科研观点看，如何正确无误地推导这些复杂的关系式成为当务之首。而且，有的问题必须在特定坐标系里使计算量大大降低或使边界值得到更好地满足，才能成功地求得数值解。从教学的观点看，我们感到在研究院程度的流体力学课程中介绍一般张量的应用是必要的，不能老局限于少数几个正交坐标系，现今许多高等工程数学及流体力学的课本却仍停留在这一阶段，无怪乎目前大多数大学的流体力学教学仍停滞不前。根据我们在豪华（Howard）大学从事研究生的高等流体力学教学的经验，要求学生完成一次长篇的家庭作业，搞出一套标准格式供学生使用是非常需要的。诸如应用张量的技术在一个“陌生”的坐标系里表述Navier-Stokes方程。眼前这本书的产生就是我们过去几年为满足这一需要而深入研究、演进发展而成的。

---

❶ 徐重光、范大年：“讨论——稳态层流通过螺纹管：在方形管内的流体流动及稳态层流通过螺纹管：方形管内的热传递”，《美国机械工程师学会热传递学报》，第106卷，一九八四年五月号。

本书使用上的主要优点是：①大大提高了张量运算的效率；②易于检查和纠正计算的错误；③易于掌握利用矩阵来储存和检索张量分量的方法。我们深信《张量流体力学》一书将证明对从事流体力学研究的广大科研工作者、工程师和研究生是非常有用的。

在这里要感谢我们的同事、朋友及我们的家庭成员在本书著作过程中的关心和支持，它是鼓舞我们的源泉。尤其是要感谢美国豪华大学工学院院长M.L.华格尔（M.Lucius Walker）博士及机械系系主任C.B.华京士（Charles B. Watkins）博士的大力支持。感谢C.E.埃菲（Charlotte E.Irving）女士为我们打印手稿所付出的辛勤劳动。感谢B.琼斯（Bernita Johnson）女士经常为我们复印资料和手稿。我们还希望把我们的爱和感谢带给我们各自的家庭成员：范福棣(Frances Fan)、范佳盛(Jason Fan)、余瑞田（Yu, Rui-Tian）、徐波（Xu, Bo）和徐倩（Xu, Qian），没有他们的耐心和理解，要完成这一工作几乎是不可能的。同时也感谢范佳盛在编辑部分手稿曾给予的帮助。

最后，第二个作者愿借此机会感谢在他作为一个中华人民共和国的访问学者在豪华大学工作期间，工学院及机械系所给予的殷勤接待。感谢中华人民共和国电子工业部及杭州电子学院同意和支持他在美国从事较长时间的研究工作。并感谢美国朋友柏实义（Shih I-Pai）教授、C.H.马克思(Colin H.Marks)教授、范光兆(Kuang Jaw Fan)副教授、徐容章(Yong Chang Shyu)先生和毛孟和（Mon Ho Mao）女士对他的研究工作的关心。

我们热切地希望听到读者的意见。请对本书提出批评和建议，以便我们能在再版时改进。

范大年　于美国豪华大学

徐重光　于美国马里兰（Mary land）大学

华盛顿，哥伦比亚特区

一九八三年四月

中 文 版 序

《张量流体力学》的中文版1984年在中国首都北京出版，距离1983年这本书的英文版在美国首都华盛顿出版，仅仅只有一年的时间，这就为中美两国科学工作者卓有成效的合作提供了有力的证明。

一年来，我们又用本书中的张量分析方法，来推导在曲面定位坐标系（Surface-Oriented Coordinates）条件下流体力学的一系列方程，取得了成功，它是德意志联邦共和国理论流体力学研究所曾多年从事研究的。这就进一步证明，本书所提供的方法，为流体力学研究者在明坐标系（Explicitly Defined Coordinate System）条件下推导流体力学方程和边界条件，提供了一条捷径。当然，本书也可用于隐坐标系的一些特殊例子。根据1981年德意志联邦共和国流体力学专家E.H.Hirschel 及W.Kordulla（系《Shear Flow in Surface-Oriented Coordinate》一书的作者）的估计，在一般曲线坐标系的三维条件下，流体力学的连续方程有16项；动量方程的三个分量，每个分量方程有844项；能量方程有1583项；应力张量有954项。因此，如何有效率地、有系统而又易于检查地来推导这些方程，为编制程序并利用计算机解出这些方程提供可靠的基础，就成为当务之急。瞻望未来，可以预期，实用张量分析将普及于典籍，取代直角（正交）坐标及向量分析，甚至取代笛卡儿张量（Cartesian Tensor）。近年来，国际上一些自然科学文献中，不断涌现用张量来分析解决非正交坐标系的问题，就是明证。

趁本书中文版出版的机会，作者根据讲授和使用这本书的体验，将书中一些地方作了重要的补充和校正，并应读者的要求，增加了附录，为使用本书提供了方便。

在本书中文版的出版过程中，我们要感谢浙江大学力学系郭本铁教授、范正翘副教授及上海机械学院王甲升副教授的关注和支持。我们还要特别感谢水利电力出版社为迅速地出版这本书所提供的种种帮助。徐华副编审为了出版这本书，认真细致地做了不少繁琐、有益的工作，使这本充满各种各样符号和标志的书，能比较完美地呈现在读者面前。离开他（她）们的热情帮助和支持，要使中文版迅速地和读者见面，几乎是不可能的。

