现代数学基础丛书

数理逻辑基础

下册

胡世华 陆钟万 著

科学出版社

现代数学基础丛书

数理逻辑基础

下册

胡世华 陆钟万 著

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书陈述数理逻辑的基础知识，包括逻辑演算的基本内容．这些内容构成数理逻辑各个分支（模型论、证明论和构造性数学、递归论、集合论）的共同的基础．

本书共六部分，分上、下两册．下册包括第三、四、五章和两个附录．第三章陈述逻辑演算的重言式系统，并研究自然推理系统和重言式系统的关系．第四章研究逻辑演算的可靠性和完备性问题．第五章讨论了逻辑演算如何应用于陈述具体的数学理论，并且研究了在数学中引进定义的形式化问题．附录（一）陈述带量词的命题逻辑；附录（二）定义了斜形证明，并且证明了形式证明与斜形证明的等价关系．

本书可以用作数学专业和其他专业数理逻辑课程的教材或教学参考书，或供有关工作人员参考，使用时可根据具体情况删减内容．使用本书时一般要求读者具有相当于大学高年级程度的数学训练．

现代数学基础丛书

数理逻辑基础

下　册

胡世华　陆钟万　著

责任编辑　杨贤英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1982年8月第一版　开本：850×1168　1/32

1982年8月第一次印刷　印张：6 5/8

印数：0001—12,100　字数：173,000

统一书号：13031·1948

本社书号：2648·13—1

定价：1.10元

《现代数学基础丛书》编委会

目　　录

第三章 重 言 式

我们在第一章中构造了逻辑演算的自然推理系统．逻辑演算的自然推理系统是处理一般的形式推理关系 $\Gamma \vdash A$ 的．重言式是可以从任何的形式前提推出，也就是可以从空的形式前提推出的合式公式．这是一类特殊的有重要意义的合式公式．由于在逻辑演算中有

$$A_1, \cdots, A_n \vdash A \iff \vdash A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A$$

所以，从技术上讲，一般的形式推理关系都可以在重言式中得到反映．在这个意义下，可以说，在逻辑演算中只要研究重言式，也就是研究重言式的推理关系就够了．

重言式可以用以下的方法处理，就是列出一些重言式作为形式公理，并给出一些形式推理规则，由它们能生成重言式的全体，并且所能生成的合式公式又都是重言式．这样构造的逻辑演算称为逻辑演算的**重言式系统**[1]．在数理逻辑的历史发展中，首先构造起来的是逻辑演算的重言式系统，在其中通过重言式来处理形式推理关系．

重言式系统中的形式公理并不直接揭示出演绎推理的规则，它们的涵义并不都是直观而明显的．在重言式系统中证明形式定理、刻划演绎推理，是不直观、不自然的．因此，在数理逻辑的发展中，出现了一些较为直接地反映演绎推理的逻辑演算．厄尔勃朗[2] 1928 证明的演绎定理就是比较直接地反映演绎推理的．以后在

---

1) 例如可以参考怀德海与罗素 1910—1913；希尔伯特 (D. Hilbert) 与阿克曼 (W. Ackermann) 1928, 1938；希尔伯特与贝尔奈斯 (P. Bernays) 1934, 1939；克利尼 1952；丘奇 (A. Church) 1956 等．

2) J. Herbrand.

雅思柯夫斯基[1] 1934和根岑1934等著作中，也反映了这种趋势．又例如在克利尼1952中所构造的谓词逻辑系统，虽然仍然是重言式系统，但在其中定义了直接反映演绎推理的形式推理，这也反映了上面所说的趋势．因此，在本书中主要是构造了逻辑演算的自然推理系统．

在本章中，我们将陈述命题逻辑和谓词逻辑的重言式系统，介绍在数理逻辑的发展中积累起来的这方面的一部分内容（§30—§33)，其中的基本部分(例如§30中的系统 **[P]** 以及与 **[P]** 等价的若干系统如 $[\mathbf{P}]_0$，$[\mathbf{P}]_1$，$[\mathbf{P}]_2$ 和习题30.6中的 $[\mathbf{P}]_5$ 等，§31中的 **[P*]**，以及§33中的 **[F*]** 等)，对于数理逻辑的专业工作者来说，是应当了解的；其余的内容可以作为参考材料．本章中的练习可以适当做一部分，以获得大致的了解．本章的最后一节阐述了重言式系统与自然推理系统之间的关系．

