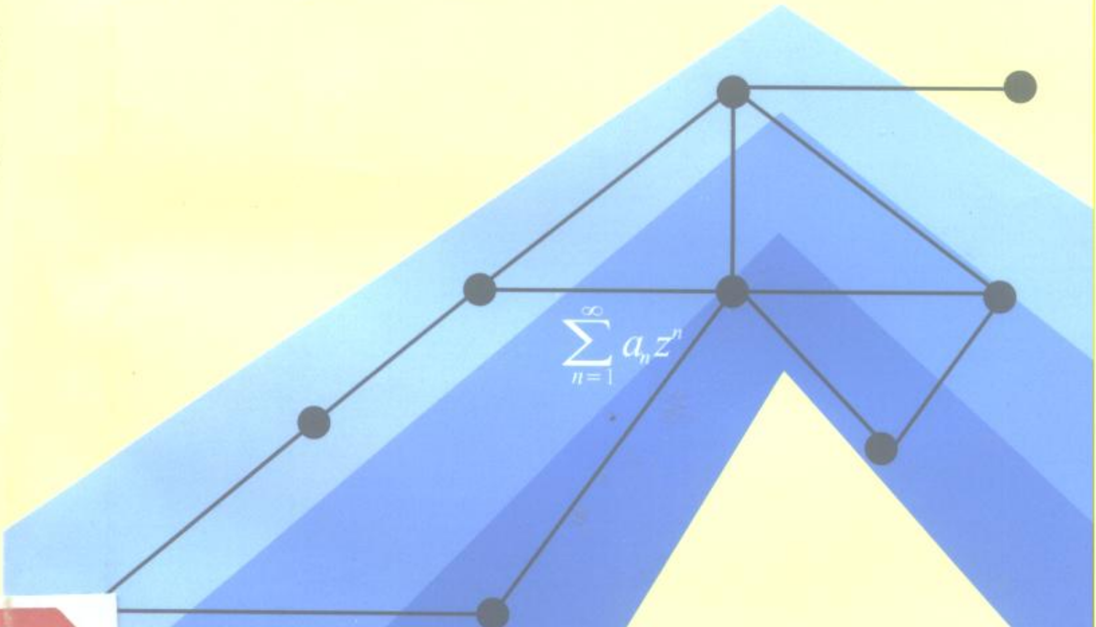
狄里克莱级数与随机狄里克莱级数

余家荣 著



科学出版社

狄里克莱级数与随机狄里克莱级数

余家荣 著

科学出版社
1997

内 容 简 介

本书讲述狄里克莱及随机狄里克莱级数的函数性质，以及渐近狄里克莱级数及其应用. 主要内容包括：狄里克莱级数的收敛性，系数估计，奇异点，增长性与值的分布，随机狄里克莱级数的相应性质. 渐近狄里克莱级数的系数估计及对一些分析问题的应用.

本书可作为高校有关专业的大学生，研究生的教材或参考书. 也可供数学工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

狄里克莱级数与随机狄里克莱级数/余家荣著. —北京：科学出版社，1997

ISBN 7-03-005933-6

Ⅰ. 狄… Ⅱ. 余… Ⅲ. ①狄里克莱级数②随机-狄里克莱级数 Ⅳ. O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 02612 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1997 年 9 月第一次印刷 印张：5 3/4
印数：1—2 000 字数：146 000

定价：13.00 元

序

狄里克莱级数是在 19 世纪中 L. 狄里克莱研究数论时引进的. 它可看作是泰勒级数的推广，也是拉普拉斯-斯蒂尔杰斯变换的一个特例. 对于狄里克莱级数的研究，一方面是为了解决数论中提出的问题，一方面是为了了解这种级数本身的分析性质. 在 20 世纪，这两方面的研究都有极大的进展. 本书只讲述狄里克莱级数与随机狄里克莱级数本身的一些性质，以及渐近狄里克莱级数与其对一些分析问题的应用.

