[美] C. H. PAPADIMITRIOU
K. STEIGLITZ 著
刘振宏 蔡茂诚 译

组合最优化算法和复杂性

COMDINATORIAL OPTIMIZATION AIGORITHMS AND COMPLEXITY

清华大学出版社

组合最优化

算法和复杂性

〔美〕C. H. Papadimitriou
K. Steiglitz 著

刘振宏 蔡茂诚 译

清华大学出版社

内 容 简 介

本书前七章介绍线性规划与对偶性理论；第八章介绍分析算法复杂性的技巧；第九至十二章描述关于流、匹配和支撑树的现代快速算法及其一般拟阵形式；第十三、十四章讨论整数规划；第十五、十六章讲述了其他书较少述及的 NP-完备性问题；最后三章介绍处理一些困难问题的实用方法。每章均有习题、注释及参考资料。

Combinatorial Optimization
Algorithms and Complexity
C.H.Papadimitriou K.Steiglitz
Prentice-Hall Inc.,1982

组 合 最 优 化
算法和复杂性
刘振宏 蔡茂诚 译

清华大学出版社出版
北京 清华园
北京昌平振南排版厂排版
河北保定科技印刷厂印装
新华书店北京发行所发行
☆
开本：787×1092 1/32 印张：$20\frac{1}{8}$ 字数：450千字
1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷
印数：00001—10000 定价：3.05元
ISBN 7-302-00230-4/TP·89(课)

前　　言

本书目的是把计算机科学家们在最近十五年内提出来的计算复杂性的重要概念，与运筹学工作者们发展起来的数学规划基础在一本书里一起介绍给读者。前七章是自封闭的，它包含线性规划与对偶性理论，而重点放在图和网络流的解释上。第八章是承前启后的一章，介绍分析算法复杂性的技巧。第九至第十二章描述关于流、匹配和支撑树的现代快速算法及其一般拟阵形式。第十三和十四两章讨论整数规划，包括Gomory的割平面算法。第十五和十六两章讲述NP-完备性及其分支的一些较新的概念。最后第十七至第十九三章描述处理一些困难问题的实用方法——近似算法、分支估界、动态规划以及局部（或邻域）搜索。

根据学生的基础知识不同，本书可以多种方式作为教材。例如，在普林斯顿大学具有算法理论基础知识的计算机科学专业的学生，在一学期的研究生课程里，讲授了1—10，13，14，18和19章。另一方面，具有运筹学基础知识的学生（在复习完1—7章后）可以从第八章开始，讲授完其余的所有内容。第八章包含了新的苏联人的椭球算法，我们可以指出，这个算法为本书提供了桥梁的作用。

我们这里自由地提了几个专题，我们感到对这几个专题的处理方法是新颖的：为了避免单纯形算法对无界多面体的麻烦，我们使用"盒形内"的可行集，而盒子的边界是由输入数据导出来的；用新的精巧的R.G.Bland算法以及后面的整

数规划中引进的字典序，就能解决有限性问题；线性规划的各个部分，我们对其基本的数学客体和运算都给予了几何说明。

读者也将发现，本书将重点不寻常地放到原始对偶算法上。利用它导出Dijkstra算法、Ford和 Fulkerson 最大流算法、所有的最小费用流算法以及赋权匹配算法。按照这种方式，用原始对偶思想把一般线性规划与它的组合应用联结起来，并且统一了组合问题的几个算法。

NP-完备性的理论阐述，尽可能不依赖于图灵机理论，并且NP问题类是利用‘合格’（Certificate）的概念定义的，因此避免了非确定性的概念。NP-完备性的许多证明，使用了新的更清楚的归结，并且在第十三章里，以Farkas引理的离散形式为基础，对于整数规划是在NP类里，给予了一个新的简单的证明。

最后一章综述了广泛用于难解问题的方法——局部搜索法的某些十分成功的运用。这儿我们绕了一个圈子，说明局部搜索是单纯形类型的算法。

一本书，比如这本书，当然很大一部分应归功于早期的工作者和著作者，我们不想全部而只想按时间顺序提一下十分重要的几本书：Ford 和 Fulkerson；Dantzig；Simonnard；T.C.Hu；Lawler；Aho，Hopcroft 和 Ullman；以及Garey和Johnson，我们的书在很多地方受到了他们的影响。

作者们还要感谢许多合作者和同事们，在写作过程中，他们提出许多好建议，他们是：B.D.Dickinson，R.Ginosar，K.Lieberherr，A.Mirzaian，W.P.Niedringhaus，J.Orlin，F.Sadri，S.Toueg，J.Valdes，M.Yannakakis及N.Zadeh。