逻辑演算的自然推理系统都有相应的重言式系统．例如 **P** 和 $\mathbf{F}^{\mathrm{I}}$，我们令 **[P]** 和 $[\mathbf{F}^{\mathrm{I}}]$ 分别是 **P** 和 $\mathbf{F}^{\mathrm{I}}$ 的重言式系统．

§30 P的重言式系统

从本节起，我们要构造一系列的逻辑演算重言式系统，包括古典的和非古典的系统．

我们先来构造命题逻辑 **P** 的重言式系统 **[P]**，和一些与之等价的系统．**[P]** 是这样一个系统，在其中能够推导出 **P** 中的全部重言式，并且也只能推导出 **P** 的重言式．在本节中还要构造 **P** 的非古典系统 $\mathbf{P}_{\mathrm{H}}$ 和 $\mathbf{P}_{\mathrm{M}}$ 的重言式系统 $[\mathbf{P}_{\mathrm{H}}]$ 和 $[\mathbf{P}_{\mathrm{M}}]$，和一些同它们等价的系统．

我们先来构造 **[P]**．**[P]** 的符号和形成规则都与 **P** 的相同．我们曾作过的关于省略括号和使用点号，以及其它关于符号的各种约定，也都适用于 **[P]**．

---

1) S. Jáskowski.

[P] 有六个形式公理模式 $(\rightarrow_1)$, $(\rightarrow_2)$, $(\rightarrow_0)$, (M), (H), (C)[1] 和一个形式推理规则模式 $[\rightarrow]$:

$(\rightarrow_1)$ $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$(\rightarrow_2)$ $A \rightarrow (A \rightarrow B) \centerdot \rightarrow \centerdot A \rightarrow B$

$(\rightarrow_0)$ $A \rightarrow B \centerdot \rightarrow \centerdot (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

(M) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

(H) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

(C) $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow B \centerdot \rightarrow \centerdot (A \rightarrow B) \rightarrow B$

$[\rightarrow]$ 由 $A \rightarrow B$ 和 A 推出 B

其中 A, B, C 是任意的合式公式.

一合式公式是形式公理,当且仅当,它具有形式公理模式的形式.

例 1 下面的 [1]—[11]:

[1] $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

[2] $p \rightarrow (p \rightarrow p)$

[3] $p \rightarrow \neg(q \rightarrow r) \centerdot \rightarrow : p \rightarrow \neg q \centerdot \rightarrow \centerdot p \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$

[4] $p \rightarrow (p \rightarrow p) \centerdot \rightarrow \centerdot p \rightarrow p$

[5] $q \rightarrow : q \rightarrow \centerdot q \rightarrow (q \rightarrow q) .: \rightarrow : q \rightarrow \centerdot q \rightarrow (q \rightarrow q)$

[6] $p \rightarrow (q \rightarrow r) \centerdot \rightarrow : (q \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p) \centerdot$
$\rightarrow \centerdot p \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$

[7] $p \rightarrow (p \rightarrow q) \centerdot \rightarrow q : \rightarrow :. q \rightarrow \centerdot (p \rightarrow q)$
$\rightarrow p : \rightarrow : p \rightarrow (p \rightarrow q) \centerdot \rightarrow \centerdot (p \rightarrow q) \rightarrow p$

[8] $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow r) \centerdot \rightarrow \centerdot (q \rightarrow r) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$

[9] $p \rightarrow q \centerdot \rightarrow : \neg \centerdot (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) .: \rightarrow :$
$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \centerdot \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$

---

1) 在第一章中已解释过,"M"是拉丁字"minimus"(极小)的第一个字母,"H"是"Heyting"(海丁)的第一个字母. 这里的"C"则是拉丁字"classicus"(古典)的第一个字母.

§32 中将说明: [P] 是古典的重言式系统,[P]中有公理模式(C);在 [P] 中去掉 (C),就得到海丁非古典系统 P_H 的重言式系统$[P_H]$, $[P_H]$ 中有公理模式 (H); 在 $[P_H]$ 中去掉 (H), 就得到极小系统 P_M 的重言式系统 $[P_M]$.