在狄里克莱级数的分析性质方面，对于级数的可和性及奇异点，曾经有过大量的研究工作. 本书在阐明了级数的收敛性后，从级数系数的种种估计出发，着重研究级数的增长性及值的分布. 至于级数的可和性及奇异点，只是在第三章第 4 和第 1 节中涉及到了.

本书讲述了关于渐近狄里克莱级数系数估计的孟德博仪不等式及其对狄里克莱级数、准解析函数、矩量、以及加权逼近等问题的应用. 为了便于读者掌握有关的基本想法，本书中没有讲述最一般的结果. 可是讨论了一些相应的二维问题.

在讲述随机狄里克莱级数时，本书阐述了关于概率的一些基本知识. 对于奇异点、增长性及值的分布等，本书也没有讲最一般的结果. 关于值分布，与讨论一般狄里克莱级数时一样，只涉及了儒利亚线及毕卡点. 了解了这些，应用类似方法，就可得到关于波莱尔线及波莱尔点的更深刻的结果.

作者以为一本数学书，特别是可供还未了解有关领域的读者阅读的书，应使读者读了能尽快了解其中主要的思想. 因此本书中在讲述一些问题时，都只讲述最基本的结果. 希望进一步研究的读者由此就易于找到深入钻研的门径了.

作者深深感谢科学出版社科学出版基金对本书出版的资助以及编辑同志耐心、细致、出色的工作和宝贵的意见！

杨乐院士对本书的编写和出版亲切关心，并进行了热情的帮助，谨在此表达衷心的感谢！孙道椿教授、章逸平教授、丁晓庆副教授及几位博士研究生分别阅读了部分原稿，并且提出了宝贵的意见，特一并致谢！

1997 年 2 月适值我与夫人涂光重金婚之庆，谨以本书出版作为纪念.

余家荣

1996 年 12 月于武汉

目　　录

引　言

狄里克莱（Dirichlet）级数或指数级数是下列形状的级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{0.1}$$

其中 $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$，$0<\lambda_n \uparrow +\infty$，$s=\sigma+it$（$\sigma$ 及 $t\in\mathbb{R}$）．当级数（0.1）收敛时，用 $f(s)$ 表示它的和．

如果 $\forall\ n\in\mathbb{N}_+$，$\lambda_n=n$，那么级数（0.1）是 e^{-s} 的泰勒级数或幂级数，如果 $\forall\ n\in\mathbb{N}_+$，$\lambda_n=\log n$，那么级数（0.1）化为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}; \tag{0.2}$$

它是L. 狄里克莱（L. Dirichlet）在研究解析数论时引入的．当 $\forall\ n$，$a_n=1$ 时，（0.2）表示黎曼 ζ 函数．在历史上，首先称（0.2）形的级数为狄里克莱级数，而把（0.1）形的级数称为一般狄里克莱级数．

狄里克莱级数在解析数论中有重要应用．本书主要讲述这种级数的函数性质．由于这种级数可以看作泰勒级数的推广，后者的一些性质引导着狄里克莱级数的某些有关研究．

本书中还要讲述随机狄里克莱级数；即在（0.1）中 $a_n=a_n(\omega)$ 是概率空间（Ω，$\mathscr{A}$，P）（$\omega\in\Omega$）中随机变量的级数．这种级数几乎必然有类似于“缺项”级数[①] 的一些性质．

渐近狄里克莱级数是本书中要讲述的另一课题．这方面的研究是S. 孟德博仪（S. Mandelbrojt）首创的．他把这种级数称为附着级数（adherent series），得到了它的系数的估计式，并且把它应用于研究多种多样的分析问题．

---

① 即 λ_n 之间的距离足够大的（0.1）形级数．

本书不讲述所涉及课题的最一般的结果，只讲述足以说明有关原理及方法的一些基本结果．我们认为在研究中了解所引用的原理及方法是重要的．对于要进一步研究某些课题的读者，了解这些可以作为钻研有关专著和论文的导引．

