北京大学教材

泛函分析讲义

上册

张恭庆　林源渠　编著

北京大学出版社

北京大学教材

泛函分析讲义

（上　册）

张恭庆　林源渠　编著

北京大学出版社

泛函分析讲义(上册)
张恭庆　林源渠　编著
责任编辑　徐信之
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　8.375印张　200千字
1987年3月第一版　1987年3月第一次印刷
印数：00001—13,000册
统一书号：13209·174　定价：1.70元

内 容 简 介

这是一本泛函分析教材。它系统地介绍线性泛函分析的基础知识。全书共分四章：度量空间；线性算子与线性泛函；广义函数与Соболев空间；以及紧算子与Fredholm算子。本书的主要特点是它侧重于分析若干基本概念和重要理论的来源和背景，强调培养读者运用泛函方法解决问题的能力，注意介绍泛函分析理论与数学其它分支的联系。书中包含丰富的例子与应用，对于掌握基础理论有很大帮助。

此书适用于理工科大学本科生与研究生阅读，并且可供一般的数学工作者、物理工作者、工程技术人员参考。

序

八十年代以来，许多高等院校都开设了泛函分析课程，而数学系的学生大都把泛函分析当作一门基础课来学．这种趋势反映了近几十年来数学的发展：泛函分析在分析学中已占据了重要的位置．

泛函分析是一门较新的数学分支．在它的发展中受到了数学物理方程和量子力学的推动，后来又整理、概括了经典分析和函数论的许多成果．由于它把具体的分析问题抽象到一种更加纯粹的代数、拓扑结构的形式中进行研究，因此逐步形成了种种综合运用代数、几何（包括拓扑）手段处理分析问题的新方法．正因为这种纯粹形式的代数、拓扑结构是根植于肥沃的经典分析和数学物理土壤之中的，所以，由此发展起来的基本概念、定理和方法也就显得更为广泛、更为深刻．现在，泛函分析已经成为一门内容丰富、方法系统、体系完整、应用广泛的独立分支．对于任何一个从事纯粹数学与应用数学研究的学者来说，它都是一门不可缺少的知识．

国内现已出版不少泛函分析教材．但其中有的或偏于专门，或过于简略，其共同缺陷是把这门联系广泛、丰富多彩的课程与经典分析及数学物理隔绝了起来．读者学完以后，有时只能欣赏其体系之抽象、论证之精巧，却难以体会到泛函方法的实质及威力．

本书是试图弥补这一缺陷而编写的一本教材．它力图向读者展示泛函分析中若干重要概念、理论的来源与背景；力图向读者介绍如何透过分析问题的具体内容洞察其内在的代数、几何实质；力图向读者表明泛函分析理论与数学的其它分支有着密切的联系，并有广泛的应用．

实现以上目的所作的变动是深入而细致的. 我们只能通过几个典型例子，来说明本书的一些特点.

为了使读者对于紧算子谱 (Riesz-Schauder) 理论的来龙去脉有一个比较全面的了解，我们是从线代数方程组可解性的讨论开始的. 对比积分方程，我们逐条把 Fredholm 结论"翻译"成相应的线性子空间的几何关系，又通过分析有穷维问题与无穷维问题之间在算子值域与谱集方面的异同，给出紧算子谱定理的证明. 然后直接把这一理论应用到椭圆型边值问题可解性及本征值问题的讨论中去. 此外，鉴于指标理论在现代数学发展中的重要性，我们以奇异积分算子为例，引出 Fredholm 算子，并导出相应的指标公式.

Hahn-Banach 定理是泛函分析中一个十分重要的基本定理. 它的重要性不仅表现在其对建立 Banach 空间理论体系所起的作用上，而且还表现在解决许多具体的分析问题之中. 然而 Hahn-Banach 定理的这些巧妙的应用，并不是读者在学了它的定理陈述与证明之后就能一目了然的. 事实上，往往需要把原始分析问题的陈述转化成几何形式. 只有从几何形式中把问题化归为凸集分离或足够多泛函的存在之后，应用 Hahn-Banach 定理才是可能的. 我们在教材中选择 Runge 逼近定理以及凸规划存在性定理等作为例子，逐步引导读者去考察这种转化，体会泛函方法解决经典问题的威力.