最后，我们感谢L.Furman，G.Pecht,R.D'Arcangelo以及C.Cole，他们为完成我们的手稿做了大量的秘书工作。

Christos H.Papadimitriou
Kenneth Steiglitz

目　　录

前言……………………………………………………………………i
第一章　最优化问题 ……………………………………………………1
1.1　引言 ……………………………………………………………1
1.2　最优化问题 ……………………………………………………4
1.3　邻域 ……………………………………………………………8
1.4　局部最优与整体最优 …………………………………………10
1.5　凸集与凸函数 …………………………………………………12
1.6　凸规划问题 ……………………………………………………15
习题…………………………………………………………………17
注释与参考资料……………………………………………………20
附录：术语与符号 …………………………………………………21
A.1　线性代数 ………………………………………………………21
A.2　图论 ……………………………………………………………22
A.3　拟Algol语言……………………………………………………27

第二章　单纯形算法 ……………………………………………………30
2.1　线性规划问题的形式 …………………………………………30
2.2　基本可行解 ……………………………………………………33
2.3　线性规划的几何 ………………………………………………39
2.3.1　线性空间和仿射空间 ………………………………………39
2.3.2　有界凸多面体 ………………………………………………40
2.3.3　有界多面体与LP ……………………………………………43
2.4　基本可行解的替换 ……………………………………………49

2.5 单纯形表 ……53
2.6 进入基列的选择 ……55
2.7 旋转元的选择和Bland反循环算法……61
2.8 单纯形算法的初始基本可行解 ……68
2.9 旋转变换的几何说明 ……73
习题……79
注释与参考资料……82

第三章 对偶性……86
3.1 一般形式的线性规划的对偶 ……86
3.2 互补松弛性 ……91
3.3 Farkas引理 ……93
3.4 最短路问题及其对偶 ……95
3.5 单纯形表中对偶解的信息 …… 100
3.6 对偶单纯形算法 …… 102
3.7 对偶单纯形算法的解释 …… 104
习题…… 106
注释与参考资料…… 110

第四章 关于单纯形算法的计算讨论 …… 112
4.1 修正的单纯形算法 …… 112
4.2 修正的单纯形算法在计算上的意义 …… 114
4.3 最大流问题及用修正的单纯形方法求其解 …… 116
4.4 Dantzig-Wolfe的分解算法 …… 122
习题…… 129
注释与参考资料…… 131

章五章 原始-对偶算法…… 132
5.1 引言 …… 132

5.2　原始-对偶算法…………………………………………………… 133
5.3　原始-对偶算法的说明…………………………………………… 137
5.4　最短路问题的原始-对偶算法…………………………………… 138
5.5　关于方法思路的说明 …………………………………………… 143
5.6　最大流问题的原始-对偶算法…………………………………… 144
习题………………………………………………………………………… 146
注释与参考资料…………………………………………………………… 147

第六章　最大流和最短路的原始-对偶算法：Ford-Fulkerson算法和Dijkstra算法 ………………… 148
6.1　最大流最小截定理 ……………………………………………… 148
6.2　Ford和Fulkerson标号算法……………………………………… 152
6.3　标号算法的有限性问题 ………………………………………… 158
6.4　Dijkstra算法 …………………………………………………… 161
6.5　Floyd-Warshall算法 …………………………………………… 163
习题………………………………………………………………………… 167
注释与参考资料…………………………………………………………… 170

第七章　最小费用流的原始-对偶算法………………………… 172
7.1　最小费用流问题 ………………………………………………… 172
7.2　组合化容量—圈算法 …………………………………………… 173
7.3　组合化费用—迭加算法 ………………………………………… 177
7.4　Hitchcock问题的原始-对偶算法—$\alpha\beta$算法 ………… 179
7.5　最小费用流问题变换为Hitchcock问题……………………… 185
7.6　结束语 …………………………………………………………… 189
习题………………………………………………………………………… 190
注释与参考资料…………………………………………………………… 192

第八章　算法与复杂性…………………………………………… 198

8.1 可计算性 …………………………………………………… 198
8.2 时间界 …………………………………………………… 199
8.3 例子的规模 ……………………………………………… 202
8.4 算法分析 ………………………………………………… 206
8.5 多项式时间算法 ………………………………………… 207
8.6 单纯形算法不是多项式时间的算法 ……………………… 210
8.7 椭球算法 ………………………………………………… 216
8.7.1 LP, LI 和 LSI ……………………………………… 216
8.7.2 仿射变换与椭球 …………………………………… 221
8.7.3 算法 ………………………………………………… 223
8.7.4 算法的精度 ………………………………………… 230
习题……………………………………………………………… 235
注释与参考资料………………………………………………… 241