第一章　收敛性

我们知道泰勒级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

有收敛半径 R. 当 $R=0$ 时，级数（1.1）只在 $z=0$ 收敛；当 $R=+\infty$ 时，(1.1) 在 z 平面上任一点收敛且绝对收敛. 而且在任一紧集上一致收敛. 当 $R\in(0, +\infty)$ 时，级数（1.1）在 $|z|>R$ 内发散，在 $|z|<R$ 内收敛且绝对收敛，而且在 $|z|<R$ 内任一紧集上一致收敛；这时 $|z|<R$ 及 $|z|=R$ 分别称为级数（1.1）的收敛圆盘及收敛圆. 至于确定收敛半径 R，有著名的柯西-阿达马公式.

对级数（1.1）作变换 $z=e^{-s}$（$s=\sigma+it$；σ 及 $t\in\mathbb{R}$），这级数就变成一个特殊的狄里克莱级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-ns}. \tag{1.2}$$

当 $R\in(0, +\infty)$ 时，$|z|=R$ 变成了 s 平面上的直线 $\sigma=-\log R$. 令 $\sigma_c=-\log R$. 由上述结果不难导出：在 s 平面上，当 $\mathrm{Re}s=\sigma<\sigma_c$ 时，级数（1.2）发散；当 $\mathrm{Re}s=\sigma>\sigma_c$ 时，(1.2) 收敛、绝对收敛，而且在半平面 $\sigma>\sigma_c$ 内任一紧集上及任一闭半平面 $\sigma\geqslant\sigma_0$（$\sigma_0>\sigma_c$）上一致收敛. 这时 $\sigma>\sigma_c$ 及 $\sigma=\sigma_c$ 分别称为级数（1.2）的收敛半平面及收敛直线；σ_c 称为收敛横坐标.

相应于级数（1.1）在 $R=0$ 或 $+\infty$ 情形，级数（1.2）分别在 s 平面到处发散或到处收敛、绝对收敛而且在任一紧集上一致收敛. 这时我们说级数（1.2）的收敛横坐标 σ_c 是 $+\infty$ 或 $-\infty$，而收敛半平面分别化为空集或全平面.

由柯西-阿达马公式可导出

$$\sigma_c = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log|a_n|}{n}.$$

在本章中，我们要阐明怎样把上述结果转移到一般狄里克莱级数.

§1. 收敛域

泰勒级数的收敛域是根据阿贝尔定理确定的. 为了确定狄里克莱级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{0.1}$$

的收敛域，首先也要建立相应的阿贝尔型定理. 现引进两个引理如下：

引理 1.1 任给序列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，那么 $\forall\, n$ 及 $k \in \mathbb{N}_+$，

$$\sum_{j=0}^{k} a_{n+j}\, b_{n+j} = \sum_{j=0}^{k-1} A_{nj}\ (b_{n+j} - b_{n+j+1})\ + A_{nk} b_{n+k},$$

其中

$$A_{nj} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+j}.$$

这是阿贝尔的一个引理，不难立即证明.

引理 1.2 如果 $\mathrm{Re}s = \sigma \neq 0$，那么

$$|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| \leqslant \frac{|s|}{\sigma}\ (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}).$$

这是因为

$$|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| = \left|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} s e^{-us} du\right| \leqslant |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\sigma} du$$

$$= \frac{|s|}{\sigma}\ (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n-1}\sigma}).$$

下列阿贝尔型定理是 E. 卡昂首先得到的.

定理 1.1 如果级数（0.1）在 $s_0 = \sigma_0 + it_0$ 收敛，那么

1) $\forall\ r\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，这级数在角形

$$E_r=\{s\,|\,|\arg(s-s_0)|\leqslant r\}$$

上一致收敛；

2) 这级数在半平面 $\sigma>\sigma_0$ 内收敛，而且在其中任何紧集上一致收敛.

由 2)，级数 (0.1) 的和函数 $f(s)$ 在 $\sigma>\sigma_0$ 内解析. 这是由维尔斯特拉斯定理导出的.