为了介绍泛函分析的应用，往往需要涉及其它数学分支的知识. 许多泛函教材，因受制于体系的自我封闭，致使应用部分不能充分展开. 然而，学科的相互渗透乃是当今数学发展的一个主要趋势. 因此，在教学中似乎不必过于拘谨. 在本书中，我们对于 Brouwer 不动点定理、单位分解定理等几个很容易从其它课程中学到的定理，不证明地加以引用，并给出参考文献. 去掉上述约束之后，介绍泛函分析应用的天地就广阔多了. 于是在本书中，我们把泛函分析的几个基本定理应用到常、偏微分方程理

论、实函数论、函数逼近论、数值分析、数学规划理论、变分不等方程等好几个数学分支中去；本书还有下册，在那里我们还将更深入地介绍泛函分析与其他数学分支，特别是与数学物理的联系。

本书是为本科生初学泛函而写的；而其下册可供研究生作为基础课教本。根据我们的经验，按每周3学时，每册基本内容可于一学期内讲授完毕。书中的应用与例子较多，教师可选讲其中一部分，其余部分则供有兴趣的读者参考。书中每节配有一定数量的习题，其中有些是某些定理的证明细节，有些是学过定理证法的模仿，还有一些本身就是有趣的结论或有用的反例。读者可根据自己的情况选作练习。

编者虽抱有弥补前述缺陷之目的，但因学识所限，加之初次尝试，谬误、片面之处一定不少。又因为体系变动较大，前后脱节、甚至证明疏漏之处在所难免。热诚欢迎读者批评指正。本书曾在北京大学试讲过若干次，北京大学数学系的许多师生曾提出过宝贵意见，兹不一一列举，在此一并致谢。

张恭庆　谨识

一九八六年夏于中关园

目　　录

第一章 度量空间

§1 压缩映象原理

度量空间又称距离空间(metric space),它是一种拓扑空间,其上的拓扑由指定的一个距离决定.

定义1.1.1 设$\mathscr{X}$是一个非空集. $\mathscr{X}$叫做距离空间,是指在$\mathscr{X}$上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$,满足下列三个条件:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)\quad(\forall x,y,z\in\mathscr{X})$.

这里 ρ 叫做$\mathscr{X}$上的一个距离;以 ρ 为距离的距离空间$\mathscr{X}$记做$(\mathscr{X},\rho)$.

注 距离概念是欧氏空间中两点间距离的抽象. 事实上,如果对$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 令

$$\rho(x,y)=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.1}$$

容易看到(1),(2),(3)都满足. 以后当说到欧氏空间时,我们始终用这个 ρ 规定其上的距离.

例1.1.2(空间 $C[a,b]$) 区间$[a,b]$上的连续函数全体记为$C[a,b]$, 按距离

$$\rho(x,y)\triangleq\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{1.1.2}$$

形成距离空间$(C[a,b],\rho)$, 以后简记作 $C[a,b]$. 以后当说到连续函数空间 $C[a,b]$时, 我们始终用(1.1.2)规定的 ρ 作为其上的距离, 除非另外说明.

引进距离的目的是刻划“收敛”。

定义1.1.3 距离空间$(\mathscr{X},\rho)$上的点列$\{x_n\}$叫做收敛到x_0的是指：$\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$。这时记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。或简单地记作$x_n\to x_0$。

注 在$C[a,b]$中点列$\{x_n\}$收敛到x_0是指：$\{x_n(t)\}$一致收敛到$x_0(t)$。

与实数集合一样，对于一般的度量空间可引进闭集和完备性等概念。

定义1.1.4 度量空间$(\mathscr{X},\rho)$中的一个子集E称为闭集，是指：$\forall\{x_n\}\subset E$，若$x_n\to x_0$，则$x_0\in E$。

定义1.1.5 距离空间$(\mathscr{X},\rho)$上的点列$\{x_n\}$叫做基本列，是指：$\rho(x_n,x_m)\to 0(n,m\to\infty)$。这也就是说：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，使得$m,n\geqslant N(\varepsilon)\Rightarrow\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$。如果空间中所有基本列都是收敛列，那末就称该空间是完备的。