[10] $\neg(p \to q) \to : p \to q \cdot \to \cdot (p \to q) \to r$

[11] $(p \to q) \to \neg(p \to q) \cdot \to \cdot p \to (q \to r) : \to : \cdot$
$p \to q \cdot \to \cdot p \to (q \to r) : \to \cdot p \to (q \to r)$

都是 P 中的形式公理，其中 [1]—[3] 都有 ($\to_1$) 的形式，[4] 和 [5] 都有 ($\to_2$) 的形式，[6] 和 [7] 都有 ($\to_0$) 的形式，[8] 和 [9] 都有 (M) 的形式，[10] 有 (H) 的形式，[11] 有 (C) 的形式．又如

[12] $A \to (A \to A)$

[13] $A \to B \cdot \to \cdot (B \to A) \to (A \to B)$

[14] $(A \to B) \to \cdot (A \to B) \to \neg C : \to \cdot (A \to B) \to \neg C$

[15] $A \to (B \to C) \cdot \to : (B \to C)$
$\to \neg(C \to A) \cdot \to \cdot A \to \neg(C \to A)$

[16] $A \to \neg(B \to C) \cdot \to \cdot (B \to C) \to \neg A$

[17] $\neg\neg(A \to B) \to \cdot \neg(A \to B) \to (A \to B)$

[18] $(\neg A \to \neg\neg A) \to \neg A \cdot \to \cdot (\neg A \to \neg A) \to \neg A$

其中的 [12] 和 [13] 都是形式公理，它们都有 ($\to_1$) 的形式．但 [12] 和 [13] 是模式，它们又都是模式($\to_1$)的特殊形式。类似地，[14]—[18] 也都是形式公理，并且都是模式，它们分别有 ($\to_2$)，($\to_0$)，(M)，(H)，(C) 的形式．

[→] 就是假言推理规则，它相当于自然推理系统中的蕴涵词消去律．

定义30.1(形式定理)　A 是 [P] 的**形式定理**，记作

$$[P]: \vdash A \quad 或 \quad \vdash A$$

当且仅当，A 能由 [P] 的形式公理和形式推理规则生成，即 A 是 [P] 的形式公理或是由已生成的形式定理经应用[→]而得．

在生成形式定理 A 的过程中，我们得到一系列的形式定理 $A_1, \cdots, A_n$，其中每个 $A_i(i = 1, \cdots, n)$ 是形式公理或是由在它之前已生成的形式定理经应用[→]而得，并且 A_n 就是 A．这个序列称为 A 的**形式证明**．

"形式公理"，"形式推理规则"，"形式定理"等名词中的"形式"二字可以省略．

我们可以把[P]的公理模式写成以下的形式:

$(\to_1)$ $\vdash A \to (B \to A)$

$(\to_2)$ $\vdash A \to (A \to B) \cdot \to \cdot A \to B$

$(\to_0)$ $\vdash A \to B \cdot \to \cdot (B \to C) \to (A \to C)$

(M) $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

(H) $\vdash \neg A \to \cdot (A \to B)$

(C) $\vdash (A \to \neg A) \to B \cdot \to \cdot (A \to B) \to B$

对于其他的重言式系统，我们也像定义 30.1 那样，定义其中的形式定理和形式证明，并把公理模式写成上面的形式.

重言式系统与自然推理系统中的形式证明的区别在于，前者是合式公式的序列，所证明的形式定理是合式公式，后者是形式推理关系的序列，所证明的形式定理是形式推理关系.

定理 30.1 [P]:

[1] $\vdash A \to A$ (同一律)

[2] $\vdash (A \to B) \to C \cdot \to \cdot B \to C$

[3] $\vdash A \to \cdot (A \to B) \to (C \to B)$

[4] $\vdash A \to \cdot (A \to B) \to B$

[5] $\vdash (A \to B) \to B \cdot \to C : \to \cdot A \to C$

[6] $\vdash A \to (B \to C) \cdot \to \cdot B \to (A \to C)$

[7] $\vdash B \to C \cdot \to \cdot (A \to B) \to (A \to C)$

[8] $\vdash A \to B \cdot \to \cdot A \to (A \to C) :$

$\to \cdot (A \to B) \to (A \to C)$

[9] $\vdash B \to (A \to C) \cdot \to \cdot (A \to B) \to (A \to C)$

[10]* $\vdash A \to (B \to C) \cdot \to \cdot (A \to B) \to (A \to C)$

[11] $\vdash A \to (B \to C) \cdot \to : A \to \cdot (C \to D) \to (B \to D)$

[12] $\vdash A \to (B \to C) \cdot \to : C \to D \cdot \to \cdot A \to (B \to D)$