证. 先证明 1)，把级数 (0.1) 写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_ns}=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_ns_0}e^{-\lambda_n(s-s_0)},$$

并且令

$$A_{nj}=a_ne^{-\lambda_ns_0}+a_{n+1}e^{-\lambda_{n+1}s_0}+\cdots+a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}s_0}.$$

由引理 1.1，

$$\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}s}=\sum_{j=0}^{k-1}A_{nj}\left(e^{-\lambda_{n+j}(s-s_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(s-s_0)}\right)+A_{nk}e^{-\lambda_{n+k}(s-s_0)},$$

从而

$$\left|\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}\,e^{-\lambda_{n+j}s}\right|\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\left|A_{kj}\right|\left|e^{-\lambda_{n+j}(s-s_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(s-s_0)}\right|$$
$$+\left|A_{nk}\right|e^{-\lambda_{n+k}(\sigma-\sigma_0)}.\tag{1.3}$$

由引理 1.2，当 $s\in E_r$ 时，

$$\left|e^{-\lambda_{n+j}(s-s_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(s-s_0)}\right|\leqslant\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\left(e^{-\lambda_{n+j}(\sigma-\sigma_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma-\sigma_0)}\right)$$
$$\leqslant\frac{2}{\cos r}.\tag{1.4}$$

又因 (0.1) 在 $s=s_0$ 时收敛，所以 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n>N$ 时，$\forall\ j\in\mathbb{N}$，$|A_{nj}|<\varepsilon$. 因此由 (1.3) 及 (1.4)，当 $n>N$ 时，$\forall\ k\in\mathbb{N}$，$\forall\ s\in E_r$，

$$\left|\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}s}\right|\leqslant\left(\frac{2}{\cos r}+1\right)\varepsilon.$$

1) 得证. 2) 不难由 1) 导出.

我们还需要关于绝对收敛及一致收敛的阿贝尔型定理：

定理 1.2 1）如果级数（0.1）在 $s=s_0=\sigma_0+it_0$（σ_0 及 $t_0\in\mathbb{R}$）绝对收敛，那么它在闭半平面 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 即 $\{s\,|\,\mathrm{Re}s=\sigma\geqslant\sigma_0\}$ 上绝对收敛.

2）如果级数（0.1）在直线 $\sigma=\sigma_0$ 即 $\{s\,|\,\mathrm{Re}s=\sigma_0,\ \mathrm{Im}\ s\in(-\infty,+\infty)\}$ 上一致收敛，那么它在闭半平面 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 上一致收敛.

证. 1）是显而易见的. 现证明 2). 已知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-\lambda_n(\sigma_0+it)}$$

对于 $t\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛. 令

$$A_{nj}=a_ne^{-\lambda_n(\sigma_0+it)}+a_{n+1}e^{-\lambda_{n+1}(\sigma_0+it)}+\cdots+a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}(\sigma_0+it)},$$

那么 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbb{N}>0$，使得当 $n>N$ 时，

$$\forall\ j\in\mathbb{N}\ ,\ \forall\ t\in(-\infty,+\infty),\ |A_{nj}|<\varepsilon. \qquad (1.5)$$

$\forall\ \sigma_1>\sigma_0$，我们有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-\lambda_n(\sigma_1+it)}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-\lambda_n(\sigma_0+it)}e^{-\lambda_n(\sigma_1-\sigma_0)}.$$

由引理 1.1，

$$\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1+it)}=\sum_{j=0}^{k-1}A_{nj}\left(e^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1-\sigma_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma_1-\sigma_0)}\right)+A_{nk}e^{-\lambda_{n+k}(\sigma_1-\sigma_0)}.$$

从而由（1.5），$\forall\ n>N$，$\forall\ k\in\mathbb{N}_+$，$\forall\ t\in(-\infty,+\infty)$，

$$\left|\sum_{j=0}^{k}a_{n+j}e^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1+it)}\right|<\varepsilon\Big[\sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{-\lambda_{n+j}(\sigma_1-\sigma_0)}-e^{-\lambda_{n+j+1}(\sigma_1-\sigma_0)}\right)+e^{-\lambda_{n+k}(\sigma_1-\sigma_0)}\Big]=\varepsilon e^{-\lambda_n(\sigma_1-\sigma_0)}<\varepsilon.$$

于是 2）得证.