例1.1.6 $(\mathbb{R}^n,\rho)$是完备的，其中ρ按(1.1.1)式定义。

例1.1.7 $(C[a,b],\rho)$是完备的。

证 设$\{x_n\}$是$(C[a,b],\rho)$中的一串基本列，那末$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，使得对$\forall m,n\geqslant N$有

$$\rho(x_m,x_n)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon.$$

因此，对$\forall t\in[a,b]$，

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon\qquad(\forall m,n\geqslant N(\varepsilon)).\qquad(1.1.3)$$

固定$t\in[a,b]$，我们看到数列$\{x_n(t)\}$是基本的，从而极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$存在。让我们用$x_0(t)$表示此极限，在(1.1.3)中令$m\to\infty$得到$|x_0(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon(\forall n\geqslant N(\varepsilon))$。由此可见$x_n(t)$一致收敛到$x_0(t)$，从而$x_0(t)$连续并在$C[a,b]$中$x_n$收敛到$x_0$。▎

给定距离空间$(\mathscr{X},\rho)$，$(\mathscr{Y},r)$，考察映射$T:\mathscr{X}\mapsto\mathscr{Y}$。

定义1.1.8 设$T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$是一个映射，称它是连

续的，如果对于$\mathscr{X}$中的任意点列$\{x_n\}$和点x_0，

$$\rho(x_n,x_0)\to 0\Rightarrow r(Tx_n,Tx_0)\to 0\qquad (n\to\infty).$$

命题1.1.9 为了$T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{Y},r)$是连续的，必须且只须$\forall\varepsilon>0$，$\forall x_0\in\mathscr{X}$，$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$，使得

$$\rho(x,x_0)<\delta\Rightarrow r(Tx,Tx_0)<\varepsilon\qquad(\forall x\in\mathscr{X}).\tag{1.1.4}$$

证 必要性. 若(1.1.4)不成立，必$\exists x_0\in\mathscr{X}$，$\exists\varepsilon>0$，使得$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists x_n$使得$\rho(x_n,x_0)<1/n$，但$r(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}r(Tx_n,Tx_0)\neq 0$，矛盾.

充分性. 设(1.1.4)成立，且$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$，那末$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\delta(x_0,\varepsilon))$，使得当$n>N$时，$\rho(x_n,x_0)<\delta$. 从而$r(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}r(Tx_n,Tx_0)=0$. ▌

设φ是$\mathbf{R}^1$上定义的实函数，求方程

$$\varphi(x)=0$$

的根的问题可以看成$\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$的映射

$$f(x)=x-\varphi(x)$$

的不动点问题. 即求$x\in\mathbf{R}^1$满足:

$$f(x)=x.$$

下列常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(t,x),\\ x(o)=\xi\end{cases}\tag{1.1.5}$$

或它的等价形式，即求连续函数$x(t)$满足下列积分方程的问题:

$$x(t)=\xi+\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau\ ,\tag{1.1.6}$$

也可以看成是一个不动点问题. 为此，在以$t=0$为中心的某区间$[-h,h]$上考察距离空间$C[-h,h]$，并引入映射

$$(Tx)(t)=\xi+\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau, \qquad (1.1.7)$$

则(1.1.6)等价于求 $C[-h,h]$上的一个点 x，使得 $x=Tx$，即求 T的不动点。

在距离空间上有一个很简单而基本的不动点定理——压缩映射原理。

定义1.1.10 称 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 是一个压缩映射，如果存在 $0<\alpha<1$，使得 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)\ (\forall\, x,y\in\mathscr{X})$。

例 设$\mathscr{X}=[0,1]$，$T(x)$是 $[0,1]$ 上的一个可微函数，满足条件：

$$T(x)\in[0,1] \qquad (\forall\, x\in[0,1]), \qquad (1.1.8)$$

以及

$$|T'(x)|\leqslant\alpha<1 \qquad (\forall\, x\in[0,1]), \qquad (1.1.9)$$

则映射 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是一个压缩映射。

证

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty)&=|T(x)-T(y)|\\&=|T'(\theta x+(1-\theta)y)(x-y)|\\&\leqslant\alpha|x-y|=\alpha\rho(x,y) \qquad (\forall\, x,y\in\mathscr{X},0<\theta<1).\ \blacksquare\end{aligned}$$