面对新技术革命的挑战，流体力学的应用日益渗透到各个新的工业技术领域，愿《张量流体力学》一书能为中国的四个现代化建设添砖加瓦，这也是对我们付出劳动的最大报酬。

范大年
于美国华盛顿哥伦比亚特区豪华大学
徐重光
于中国浙江省杭州市杭州电子学院

一九八四年春

目　　录

第一章

绪　　论

第一节　概　　述

《张量流体力学》一书，可供从事流体力学研究的科学家、工程师和研究生，有步骤地推导在任意一般曲线坐标系条件下流体力学的解析表达式之用。用本书进行张量的变换，系统而有效率，易于掌握又节省时间。使用本书时要求熟悉微积分、线性代数，尤其是矩阵代数。虽期望使用者懂得张量的分析，但不是必需的。只要按照这本书的方法和示例去做，甚至对原来没有张量知识的使用者，在实现自己的目的时也只会遇到很少的困难。

根据张量分析的方法，本书提供了专用的矩阵及表格，供使用者推导迄今仍未解决的坐标系的流体力学的方程，或者证明其他某些较复杂方程的表达式时使用。这一完整的工具书，不仅便于眼前的使用，而且可作为在任意曲线坐标系的经常的参考书。

本书就其功能可分为七章。第一章介绍本书需用的张量基础知识，输入和输出，以及广义矩阵的运算方法。第二章是作为以后各章的运算基础。包括有相对于相应的基的度量张量的分量，自然的和物理的克里斯托弗尔符号，体积微元和面积微元。这些都取决于使用者规定的坐标系和基。第三章专用于当使用者给出高斯坐标系的曲面参数表达式时，推导出曲面的主曲率。作为一个一般应力边界条件特殊情形的例子，主曲率求和出现在表面张力的拉普拉斯公式中，在后面第五章加以推导。第四章推导出各种不同张量的微分算子的表达式。第五章推导出特殊曲线坐标系条件下，流体力学的偏微分方程。除众所周知的连续性方程、动量方程（Navier-Stokes方程）及能量方程外，还包括带有非均匀的表面张力效应的在两种流体分界面上的应力边界条件。特别是，在这一章还可求出粘性应力张量及粘性耗散函数。第六章介绍了与六个坐标表面相邻的控制体的流体力学的守恒定律的积分形式。整本书使用的例子按第二至第六章的体系列为第七章，为使用者（尤其是自学者）提供了方便。例题中的螺旋线——笛卡儿坐标系（非正交坐标系）取自最近的美国文献。

使用者可根据自己的需要，有时只需要选择书内的某些章或部分。例如，假使只对忽略了表面张力影响的流体力学问题的微分公式感兴趣，就可以略掉第三章和第六章。当然，整本书所包括的范围都可以推荐给研究院程度的学生作为流体力学的课本。在一个不是无价值的曲线坐标系里进行流体力学的基础数学练习，即使只对本书进行过一次，也会使学生得到很多的收获。

我们要求读者第一次接触本书时，在着手使用以前，应先阅读第一章绪论。

第二节 基 及 分 量

在一个惯性或非惯性参考系里，有无穷多组基（包括坐标系）。对表达自然定律而言，没有一组基是特别的。自然定律应超乎基的表达式而存在，其中出现的量均称为张量，张量包括标量（Scalar）、矢量（Vector）及并矢（Dyad）等。张量为抽象矢量。张量在概念上对基存在独立性，而在表达运算上存在对基的依赖性。这一概念和场相似，场存在着概念上对坐标系的独立性，表达运算上对坐标系的依赖性（如微分、积分等）。

这一节里包含有直至三阶的张量的基及它的分量。在这本书里见到的最高阶张量是三阶的矢量的梯度的梯度。零阶的张量是标量，在这里是无关的。

一、一阶张量

一阶张量是矢量。

空间矢量有四个不同类型的基矢量。它们是自然基$\{\vec{e}_i(X)\}$及它的二重基$\{\vec{e}^i(X)\}$；物理基$\{\vec{e}_I\}$及它的对偶基$\{\vec{e}^I\}$。标志 i 及 I 分别是从 1 至 3 及从（1）至（3）。从而$\vec{e}_i(X)$表示一个相应于X坐标系的自然基矢量，$\vec{e}_{(1)}$则是物理基矢量。

如果$\vec{r}$是在一般曲线坐标系X中的一点（x^1，x^2，x^3）的位置矢量，那末它的第 i 个自然基矢量$\vec{e}_i(X)$是给出为

$$\vec{e}_i(X)=\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}. \qquad i=1,2,3 \tag{1-1}$$

很明显的$\vec{e}_i(X)$是切于坐标曲线x^i。注意$\vec{e}_i(X)$的单位随x^i而异，$|\vec{e}_i(X)|$不是单位长。二重基矢量$\vec{e}^i(X)$可从标量积中求得，即