[21] $\vdash \neg A \to \cdot A \to \neg(B \to B)$

[22] $\vdash B \to \cdot (A \to \neg B) \to \neg A$

[23] $\vdash A \to \neg(B \to B) \cdot \to \neg A$

[24] $\vdash A \rightarrow \neg B \cdot \rightarrow : A \rightarrow \cdot B \rightarrow \neg(B \rightarrow B)$

[25] $\vdash A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot A \rightarrow \neg(B \rightarrow B) : \rightarrow \cdot (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$

[26] $\vdash A \rightarrow \cdot B \rightarrow \neg(B \rightarrow B) : \rightarrow \cdot (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$

[27] $\vdash A \rightarrow \neg B \cdot \rightarrow \cdot (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$

[28]* $\vdash A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

[29] $\vdash A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot \neg B \rightarrow \neg A$

[30] $\vdash \neg(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg A$

[31] $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$

[32] $\vdash \neg A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot (A \rightarrow \neg A) \rightarrow B$

[33] $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow B \cdot \rightarrow B : \rightarrow \cdot (\neg A \rightarrow B) \rightarrow B$

[34] $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

[35] $\vdash A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$

[41] $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

[42] $\vdash \neg(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$

[43] $\vdash \neg\neg(\neg\neg A \rightarrow A)$

[51] $\vdash A \rightarrow B \cdot \rightarrow : (A \rightarrow \neg A) \rightarrow B \cdot \rightarrow B$

[52] $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow A \cdot \rightarrow A$

[53] $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

[54] $\vdash \neg A \rightarrow \neg B \cdot \rightarrow \cdot B \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$

[55]* $\vdash \neg A \rightarrow \neg B \cdot \rightarrow \cdot B \rightarrow A$

[56] $\vdash \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$

[57] $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

[58]* $\vdash \neg A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$

定理还进一步要求：证明[1]—[12]时只用$(\rightarrow_1)$,$(\rightarrow_2)$,$(\rightarrow_0)$和[→];证明[21]—[35]时只用$(\rightarrow_1)$,$(\rightarrow_2)$,$(\rightarrow_0)$,(M)和[→];证明[41]—[43]时只用$(\rightarrow_1)$,$(\rightarrow_2)$,$(\rightarrow_0)$,(M),(H)和[→].

我们下面的证明是按照定理中的各点要求作出的．读者可以进一步研究，如果不考虑这些要求，那么有些证明还可以简化，例

如，若使用(H)，则[21]可以直接由(H)得到证明，因为[21]就是属于(H)这个模式的.

定理 30.1 中的形式定理都是定理的模式.

我们在下面比较详细地写出证明，并随着证明的进行对于证明的写法和一些有关的问题有所说明.

证[1]

(1) $A \to (A \to A). \to .A \to A$ $(\to_2)$

(2) $A \to (A \to A)$ $(\to_1)$

(3) $A \to A$ (1)(2)[→]

上面的(1)—(3)是[1]的证明，是证明的模式. 证明中每一步的右方写了根据，意思是清楚的.

证[2]

(1) $B \to (A \to B). \to :(A \to B) \to C. \to .B \to C$ $(\to_0)$

(2) $B \to (A \to B)$ $(\to_1)$

(3) $(A \to B) \to C. \to .B \to C$ (1)(2)[→]

显然，如果公式序列中每个公式或者是[P]的公理，或者是[P]中已经证明的定理，或者是由序列中在它左方的公式经应用[→]而得，那么这个序列是可以扩充成为形式证明的. 我们给出下面[3]和[4]的形式证明时，所写的就是这样的序列.