启发 设 $T:[0,1]\to[0,1]$ 可微且满足(1.1.8)及(1.1.9)，问T是否存在不动点？若存在有多少个？

直观与算法 $\forall\, x_0\in[0,1]$，作迭代序列 $x_{n+1}=Tx_n\ (n=0,1,2,\cdots)$，参看图1.1.1。因为

$$|x_{n+1}-x_n|=|Tx_n-Tx_{n-1}|\leqslant\alpha|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n|x_1-x_0|,$$

从而对$\forall\, P\in\mathbf{N}$，

$$|x_{n+P}-x_n|\leqslant\sum_{i=1}^{P}|x_{n+i}-x_{n+i-1}|\leqslant\sum_{i=1}^{P}\alpha^{n+i-1}|x_1-x_0|$$

$$<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^{n+i-1}|x_1-x_0|=\frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1-x_0|\to0$$

（当 $n\to\infty$，对$\forall\, P\in\mathbf{N}$ 一致）。因此，$\{x_n\}$ 是一个基本列从而有极限。从 $x_{n+1}=Tx_n$，两边取极限（因T连续）得

$$x^* = Tx^*.$$

即 x^* 为一不动点。这不动点还是唯一的。事实上，若 x^*, x^{**} 都是不动点，则

$$|x^* - x^{**}| = |Tx^* - Tx^{**}| \leqslant \alpha |x^* - x^{**}|.$$

由此推出

$$x^* = x^{**}.$$

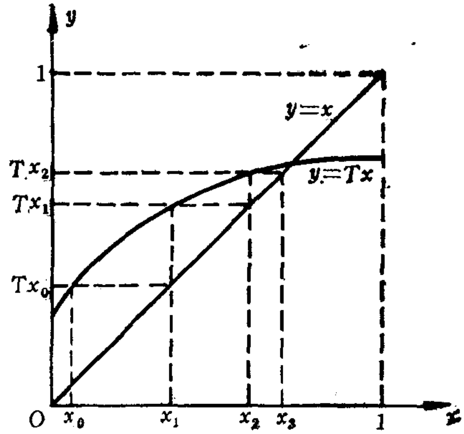

图 1.1.1

抽去上述过程中实数与绝对值的具体内容，不难把这个结论推广到一般的距离空间上去。若 $T:(\mathscr{X},\rho)\to(\mathscr{X},\rho)$ 是一个压缩映射，则仿照上述过程，任取初始点 $x_0\in\mathscr{X}$。考察迭代产生的序列

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

和前面一样，我们有

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Tx_n, Tx_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

从而对 $\forall P\in\mathbf{N}$，

$$\rho(x_{n+P}, x_n) \leqslant \sum_{i=1}^{P} \rho(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \to 0$$

（当 $n\to\infty$，对 $\forall P\in\mathbf{N}$ 一致）。由此可见 $\{x_n\}$ 是一个基本列。为了它有极限，还要假定 $(\mathscr{X},\rho)$ 是完备的。于是我们得到

定理1.1.11(Banach 不动点定理——压缩映象原理) 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是一个完备的距离空间，T 是 $(\mathscr{X},\rho)$ 到其自身的一个压缩映射，则 T 在 $\mathscr{X}$ 上存在唯一的不动点。

这个原理非常基本，它是泛函分析中的一个最常用、最简单的存在性定理。数学分析中的许多存在性定理是它的特殊情形。

例1.1.12 常微分方程的初值问题（1.1.5）的局部存在唯一性。

我们已经把这个问题化归为一个求不动点的问题了。先在 $C[-h,h]$ 上考察由(1.1.7)定义的映射 T，我们考察在 $F(t,x)$ 上添加什么条件可以使 T 成为一个压缩映射。注意到

$$\rho(Tx,Ty)=\max_{|t|\leqslant h}\left|\int_0^t F(\tau,x(\tau))d\tau-\int_0^t F(\tau,y(\tau))d\tau\right|$$
$$\leqslant h\max_{|t|\leqslant h}|F(t,x(t))-F(t,y(t))|,$$