第九章 最大流问题的有效算法 ……………………………… 248
9.1 图的搜索 ………………………………………………… 248
9.2 标号算法的病症是什么 ………………………………… 254
9.3 网络标号与有向图的搜索 ……………………………… 258
9.4 一个$O(|V|^3)$的最大流算法…………………………… 263
9.5 具有单位容量的情况……………………………………… 269
习题……………………………………………………………… 272
注释与参考资料………………………………………………… 275

第十章 匹配算法 ……………………………………………… 279
10.1 匹配问题………………………………………………… 279
10.2 二部图的匹配算法……………………………………… 283
10.3 二部图匹配与网络流…………………………………… 287
10.4 非二部图的匹配：花…………………………………… 289
10.5 非二部图匹配：一个算法……………………………… 298

习题 …… 309
注释与参考资料 …… 313

第十一章　赋权匹配 …… 316
11.1　引言 …… 316
11.2　指派问题的匈牙利方法 …… 317
11.3　非二部图赋权匹配问题 …… 326
11.4　小结 …… 341
习题 …… 342
注释与参考资料 …… 346

第十二章　支撑树与拟阵 …… 348
12.1　最小支撑树问题 …… 348
12.2　最小支撑树问题的$O(|E|\log|V|)$算法 …… 352
12.3　Greedy算法 …… 356
12.4　拟阵 …… 358
12.5　两个拟阵的交 …… 369
12.6　拟阵交问题的某些推广 …… 381
12.6.1　赋权拟阵交 …… 381
12.6.2　拟阵对 …… 382
12.6.3　三个拟阵交 …… 383
习题 …… 385
注释与参考资料 …… 391

第十三章　整数线性规划 …… 395
13.1　引言 …… 395
13.2　全单位模性质 …… 406
13.3　ILP解的上界 …… 409
习题 …… 416

注释与参考资料…… 417

第十四章 整数线性规划的割平面算法…… 420
14.1 Gomory割…… 420
14.2 字典序…… 429
14.3 分数对偶算法的有限性…… 434
14.4 其它的割平面算法…… 436
习题…… 437
注释与参考资料…… 439

第十五章 *NP*-完备问题…… 441
15.1 引言…… 441
15.2 一个最优化问题的三种提法…… 442
15.3 *P*类与*NP*类…… 447
15.4 多项式时间的归结…… 452
15.5 Cook定理…… 454
15.6 几个*NP*-完备问题：团与货郎问题…… 461
15.7 另一些*NP*-完备问题：匹配、覆盖和划分…… 476
习题…… 483
注释与参考资料…… 488

第十六章 再论*NP*-完备性…… 493
16.1 *co-NP*类…… 493
16.2 拟多项式算法和"强"*NP*-完备性…… 497
16.3 *NP*-完备问题的特例和一般化…… 502
16.3.1 使用限制方法证明*NP*-完备性…… 503
16.3.2 *NP*-完备问题的容易特例…… 504
16.3.3 *NP*-完备问题的困难特例…… 506
16.4 一些有关的概念…… 509

16.4.1 多项式时间约化………………………… 509
16.4.2 NP困难问题 ………………………… 509
16.4.3 非确定的图灵机………………………… 511
16.4.4 多项式空间完备问题………………………… 513
16.5 结束语………………………… 514
习题………………………… 515
注释与参考资料………………………… 519

第十七章 近似算法 ………………………… 523
17.1 点覆盖的启发式方法：一个例子………………………… 523
17.2 货郎问题的近似算法………………………… 527
17.3 近似方法………………………… 539
17.4 一些否定的结果………………………… 549
习题………………………… 554
注释与参考资料………………………… 555

第十八章 分枝定界和动态规划………………………… 559
18.1 整数线性规划的分枝定界………………………… 559
18.2 一般意义下的分枝定界………………………… 564
18.3 优势关系………………………… 570
18.4 分枝定界策略………………………… 571
18.5 应用于流水作业车间时间表问题………………………… 573
18.6 动态规划………………………… 578
习题………………………… 581
注释与参考资料………………………… 583

第十九章 局部寻优法 ………………………… 586
19.1 引言………………………… 586
19.2 问题 1：货郎问题………………………… 587
19.3 问题 2：最小费用残存网络………………………… 589
19.4 问题 3：海底天然气管道系统拓朴结构………………………… 595

19.5 问题4：均匀图划分……………………………………… 599
19.6 局部寻优法的一些普遍性问题………………………… 604
19.7 局部寻优法的几何……………………………………… 608
19.8 一个大的极小精确邻域的例子………………………… 613
19.9 货郎问题的精确局部寻优法的复杂性………………… 616
习题…………………………………………………………… 621
注释与参考资料……………………………………………… 624