$$\vec{e}^i(X)\cdot\vec{e}_j(X)=\delta^i_j \quad i,j=1,2,3 \tag{1-2}$$

式中若 i=j 时，δ^i_j是等于 1；若 i≠j 时，δ^i_j是等于零。从而$\vec{e}^i(X)$是垂直于常数x^i的坐标表面。

规定一个物理基在于使用者的判断。第 I 个物理基矢量$\vec{e}_I$往往是根据它的逆变分量G^i_I或它的协变分量G_{Ij}来决定。那就是

$$\vec{e}_I=G^i_I\vec{e}_i(X)=G_{Ii}\vec{e}^i(X) \tag{1-3}$$

式中哑标志或重复标志 i 是空间的维数的求和。这是叫做爱因斯坦求和规则。方程（1-3）的逆变换关系式可表示为

$$\vec{e}_i(X)=G^I_i\vec{e}_I \tag{1-4}$$

$$\vec{e}^i(X)=G^{iI}\vec{e}_I$$

现在 I 是哑标志（1）、（2）与（3）的求和。在所有流体力学方程中，流体速度$\vec{V}$明显地出现在相对于物理基的分量V^I中。在原则上物理基是不可能经常法向正交的，虽然在许多问题上希望它法向正交。物理基的对偶基满足以下关系式

$$\vec{e}^I\cdot\vec{e}_J=\delta^I_J \tag{1-5}$$

类似于方程（1-2）。

曲面矢量同样的具有曲面自然基$\{\vec{e}_\alpha(U)\}$及它的二重基$\{\vec{e}^\alpha(U)\}$，其中U位于一个带有坐标曲线u^α，$\alpha=1,2$的曲线曲面坐标（高斯的坐标）系。根据参数表达式$x^i=x^i(u^1,u^2)$，$i=1,2,3$，从而确定了曲面S的特性。没有曲面的物理基写在本书中。

很容易看出，第α个曲面的基矢量$\vec{e}_\alpha(U)$是给出为

$$\vec{e}_\alpha(U)=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\vec{e}_i(X) \tag{1-6}$$

根据定义，二重基矢量$\vec{e}^\alpha(U)$本身是一个曲面矢量，并满足以下关系式

$$\vec{e}^\alpha(U)\cdot\vec{e}_\beta(U)=\delta^\alpha_\beta \qquad \alpha,\beta=1,2 \tag{1-7}$$

因此$\partial x^i/\partial u^\alpha$是$\vec{e}_\alpha(U)$的第i个自然或逆变分量，并且它也是在曲面上$\vec{e}^i(X)$的投影的第$\alpha$个协变曲面分量。

如同前面看到的，当矢量表示为如同一个基矢量的线性组合时，就决定了一个基的矢量的分量。那就是，假使空间矢量$\vec{A}$是写为

$$\vec{A}=A^i\vec{e}_i(X)=A_i\vec{e}^i(X)=A^I\vec{e}_I=A_I\vec{e}^I \tag{1-8}$$

那末A^i，A_i，A^I及A_I分别是相对于基$\{\vec{e}_i(X)\}$，$\{\vec{e}^i(X)\}$，$\{\vec{e}_I\}$及$\{\vec{e}^I\}$的第i个或第I个分量。在曲面S上空间矢量$\vec{A}$的投影等于$A_i\partial x^i/\partial u^\alpha\vec{e}^\alpha$，因此$A_i\partial x^i/\partial u^\alpha$是叫做在曲面S上$\vec{A}$的投影的第$\alpha$个协变曲面矢量。带有逆变曲面分量$B^\alpha$，$\alpha=1,2$的一个曲面矢量$\vec{B}$，且$\vec{B}=B^\alpha e_\alpha(U)$；它具有的逆变空间分量等于$B^\alpha\partial x^i/\partial u^\alpha$，$i=1,2,3$，这里$\vec{B}=B^\alpha\partial x^i/\partial u^\alpha\vec{e}_i(X)$。

二、二阶张量

二阶张量是并矢量。并矢量的表达运算需依赖基。并矢通常以$\vec{D}$表示。在流体力学中一些熟悉的并矢量是动量-流量并矢量、粘性应力并矢量和应变率并矢量。并矢量常常是象张量一样相对简单。许多并矢量在物理学上（象刚才提到一个）是对称并矢量。

两组（并不是必需不同的）空间矢量基的外积产生一组并矢量基。因此，在一阶张量中叙述的以四组矢量基$\{\vec{e}_i(X)\}$、$\{\vec{e}^i(X)\}$、$\{\vec{e}^I\}$及$\{\vec{e}_I\}$可以构成十六个并矢量基。表1-1表明的这个法则在本书中分别表示相对于这十六个基的一个并矢量$\overleftrightarrow{D}$的分量。注意避免混合分量上的标志的圆点的位置（兼有上标志及下标志）可能的混淆，可以说，在$D_j{}^{\cdot i}$及$D^i{}_{\cdot j}$间通常是不相等的。

表 1-1　　相对于不同基的空间并矢量$\overleftrightarrow{D}$的表达式

自然基矢量或物理基矢量	$\vec{e}_j(X)$	$\vec{e}^j(X)$	$\vec{e}_J$	$\vec{e}^J$
$\vec{e}_i(X)$	$D^{ij}\vec{e}_i(X)\vec{e}_j(X)$	$D^i{}_{\cdot j}\vec{e}_i(X)\vec{e}^j(X)$	$D^{iJ}\vec{e}_i(X)\vec{e}_J$	$D^i{}_{\cdot J}\vec{e}_i(X)\vec{e}^J$
$\vec{e}^i(X)$	$D_i{}^{\cdot j}\vec{e}^i(X)\vec{e}_j(X)$	$D_{ij}\vec{e}^i(X)\vec{e}^j(X)$	$D_i{}^{\cdot J}\vec{e}^i(X)\vec{e}_J$	$D_{iJ}\vec{e}^i(X)\vec{e}^J$
$\vec{e}_I$	$D^{Ij}\vec{e}_I\vec{e}_j(X)$	$D^I{}_{\cdot j}\vec{e}_I\vec{e}^j(X)$	$D^{IJ}\vec{e}_I\vec{e}_J$	$D^I{}_{\cdot J}\vec{e}_I\vec{e}^J$
$\vec{e}^I$	$D_I{}^{\cdot j}\vec{e}^I\vec{e}_j(X)$	$D_{Ij}\vec{e}^I\vec{e}^j(X)$	$D_I{}^{\cdot J}\vec{e}^I\vec{e}_J$	$D_{IJ}\vec{e}^I\vec{e}^J$