因此，比如说只要假设二元函数 $F(t,x)$ 对变元 x 关于 t 一致地满足局部 Lipschitz 条件：$\exists\delta>0$，$L>0$，使得当 $|t|\leqslant h$，$|x_1-\xi|\leqslant\delta$，$|x_2-\xi|\leqslant\delta$ 时有

$$|F(t,x_1)-F(t,x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|, \tag{1.1.10}$$

这时就有 $\rho(Tx,Ty)\leqslant Lh\rho(x,y)\quad(\forall x,y\in\bar{B}(\xi,\delta))$，

其中 $\bar{B}(\xi,\delta)\triangleq\{x(t)\in C[-h,h]\mid\max\limits_{|t|\leqslant h}|x(t)-\xi|\leqslant\delta\}$.

在这里我们不能直接取 $C[-h,h]$ 为定理 1.1.10 中的距离空间 $\mathscr{X}$，因为当 $Lh<1$ 时，T 只是在 $C[-h,h]$ 的子集 $\bar{B}(\xi,\delta)$ 上才是压缩的。在这里我们把常数 ξ 看成是 $[-h,h]$ 上恒等于 ξ 的常值函数。

我们取 $\mathscr{X}=\bar{B}(\xi,\delta)$，为了要使 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，再设

$$M\triangleq\max\{|F(t,x)|\mid(t,x)\in[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]\},$$

取 $h>0$ 足够小，以使

$$\max|(Tx)(t)-\xi|=\max\left|\int_0^t F(t,x(\tau))d\tau\right|\leqslant Mh\leqslant\delta.$$

由于 $(C[-h,h],\rho)$ 是一个完备的距离空间，而 $\mathscr{X}$ 又是它的一个闭子集，因此 $(\mathscr{X},\rho)$ 还是一个完备的距离空间（习题1.1.1）。于是我们得到了

定理1.1.13 设函数 $F(t,x)$ 在 $[-h,h]\times[\xi-\delta,\xi+\delta]$ 上定

义并满足条件(1.1.10)，则当$h<\min\{\delta/M, 1/L\}$时，初值问题(1.1.5)在$[-h,h]$上存在唯一解.

例1.1.14(隐函数存在定理) 设$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，$U\times V\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$是$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$的一个邻域. 设$f$在$U\times V$内连续并且$\forall x\in U$，关于$y\in V$连续可微. 又设

$$f(x_0,y_0)=0;\qquad \left[\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right](x_0,y_0)\neq 0,$$

则$\exists x_0$的一个邻域$U_0\subset U$以及唯一的连续函数$\varphi:U_0\to\mathbb{R}^m$，满足

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x))=0 & (\text{当}x\in U_0),\\ \varphi(x_0)=y_0. \end{cases}$$

证 考察映射$T:\varphi\mapsto T\varphi$,

$$(T\varphi)(x)\triangleq\varphi(x)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}f(x,\varphi(x)),$$

其中$\varphi\in C(\bar{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)$，这里$r>0$，$C(\bar{B}(x_0,r),\mathbb{R}^m)$表示定义在闭球$\bar{B}(x_0,r)$上取值在$\mathbb{R}^m$上的向量值连续函数空间，其距离规定为

$$\rho(\varphi,\psi)\triangleq\max_{\substack{x\in\bar{B}(x_0,r)\\ 1\leqslant i\leqslant m}}|\varphi_i(x)-\psi_i(x)|,$$

其中$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$；$\psi=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$. 对$x\in\mathbb{R}^n$与$y_i\in\mathbb{R}^m(i=1,2,\cdots,m)$，记

$$D_yf(x,y_1,\cdots,y_m)\triangleq\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y_1) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(x,y_1)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(x,y_m) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(x,y_m)\end{pmatrix}.$$

因为假设$\partial f/\partial y$在$U\times V$上连续，所以$\exists\delta>0$，使得

$$\left|\delta_{ij}-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}D_yf(x,y_1,\cdots,y_m)\right]_{ij}\right|<\frac{1}{2m}$$