证[3]

(1) $C \to A. \to .(A \to B) \to (C \to B): \to :A$
$\to .(A \to B) \to (C \to B)$ [2]

(2) $C \to A. \to .(A \to B) \to (C \to B)$ $(\to_0)$

(3) $A \to .(A \to B) \to (C \to B)$ (1)(2)[→]

证[4]

(1) $A \to :A \to B. \to .(A \to B) \to B.: \to ::$
$A \to B. \to .(A \to B) \to B: \to .(A \to B) \to B.: \to :$
$A \to .(A \to B) \to B$ $(\to_0)$

(2) $A \to :A \to B. \to .(A \to B) \to B$ [3]

(3) $A \to B. \to .(A \to B) \to B: \to .(A \to B) \to B.: \to :$

$A \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B$ (1)(2)[→]

(4) $A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B : \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B$ [3]

(5) $A \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B$ (3)(4)[→]

上面 [4] 的证明写法是很繁琐的，因为 (2)—(5) 都是 (1) 的子公式，写起来重复很多．其实，上面 [1]—[3] 的证明写法也是繁琐的，不过步骤较少，显得重复不多．我们可以采用下面的简明写法来写出 [4] 的证明：

(1) $A \rightarrow : A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B$ [3]

(2) $A \rightarrow B \cdot \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B : \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B$ [3]

(3) $A \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B$ $(\rightarrow_0)$(1)(2)[→]

这样写法中 (3) 的右方写了根据"$(\rightarrow_0)$(1)(2)[→]"，它的意思是说，先由一个有 $(\rightarrow_0)$ 形式的合式公式和 (1) 经应用[→]得到另一个合式公式，再由这另一个合式公式和 (2) 经应用 [→] 得到 (3)．在这里，所用到的那个有 $(\rightarrow_0)$ 形式的合式公式，是要由它和 (1) 应用[→]的，故 (1) 必定是它的部分．同样的道理，由它和 (1) 得到的合式公式必定包含 (2) 作为部分．因此，它实际上是 (1)→·(2)→(3)，由它和 (1) 经应用 [→] 得到的当然是 (2)→(3)，然后由 (2)→(3) 经应用 [→] 得到 (3)，也就是 [4]．

按照这种写法，[3] 的证明可以写成下面的形式：

(1) $C \rightarrow A \cdot \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)$ $(\rightarrow_0)$

(2) $A \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)$ [2](1)[→]

注意，其中的 [2] 是指一个有 [2] 形式的合式公式，在这里它实际上是 (1)→(2)．于是，(2) 的右方所写的根据"[2](1)[→]"是说由 [2] 和 (1) 经应用[→]得到 (2)．以后我们就采用这种写法来写形式证明．

证 [5]

(1) $A \rightarrow \cdot(A \rightarrow B) \rightarrow B$ [4]

(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow B \cdot \rightarrow C : \rightarrow \cdot A \rightarrow C$ $(\rightarrow_0)$(1)[→]

证 [6]

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \cdot \rightarrow : (B \rightarrow C) \rightarrow C \cdot \rightarrow \cdot A \rightarrow C$ $(\rightarrow_0)$

(2) $(B\to C)\to C\cdot\to\cdot A\to C:\to\cdot B\to(A\to C)$ [5]

(3) $A\to(B\to C)\cdot\to\cdot B\to(A\to C)$ $(\to_0)(1)(2)[\to]$

证[7]

(1) $A\to B\cdot\to\cdot(B\to C)\to(A\to C)$ $(\to_0)$

(2) $B\to C\cdot\to\cdot(A\to B)\to(A\to C)$ [6](1)$[\to]$

证[8]

(1) $A\to(A\to C)\cdot\to\cdot A\to C$ $(\to_2)$

(2) $A\to B\cdot\to\cdot A\to(A\to C):$
$\to\cdot(A\to B)\to(A\to C)$ [7](1)$[\to]$

证[9]

(1) $B\to(A\to C)\cdot\to:A\to B\cdot\to\cdot A\to(A\to C)$ [7]

(2) $A\to B\cdot\to\cdot A\to(A\to C):$
$\to\cdot(A\to B)\to(A\to C)$ [8]

(3) $B\to(A\to C)\cdot\to\cdot(A\to B)$
$\to(A\to C)$ $(\to_0)(1)(2)[\to]$

证[10]

(1) $A\to(B\to C)\cdot\to\cdot B\to(A\to C)$ [6]

(2) $B\to(A\to C)\cdot\to\cdot(A\to B)\to(A\to C)$ [9]

(3) $A\to(B\to C)\cdot\to\cdot(A\to B)$
$\to(A\to C)$ $(\to_0)(1)(2)[\to]$

证[11]

(1) $B\to C\cdot\to\cdot(C\to D)\to(B\to D)$ $(\to_0)$

(2) $A\to(B\to C)\cdot\to:A\to\cdot(C\to D)$
$\to(B\to D)$ [7](1)$[\to]$

证[12]