假使D^{Ij}是等于D^{jI}或者相应的D_{Ij}是等于D_{jI}，则并矢量$\overleftrightarrow{D}$是叫做对称的。很容易证明以上关于$\overleftrightarrow{D}$的对称条件也满足D^{ij}及D^{ji}相等或D_{ij}及D_{ji}相等。这里必须注意一个重要的不同，量D^{jI}及D^{Ij}分别是相对于不同的基$\{\vec{e}_j(X)\vec{e}_I\}$及$\{\vec{e}_I\vec{e}_j(X)\}$的$\overleftrightarrow{D}$的分量。虽然$D^{ij}$及$D^{ji}$是相应于同样的基$\{\vec{e}_i(X)\vec{e}_j(X)\}$，但当i及j是不同的时候，分量$D^{ij}$及$D^{ji}$是相对于不同的基并矢量$\vec{e}_i(X)\vec{e}_j(X)$及$\vec{e}_j(X)\vec{e}_i(X)$。从而假使$\overleftrightarrow{D}$是对称的，一般来说，$D^{(1)2}$与$D^{(2)1}$，$D^{(2)3}$与$D^{(3)2}$或者$D^{(3)1}$与$D^{1(3)}$是不相等的。倘若两组矢量$\{\vec{e}_I\}$及$\{\vec{e}_i(X)\}$是相等的（对于一个可能的普通标量相乘除外），则它们可以是相等的。而且，$D^{(1)1}$及$D^{1(1)}$的相等，已不再是无价值的相等。对于一个对称的并矢量基的圆点可以从它的混合分量中去掉。这是因为在对称的并矢量的情形下，在基并矢量中的基矢量的阶变得不重要了。作为一个结论，$D^{I}_{\cdot j}$及$D_{j}^{\cdot I}$是同样的，并且假使$\overleftrightarrow{D}$是对称的，还可以一般地表示为D^{I}_{j}。

除了缺少任意的曲面物理矢量基外，在曲面上并矢量的讨论也类似于以上情况。是从曲面自然基$\{\vec{e}_\alpha(U)\}$及它的二重基$\{\vec{e}^\alpha(U)\}$的外积中形成了四个曲面并矢量基。这些并矢量基是$\{\vec{e}_\alpha(U)\vec{e}_\beta(U)\}$、$\{\vec{e}_\alpha(U)\vec{e}^\beta(U)\}$、$\{\vec{e}^\alpha(U)\vec{e}_\beta(U)\}$及$\{\vec{e}^\alpha(U)\vec{e}^\beta(U)\}$。相对于它们的一个曲面并矢量$\overleftrightarrow{E}$具有的分量分别是$E^{\alpha\beta}$、$E^{\alpha}_{\cdot\beta}$、$E_{\alpha}^{\cdot\beta}$及$E_{\alpha\beta}$，其中$\alpha,\beta=1,2$。假使$\overleftrightarrow{E}$是对称的，那末$E^{\alpha\beta}$等于$E_{\beta\alpha}$；$E_{\alpha\beta}$等于$E_{\beta\alpha}$；$E^{\alpha}_{\cdot\beta}$等于$E_{\beta}^{\cdot\alpha}$（因此圆点在此处可以再除去不会产生任何混淆）。

一个新的并矢量的产生，来自一个空间矢量和一个曲面矢量的外积，叫做混合并矢量。混合并矢量或张量在微分几何中特别有用。这混合并矢量基$\{\vec{e}_i(X)\vec{e}^\alpha(U)\}$，是$\{\vec{e}_i(X)\}$及$\{\vec{e}^\alpha(U)\}$的外积，组合起来非常方便。线性组合$\partial x^i/\partial u^\alpha\vec{e}_i(X)\vec{e}^\alpha(U)$，$i=1,2,3$及$\alpha=1,2$是一个混合度量张量，它是研究位于空间X内的曲面的几何性质的基础。概括起来，举例来说，当根据方程（1-6）将在曲面混合基$\{\vec{e}_\alpha(U)\vec{e}^\beta(U)\}$中的$\vec{e}_\alpha(U)$取代变换为$\vec{e}_i(X)$的，或者当在空间并矢量基$\{\vec{e}_i(X)\vec{e}^j(X)\}$中的$\vec{e}^j(X)$是投影在曲面上时，即为混合并矢量。

三、三阶张量

二阶张量的并矢量的逻辑上广义的称呼叫做三阶张量的三阶基。三组矢量基的外积是一个三价基。

整个来说，在本书中，矢量的梯度的梯度是最高阶的张量而且是唯一的空间三价基。在这里，带有分量$V^{I}_{,j,k}$的三价基$\nabla\nabla\vec{V}$可表达为基的三元素$\vec{e}_I\vec{e}^j(X)\vec{e}^k(X)$，$I=(1),(2),(3)$及$j,k=1,2,3$的一个线性组合。下标志中的逗点表示相对于逗点后的标志的坐标的协变导数。