由定理 1.1 及 1.2，我们可以分别定义级数（0.1）的收敛、绝对收敛及一致收敛横坐标 σ_c，σ_a 及 σ_u 如下：

$$\sigma_c=\inf\{\sigma_0\,|\ \text{级数(0.1) 在}\ \sigma>\sigma_0\ \text{内收敛},\sigma_0\in\mathbb{R}\},$$

$$\sigma_a=\inf\{\sigma_1\,|\ \text{级数(0.1) 在}\ \sigma\geqslant\sigma_1\ \text{上绝时收敛},\sigma_1\in\mathbb{R}\},$$

$$\sigma_u=\inf\{\sigma_2\,|\ \text{级数(0.1) 在}\ \sigma\geqslant\sigma_2\ \text{上一致收敛},\sigma_2\in\mathbb{R}\}.$$

σ_c，σ_a 及 σ_u 是有限实数或 $\pm\infty$. 当 σ_c，σ_a 或 σ_u 是 $+\infty$ 时，级数 (0.1) 在 s 平面上到处发散，不绝对收敛，或在与横坐标轴垂直的任一直线上不一致收敛. 当 σ_c，σ_a 或 σ_u 是 $-\infty$ 时，级数 (0.1) 在 s 平面上到处收敛，到处绝对收敛，或在与横坐标轴垂直的任一直线上一致收敛. 当 σ_c，σ_a 或 σ_u 是有限实数时，级数 (0.1) 在 $\sigma>\sigma_c$ 或 $\sigma>\sigma_a$ 内收敛或绝对收敛，而在 $\sigma<\sigma_c$ 或 $\sigma<\sigma_a$ 内发散或不绝对收敛；$\forall\ \sigma_2'<\sigma_u$，(0.1) 在 $\sigma\geqslant\sigma_2'$ 上不一致收敛，而 $\forall\ \sigma_2>\sigma_u$，(0.1) 在 $\sigma\geqslant\sigma_2$ 上一致收敛. 这时 $\sigma>\sigma_c$，$\sigma>\sigma_a$ 及 $\sigma>\sigma_u$ 分别称为级数 (0.1) 的收敛、绝对收敛及一致收敛半平面；$\sigma=\sigma_c$，$\sigma=\sigma_a$ 或 $\sigma=\sigma_u$ 称为 (0.1) 的收敛、绝对收敛及一致收敛轴. 由定理 1.1，当 $\sigma_c\in(-\infty,\infty)$ 时，级数 (0.1) 的和 $f(s)$ 在收敛半平面内解析；当 $\sigma_c=-\infty$ 时，$f(s)$ 是整函数.

如果级数 (0.1) 在 $s_1=\sigma_1+it$ 绝对收敛，那么显然它在 $\sigma\geqslant\sigma_1$ 上绝对收敛并且一致收敛. 于是有下列不等式

$$\sigma_c\leqslant\sigma_u\leqslant\sigma_a. \tag{1.6}$$

对于级数 (1.2)，我们有 $\sigma_c=\sigma_u=\sigma_a$. 而在一般情形下，(1.6) 不能用等式来代替. 现举例说明如下：

例 1.1 对于级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}, \tag{1.7}$$

$\sigma_c=\sigma_u=\sigma_a=1$.

这是由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\sigma}$ 当 $\sigma>1$ 时收敛，而当 $\sigma\leqslant1$ 时发散.

例 1.2 对于级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \tag{1.8}$$

$\sigma_c=0$，$\sigma_a=1$.

这是由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\sigma}$ 当 $\sigma>0$ 时收敛，当 $\sigma>1$ 时绝对收敛，而当 $\sigma\leqslant0$ 时发散.