第一章

最优化问题

1.1 引言

在实际和理论上具有重要性的许多问题，都涉及到选取一个“最好”的构形，或者为了达到某个目标而选取一组参数。近几十年来，这样一些问题连同于求解它们的相应技术，已形成一个体系，这个体系就是一般的**非线性规划问题**：求满足下述条件的x*

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&g_i(x)\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\\&h_j(x)=0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\end{aligned}$$

其中f，g_i和h_j是参数$x\in R^n$的一般函数。解这样一些问题的方法，本质上几乎都是迭代的，并利用实分析数学研究其收敛性。

当f是凸的，g_i是凹的且h_j是线性时，我们就得到了所谓的**凸规划问题**。这个问题具有局部最优就是整体最优的非常方便的性质，也有最优性的充分条件，这就是Kuhn-Tucker条件。

再进一步，当f，g_i和h_j都是线性时，我们就得到了**线性**

* 关于术语和符号的说明，见本章末的附录。

规划问题。当把非线性规划限制到线性规划时，就出现了几个显著性的变化。首先，任何一个线性规划问题，都可简化为在有限个可行解的集合中挑选一个解，因此它就成为一个组合问题，而这些可行解的有限集是由线性约束所确定的凸多面体的顶点组成。

解线性规划问题的Dantzig的**单纯形算法**，在实际中已得到了广泛的应用。这个算法是基于从多面体的一个顶点移动到另一个顶点，同时使其费用得到改善，因此这个算法能在有限步内找出线性规划问题的最优解。经过三十年的提炼，已使得单纯形算法的各种形式变得十分有效——几百个变量和几千个约束的问题，都能编程序求解。但是也确有一些特殊构造出来的问题，对这些问题单纯形算法所需的步数是指数的。

苏联数学家在近期研究中，创造了解线性规划的椭球算法；这一算法保证了求出最优解所需步数随问题的大小按多项式增长——这一情况的出现，为本书提供了十分有益的素材。我们在写作期间，还不能断定椭球法是否能象单纯形算法一样进行提炼，使其能与单纯形算法相匹敌。上述提到的这些问题——一般非线性规划、凸规划和线性规划——之间的关系，表示在图1-1上。

解某些线性规划，如流和匹配问题等，可比解一般线性规划更有效。另一方面，这些问题与另外一些明显困难的问题紧密相关。例如，一个图中点对之间的最短路问题是在流和匹配问题类里，事实上它有一个$O(n^2)$的求解算法，其中n是图中的节点数。与此相比，**货郎问题**是找一条过每一个节点恰好一次的最短闭路，但它属于**NP-完备问题类**里，而这一类里任何一个问题，人们普遍地认为是多项式算法不可

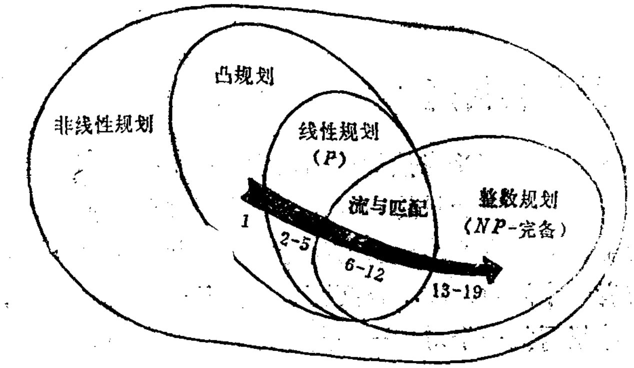

图 1-1　本书中问题的分类及章节的安排次序

解的。"很容易"和"很困难"问题之间的这条明显的界线在本书中反复出现，并且已自然地吸引了算法设计者的注意力。

从另一个角度看，流和匹配问题是**整数线性规划**的特殊情况。当我们讨论的线性规划是求具有整数坐标限制的最小费用解时，就出现了整数线性规划问题。与线性规划一样，求整数线性规划的解也有有限的算法。但是，一般整数线性规划是属于NP-完备的，而线性规划却有多项式算法。图1-1表示了这些问题之间的关系，以及本书所讲授内容的先后次序。

我们从凸规划的最基础和最容易接受的内容出发，认真讨论线性规划，研究单纯形算法，单纯形算法的几何说明，以及说明单纯形算法的对偶性含意。我们将重点讨论算法的图论解释，并由此自然地引导到流和匹配问题。接着比较容易地进入到对计算复杂性问题和椭球算法的讨论，以及对一些困难的组合优化问题的代表——某些NP-完备问题的研