必须注意三阶基$\{\partial x^i/\partial u^\alpha\}_{,\beta}\vec{e}_i(X)\vec{e}^\alpha(U)\vec{e}^\beta(U)$，$i=1,2,3$及$\alpha,\beta=1,2$仅仅是局部地出现在本书中。要得到$(\partial x^i/\partial u^\alpha)_{,\beta}$的完整的表达式必须在和中加上这一项

$$-\begin{Bmatrix}\gamma\\ \alpha\ \beta\end{Bmatrix}\frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}.$$

这可从第三章第三节第3项中找到。带有波形括号的三个希腊标志符号代表第二种类型的

曲面克里斯托弗尔符号（没有写在本书中）。注意到因为至曲面的单位法向$\vec{n}$与曲面基矢量$\vec{e}_\gamma(U)$的标量积$n_i \partial x^i / \partial u^\gamma$等于零，所以在第二基本的曲面张量$b_{\alpha\beta}\vec{e}^\alpha(U)\vec{e}^\beta(U)$的表达式中找不到这一项。

必须注意：三阶张量是本书的广义矩阵法能处理的最高阶张量。基为三组矢量的外积，例如

$$\{\vec{e}^I \vec{e}_j(X) \vec{e}^k(X), \qquad I=(1),(2),(3), \qquad i,j,k=1,2,3\}$$

即在三维空间中一个三阶张量有27个分量。

四组相异的矢基通过外积可组成$4^3=64$个三阶张量基，因此三阶张量有64个不同的表达式，有的书称之为伴生张量（Associated Tensors）。例如，在自然基及其对偶基下的三阶张量的八个伴生张量为

$$T_{ijk}(X) \qquad T_{ij\cdot}^{\cdot\cdot k}(X) \qquad T_{i\cdot k}^{\cdot j\cdot}(X)$$
$$T_{i\cdot\cdot}^{\cdot jk}(X) \qquad T_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot}(X) \qquad T_{\cdot\cdot k}^{ij\cdot}(X)$$
$$T_{\cdot j\cdot}^{i\cdot k}(X) \qquad T^{ijk}(X)$$

表 1-2　　　　不同阶张量的分量数

项　　　目	阶　　数	伴生张量	分量数
标　　量（Scalar）	0	P^0	N^0
矢　　量（Vector）	1	P^1	N^1
并矢量（Dyad）	2	P^2	N^2
三阶张量（Triad）	3	P^3	N^3
⋮	⋮	⋮	⋮
张　　量（Tensor）	n	P^n	N^n

注：p——矢基组数；N——空间维数。

第三节　度　量　张　量

度量张量是表示空间和曲面几何学特性的基本量。

根据这本书的目的，足以假定度量张量与时间不相关及在欧几里得的空间。

空间度量张量$\overleftrightarrow{G}$、曲面度量张量$\overleftrightarrow{S}$及混合度量张量$\overleftrightarrow{H}$是对称的并矢量。相对于上节所规定的十六个空间并矢量基的$\overleftrightarrow{G}$的表达式列在表1-3中。

表 1-3　　空间度量张量$\overleftrightarrow{G}$的表达式[i，j = 1，2，3及I，J = (1)，(2)，(3)]

自然基矢量或物理基矢量	$\vec{e}_j(X)$	$\vec{e}^j(X)$	$\vec{e}_J$	$\vec{e}^J$
$\vec{e}_i(X)$	$G^{ij}(X)\vec{e}_i(X)\vec{e}_j(X)$ $(G^{ij}(X)=G^{ji}(X))$	$\delta^i_j\vec{e}_i(X)\vec{e}^j(X)$ $(\delta^i_{\cdot j}=\delta^i_j)$	$G^{iJ}\vec{e}_i(X)\vec{e}_J$ $(G^{iJ}=G^{Ji})$	$G^i_J\vec{e}_i(X)\vec{e}^J$ $(G^i_{\cdot J}=G^i_J)$
$\vec{e}^i(X)$	$\delta_i^j\vec{e}^i(X)\vec{e}_j(X)$ $(\delta_i^{\cdot j}=\delta_i^j)$	$G_{ij}(X)\vec{e}^i(X)\vec{e}^j(X)$ $(G_{ij}(X)=G_{ji}(X))$	$G_i^J\vec{e}^i(X)\vec{e}_J$ $(G_i^{\cdot J}=G_i^J)$	$G_{iJ}\vec{e}^i(X)\vec{e}^J$ $(G_{iJ}=G_{Ji})$
$\vec{e}_I$	$G^{Ij}\vec{e}_I\vec{e}_j(X)$ $(G_{Ij}=G_{jI})$	$G^I_j\vec{e}_I\vec{e}^j(X)$ $(G^I_{\cdot j}=G^I_j)$	$G^{IJ}\vec{e}_I\vec{e}_J$ $(G^{IJ}=G^{JI})$	$\delta^I_J\vec{e}_I\vec{e}^J$ $(\delta^I_{\cdot J}=\delta^I_J)$
$\vec{e}^I$	$G_I^j\vec{e}^I\vec{e}_j(X)$ $(G_I^{\cdot j}=G_I^j)$	$G_{Ij}\vec{e}^I\vec{e}^j(X)$ $(G_{Ij}=G_{jI})$	$\delta_I^J\vec{e}^I\vec{e}_J$ $(\delta_I^{\cdot J}=\delta_I^J)$	$G_{IJ}\vec{e}^I\vec{e}^J$ $(G_{IJ}=G_{JI})$