(1) $A\to(B\to C)\cdot\to:A\to\cdot(C\to D)\to(B\to D)$ [11]

(2) $A\to\cdot(C\to D)\to(B\to D):\to:C$
$\to D\cdot\to\cdot A\to(B\to D)$ [6]

(3) $A\to(B\to C)\cdot\to:C\to D\cdot\to\cdot A$
$\to(B\to D)$ $(\to_0)(1)(2)[\to]$

证[21]

(1) $(B \to B) \to \neg A \cdot \to \cdot A \to \neg(B \to B)$ (M)

(2) $\neg A \to \cdot A \to \neg(B \to B)$ [2](1)$[\to]$

证[22]

(1) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ (M)

(2) $B \to \cdot (A \to \neg B) \to \neg A$ [6](1)$[\to]$

证[23]

(1) $B \to B$ [1]

(2) $A \to \neg(B \to B) \cdot \to \neg A$ [22](1)$[\to]$

证[24]

(1) $\neg B \to \cdot B \to \neg(B \to B)$ [21]

(2) $A \to \neg B \cdot \to : A \to \cdot B \to \neg(B \to B)$ [7](1)$[\to]$

证[25]

(1) $A \to \neg(B \to B) \cdot \to \neg A$ [23]

(2) $A \to B \cdot \to \cdot A \to \neg(B \to B) :$
$\to \cdot (A \to B) \to \neg A$ [7](1)$[\to]$

证[26]

(1) $A \to \cdot B \to \neg(B \to B) : \to : A \to B \cdot$
$\to \cdot A \to \neg(B \to B)$ [10]

(2) $A \to B \cdot \to \cdot A \to \neg(B \to B) :$
$\to \cdot (A \to B) \to \neg A$ [25]

(3) $A \to \cdot B \to \neg(B \to B) :$
$\to \cdot (A \to B) \to \neg A$ $(\to_0)$(1)(2)$[\to]$

证[27]

(1) $A \to \neg B \cdot \to : A \to \cdot B \to \neg(B \to B)$ [24]

(2) $A \to \cdot B \to \neg(B \to B) : \to \cdot (A \to B) \to \neg A$ [26]

(3) $A \to \neg B \cdot \to \cdot (A \to B) \to \neg A$ $(\to_0)$(1)(2)$[\to]$

证[28]

(1) $A \to \neg B \cdot \to \cdot (A \to B) \to \neg A$ [27]

(2) $A \to B \cdot \to \cdot (A \to \neg B) \to \neg A$ [6](1)$[\to]$

证 [29]

(1) $A \to B \cdot \to \cdot (A \to \neg B) \to \neg A$ [28]

(2) $(A \to \neg B) \to \neg A \cdot \to \cdot \neg B \to \neg A$ [2]

(3) $A \to B \cdot \to \cdot \neg B \to \neg A$ $(\to_0)(1)(2)[\to]$

证 [30]

(1) $A \to (\neg\neg A \to A)$ $(\to_1)$

(2) $\neg(\neg\neg A \to A) \to \neg A$ [29](1)$[\to]$

证 [31]

(1) $A \to A$ [1]

(2) $(A \to \neg A) \to \neg A$ [28](1)$[\to]$

证 [32]

(1) $(A \to \neg A) \to \neg A$ [31]

(2) $\neg A \to B \cdot \to \cdot (A \to \neg A) \to B$ $(\to_0)(1)[\to]$

证 [33]

(1) $\neg A \to B \cdot \to \cdot (A \to \neg A) \to B$ [32]

(2) $(A \to \neg A) \to B \cdot \to B :$

$\to \cdot (\neg A \to B) \to B$ $(\to_0)(1)[\to]$

证 [34]

(1) $\neg A \to \neg A$ [1]

(2) $A \to \neg\neg A$ (M)(1)$[\to]$

证 [35]

(1) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ [29]

(2) $(\neg B \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ [29]

(3) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ $(\to_0)(1)(2)[\to]$

证 [41]

(1) $\neg A \to (A \to B)$ (H)

(2) $A \to (\neg A \to B)$ [6](1)$[\to]$

证 [42]

(1) $\neg A \to (\neg\neg A \to A)$ [41]

(2) $\neg(\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$ [29](1)$[\to]$