从表中可见，在并矢量基中，对称性要求基矢量的阶可以互换。曲面度量张量$\overleftrightarrow{S}$可以表示为

$$\overleftrightarrow{S}=S^{\alpha\beta}(U)\vec{e}_\alpha(U)\vec{e}_\beta(U) \qquad [S^{\alpha\beta}(U)=S^{\beta\alpha}(U)]$$

$$=S_{\alpha\beta}(U)\vec{e}^\alpha(U)\vec{e}^\beta(U) \qquad [S_{\alpha\beta}(U)=S_{\beta\alpha}(U)]$$

$$=\delta^\beta_\alpha\vec{e}^\alpha(U)\vec{e}_\beta(U) \qquad [\delta_\alpha^{\cdot\beta}=\delta^\beta_\alpha]$$

$$=\delta^\alpha_\beta\vec{e}_\alpha(U)\vec{e}^\beta(U) \qquad [\delta^\alpha_{\cdot\beta}=\delta^\alpha_\beta]$$

混合度量张量$\overleftrightarrow{H}$的表达式以及三个度量张量间的关系表明在表 1-4 中。对于一个位于空间X内的曲面U来说，空间度量张量$\overleftrightarrow{G}$在曲面上的投影是等于$\overleftrightarrow{S}$的。显然，在表示相对于空间并矢量基的曲面度量张量时，是不可能找到$\overleftrightarrow{G}$的。必须注意到，混合度量张量$\overleftrightarrow{H}$可以根据一个在并矢量基中的空间基矢量在曲面上的投影从$\overleftrightarrow{G}$中得到，或者象一个空间矢量一样，根据在表示曲面并矢量基中的曲面基矢量从$\overleftrightarrow{S}$中得到。理所当然，$\overleftrightarrow{H}$也可以看作$\overleftrightarrow{G}$在曲面上的投影。

表 1-4　　混合度量张量 $\overleftrightarrow{H}$ 的表达式

基矢量	$\vec{e}_j(X)$	$\vec{e}^{\,j}(X)$	$\vec{e}_\beta(U)$	$\vec{e}^{\,\beta}(U)$
$\vec{e}_i(X)$	$\left[\overleftrightarrow{G}\neq\overleftrightarrow{S}\right.$ $\overleftrightarrow{S}=S^{\alpha\beta}(U)\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\dfrac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\vec{e}_i(X)\,\vec{e}_j(X)\Big]$		$H^{i\beta}\vec{e}_i(X)\,\vec{e}_\beta(U)$ $(H^{i\beta}=H^{\beta i})$	$\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\beta}\vec{e}_i(X)\,\vec{e}^{\,\beta}(U)$
			[$\overleftrightarrow{H}=\overleftrightarrow{G}$的投影]	
$\vec{e}^{\,i}(X)$			$H^\beta_i\,\vec{e}^{\,i}(X)\,\vec{e}_\beta(U)$ $\left(H_i^{\cdot\beta}\equiv H^\beta_i =G_{ij}(X)S^{\alpha\beta}(U)\times\dfrac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\right)$	$H_{i\beta}\,\vec{e}^{\,i}(X)\,\vec{e}^{\,\beta}(U)$ $(H_{i\beta}=H_{\beta i})$
$\vec{e}_\alpha(U)$	$H^{\alpha j}\vec{e}_\alpha(U)\,\vec{e}_j(X)$ $\left(H^{\alpha j}=S^{\alpha\beta}(U)\dfrac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\right)$	$H^\alpha_j\,\vec{e}_\alpha(U)\,\vec{e}^{\,j}(X)$ $(H^\alpha_{\cdot j}\equiv H^\alpha_j)$	$\left[\overleftrightarrow{S}=\overleftrightarrow{G}\right.$的投影 $=G_{ij}(X)\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\dfrac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\vec{e}^{\,\alpha}(U)\,\vec{e}^{\,\beta}(U)\Big]$	
	[$\overleftrightarrow{H}=\overleftrightarrow{G}$的投影]			
$\vec{e}^{\,\alpha}(U)$	$\dfrac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\vec{e}^{\,\alpha}(U)\,\vec{e}_j(X)$	$H_{\alpha j}\,\vec{e}^{\,\alpha}(U)\,\vec{e}^{\,j}(X)$ $\left(H_{\alpha j}=G_{ij}(X)\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$		

第四节　基　的　变　换

基的变换经常产生在张量的运算中。通过度量张量，表 1-5 提供了所有有关变换或基矢量的投影定律的参考资料要点。因为并矢量基是两组矢量基的外积。可以从那些有关矢量推导出并矢量的变换定律。例如，从并矢量基$\{\vec{e}_i(X)\,\vec{e}^{\,J}\}$至$\{\vec{e}^{\,i}(X)\,\vec{e}^{\,j}(X)\}$的变换定律是简明地列出在表 1-5 中（度量张量下划有黑线）。

$$\vec{e}^{\,i}(X)\,\vec{e}^{\,j}(X)=G^{ik}(X)G^j_J\,\vec{e}_k(X)\,\vec{e}^{\,J}$$

表 1-5　　基矢量的投影（带有“*”号者）或变换（注意表中$H^j_\alpha=\partial x^j/\partial u^\alpha$）

各种基矢量及其对偶基	$\vec{e}_i(X)=$	$\vec{e}^{\,i}(X)=$	$\vec{e}_I=$	$\vec{e}^{\,I}=$	$\vec{e}_\alpha(U)=$	$\vec{e}^{\,\alpha}(U)=$
$\vec{e}_j(X)\times$	δ^j_i	$\underline{G^{ij}(X)}$	G^j_I	G^{Ij}	H^j_α	$H^{\alpha j}$
$\vec{e}^{\,j}(X)\times$	$G_{ij}(X)$	δ^i_j	G_{Ij}	G^I_j	$H_{\alpha j}$	H^α_j
$\vec{e}_J\times$	G^J_i	G^{iJ}	δ^J_I	G^{IJ}	$H^j_\alpha G^J_j$	$H^{\alpha j}G^J_j$
$\vec{e}^{\,J}\times$	G_{iJ}	$\underline{G^i_J}$	G_{IJ}	δ^I_J	$H^j_\alpha G_{jJ}$	$H^{\alpha j}G_{jJ}$
$\vec{e}_\beta(U)\times$	H^β_i*	$H^{i\beta}*$	$G_{Ii}H^{i\beta}*$	$G^I_iH^{i\beta}*$	δ^β_α	$S^{\alpha\beta}(U)$
$\vec{e}^{\,\beta}(U)\times$	$H_{i\beta}*$	$H^i_\beta*$	$G_{Ii}H^i_\beta*$	$G^I_iH^i_\beta*$	$S_{\alpha\beta}(U)$	δ^α_β

第五节 等 值 量 及 输 入

在使用本书时，要求使用者必须提供“等值量”与“输入”的指令。

一、等值量

在“等值量”栏下，要求使用者根据自己的意图，使用助记符号取代张量符号或采用的标志。表1-6列出等值量所在的位置及量，以便于规定助记符号。

例如，一组关于球极坐标的常见的助记符号是$x^1=r$，$x^2=\theta$及$x^3=\phi$。假使按照笛卡儿系规定一个曲线坐标系，那么可以采用的等值量为$z^1=x$，$z^2=y$及$z^3=z$。假使球极坐标系的正交自然基是选择物理基，关于标志I的等值量为$(1)=r$，$(2)=\theta$及$(3)=\phi$可以是有用的。而且可以不作简化或改变地保持张量的符号或标志在等值量中。

表 1-6　　　　等值量指令的位置及说明

页　　数	量　　（参数）	张量的符号或标志
17	X系的空间坐标系 Z系的空间坐标系	x^1，x^2，x^3　　(x^i) z^1，z^2，z^3　　(z^i)
23	相应于物理基或它的对偶基的标志	(1)，(2)，(3)　　(I)
32	U系的曲面坐标系 （或高斯的坐标系）	u^1，u^2　　(u^α)
57	体积积分的上限 体积积分的下限	$x^1(U)$，$x^2(U)$，$x^3(U)$ $x^1(L)$，$x^2(L)$，$x^3(L)$

二、输入

在“输入”栏下，使用者在进行张量运算时，必须按下述格式的要求提供资料。

本书有六个“输入”指令，现分述于下：

1．输入$[z^i]=[z^i(x^j)]$（第二章第一节）

这个输入规定了从所选择带有坐标(x^1, x^2, x^3)的曲线坐标系X到一个已知的带有坐标(z^1, z^2, z^3)的坐标系Z的变换。变换产生的函数式$z^i=z^i(x^1, x^2, x^3)$，$i=1,2,3$，用矩阵方程可以表示为$[z^i]=[z^i(x^1,x^2,x^3)]$，式中i是行标志。如果需要助记符号的话，也是可以用上的。

2．输入$[G_{km}(Z)]$（第二章第二节）

度量系数$G_{km}(Z)$决定于

$$G_{km}(Z)=\frac{\partial\vec{r}}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial z^m}$$

式中$\vec{r}$是点(z^1, z^2, z^3)的位置矢量，或者从对称为正来规定二次微分形式

$$\vec{dr}\cdot\vec{dr}=G_{km}(Z)dz^k dz^m$$

式中$\vec{dr}\cdot\vec{dr}$是在Z空间中相距为$\vec{dr}$的两点之间距离微元的平方。

张量系数$G_{km}(Z)$，在三维坐标系Z中的k, m=1, 2, 3，是安排在以k和m分别作为行和列的标志的矩形矩阵（方阵）$[G_{km}(Z)]$中的。

3. 输入$[G_I^j]$（第二章第四节）

物理基矢量$\vec{e}_I$的集，I=(1), (2), (3)，是规定为相对于X坐标系的自然基$\{\vec{e}_i(X)\}$，即

$$\vec{e}_I=G_I^j\vec{e}_j(X)$$

从而G_I^j是相对于自然基的第I个物理基矢量的第j个（逆变）分量。

需要输入的$[G_I^j]^T$，是从安排j=1, 2, 3及(I)=(1), (2), (3)的张量G_I^j在一个以I为行标志、j为列标志的矩形矩阵中得到的。

4. 输入$[x^i]=[x^i(u^1,\ u^2)]$（第三章第一节）

这个输入是通过曲面的一对高斯的坐标$(u^1,\ u^2)$，来规定在X空间内的一个曲面的参数表达式。

在曲面上带有高斯的坐标(u^1, u^2)的一点具有在X空间内的空间坐标(x^1, x^2, x^3)，式中$x^i=x^i(u^1, u^2)$, i=1, 2, 3。这三个函数是安排在一个矩阵方程$[x^i]=[x^i(u^1, u^2)]$中，式中i是行标志。

5. 输入$x^i(U)$及$x^i(L)$，i=1, 2, 3（第六章第一节）

在控制体分析中规定体积积分的上限和下限的值（这个输入也列在关于等值量助记符号的选择栏下）。

6. 输入$[\lambda_I]^T$（第六章第三节）

现在这个输入是按照研究控制体动量和力的平衡的分析来规定一个方向。量λ_I是一个平行矢量场的第I个分量，相对于物理基的对偶基$\vec{\lambda}$可表示为

$$\vec{\lambda}=\lambda_I\vec{e}^I \qquad I=(1), (2), (3)$$

这个$[\lambda_I]^T$的输入形式是一个行矢量$[\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}]$。

要构成一个平行矢量场，可根据单位矢量$\vec{\lambda}$是相互平行且具有同样的方向，在空间的每个点作出。从而λ_I及$\vec{e}^I$(或λ^I及$\vec{e}_I$)必须相应变化，以使$\lambda_I\vec{e}^I$(或$\lambda^I\vec{e}_I$)保持不变。

关于$\vec{\lambda}$是一个平行矢量场的充分和必要条件是

$$\frac{\partial\lambda_I}{\partial x^i}=\begin{Bmatrix}J\\ I\ \ i\end{Bmatrix}\lambda_J$$

或

$$\frac{\partial\lambda^I}{\partial x^i}=-\begin{Bmatrix}I\\ J\ \ i\end{Bmatrix}\lambda^J$$

式中 $\begin{Bmatrix}I\\ J\ \ i\end{Bmatrix}$——第二种类型的物理的克里斯托弗尔符号。

第六节 输　　出

本书的主要输出列举于下：

一、张量的微分算子（第四章）

1. 标量场φ的梯度

$$\nabla\phi=G^{Ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^{j}}\vec{e}_{I}$$

式中 $\nabla\phi$——标量场φ的梯度。

2. 标量场φ的拉普拉斯算子

即为标量场φ之梯度的散度，以$\nabla^{2}\phi$表示。

$$\nabla^{2}\phi=G^{ij}(X)\left(\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{i}\partial x^{j}}-\begin{Bmatrix}k\\ i\quad j\end{Bmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x^{k}}\right)$$

式中 $\nabla^{2}\phi$——标量场φ的拉普拉斯算子；

$\begin{Bmatrix}k\\ i\quad j\end{Bmatrix}$——第二种类型的自然的克里斯托弗尔符号。

3. 矢量场$\vec{V}$的梯度

$$\nabla\vec{V}=V^{I}_{\cdot,j}\vec{e}_{I}\vec{e}^{j}(X)$$

$$V^{I}_{\cdot,j}=\frac{\partial V^{I}}{\partial x^{j}}+\begin{Bmatrix}I\\ J\quad j\end{Bmatrix}V^{J}$$

式中 $\nabla\vec{V}$——矢量场$\vec{V}$的梯度。

4. 矢量场$\vec{V}$的散度

$$\nabla\cdot\vec{V}=G^{j}_{I}V^{I}_{\cdot,j}$$

式中 $\nabla\cdot\vec{V}$——矢量场$\vec{V}$的散度。

5. 矢量场$\vec{V}$的旋度

$$\nabla\times\vec{V}=G^{I}_{i}e^{ijk}\left|G_{mn}(X)\right|^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial(G_{kJ}V^{J})}{\partial x^{j}}\vec{e}_{I}$$

式中 $\nabla\times\vec{V}$——矢量场$\vec{V}$的旋度；

e^{ijk}——置换符号；

$|G_{mn}(X)|$——矩阵$[G_{mn}(X)]$的行列式。

6. 矢量场$\vec{W}$与矢量场梯度$\nabla\vec{V}$的内积

$$\vec{W}\cdot\nabla\vec{V}=W^{J}G^{j}_{J}V^{I}_{\cdot,j}\vec{e}_{I}$$

式中 $\vec{W}\cdot\nabla\vec{V}$——矢量场$\vec{W}$与矢量场梯度$\nabla\vec{V}$的内积。

7. 矢量$\vec{V}$的梯度的梯度

$$\nabla\nabla\vec{V}=V^{I}_{\cdot,j,\dot{k}}\vec{e}_{I}\vec{e}^{j}(X)\vec{e}^{k}(X)$$

式中 $\nabla\nabla\vec{V}$——矢量场$\vec{V}$的梯度的梯度。

$$V^{I}_{\cdot,j,\dot{k}}=\frac{\partial V^{I}_{\cdot,j}}{\partial x^{k}}+\begin{Bmatrix}I\\ J\quad k\end{Bmatrix}V^{J}_{\cdot,j}-\begin{Bmatrix}m\\ j\quad k\end{Bmatrix}V^{I}_{\cdot,\dot{m}}$$

8. 矢量场$\vec{V}$的拉普拉斯算子

$$\nabla^{2}\vec{V}=G^{jk}(X)V^{I}_{\cdot,j,\dot{k}}\vec{e}_{I}$$

式中 $\nabla^{2}\vec{V}$——矢量场$\vec{V}$的拉普拉斯算子。

二、流体力学的偏微分方程（第五章）