例 1.3 对于级数

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\lambda_n s}, \tag{1.9}$$

$\sigma_c=-\infty$，$\sigma_a=+\infty$，其中 $\lambda_n=\sqrt{\log\log n}$.

现证明 $\sigma_c=-\infty$. 为此，只须证明：$\forall\ k>0$，当 $s=-k$ 时，级数（1.9）的一般项趋近于零，而且从某一项起，各项的绝对值严格递减. 这里一般项趋近于零是容易看出的，于是只须证明后一结论，即当 n 充分大时，$\exp(k\sqrt{\log\log n})/n$ 随着 n 增加而严格递减；或当 x 是充分大的正数时，$g(x)=\exp\sqrt{k\log\log x}/x$ 随着 x 的增加而递减. 后者是由于当 x 是充分大的正数时，

$$(\log g(x))' = \frac{k}{2}\frac{1}{\sqrt{\log\log x}}\frac{1}{x\log x} - \frac{1}{x} < 0.$$

于是 $\sigma_c=-\infty$ 得证.

现证明 $\sigma_a=+\infty$. 为此，只须证明 $\forall\ k>0$，级数

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\exp(k\sqrt{\log\log n})}$$

发散. 由于 $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{1}{n\log n}$ 发散，只须证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\exp(k\sqrt{\log\log n})}{\log n} = 0.$$

因

$$\lim_{n\to\infty}[k\sqrt{\log\log n} - \log\log n] = -\infty,$$

前一极限式显然成立，证完.

本节已阐明级数（0.1）的收敛域可能是 s 平面上的空集、半平面或全平面. 当收敛域不是空集时，级数在收敛域中任何紧集上一致收敛. 因此由维尔斯特拉斯定理，级数在收敛域内的和函数是一解析函数，记作

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s}. \tag{1.10}$$

§2. 各种收敛横坐标的公式

本节阐述怎样把关于泰勒级数的收敛半径的柯西-阿达马公式推广到狄里克莱级数. 先讲适用于一些特殊情形的瓦里隆公式，然后讲适用于一般情形的克诺普-小岛铁藏公式. 瓦里隆公式可表述如下：

定理 2.1 对于级数（0.1），

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}\leqslant\sigma_c\leqslant\sigma_u\leqslant\sigma_a\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}+\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log n}{\lambda_n}. \tag{2.1}$$

这公式中第一个上极限与柯西-阿达马公式中的上极限相似；实际上它包含了后者作为特例（$\lambda_n=n$ 情形）. 只有在一些特殊情形下，才能由此求得各种收敛横坐标的确切的值.

证. 如果级数（0.1）在一点 $s_0=\sigma_0+it$ 收敛，那么当 n 充分大时，

$$|a_n|e^{-\lambda_n\sigma_0}\leqslant 1,\ 即\ \log|a_n|-\lambda_n\sigma_0\leqslant 0,$$

从而

$$\sigma_0\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{\lambda_n}.$$

（2.1）中第一个不等式得证.

现在只需要证明（2.1）中最后一个不等式. 用 l 及 D 分别表示（2.1）中最后两个上极限，并设它们是有限数. 现证明（0.1）在半平面 $\sigma>l+D$ 内绝对收敛. 设 $s_1=\sigma_1+it_1$ 是这半平面内一点. 取 $2\varepsilon\in(0,\ \sigma_1-l-D)$，$\exists\ N>0$，使得当 $n>N$ 时，

$$|a_n|<e^{\lambda_n(l+\varepsilon)},\qquad \log n<(D+\varepsilon/2)\lambda_n.$$

这时

$$\begin{aligned}|a_ne^{-\lambda_ns_1}|&=|a_n|e^{-\lambda_n\sigma_1}<e^{\lambda_n(l+\varepsilon)}e^{-\lambda_n(l+D+2\varepsilon)}\\&=e^{-\lambda_n(D+\varepsilon)}<1/n^{\frac{D+\varepsilon}{D+\varepsilon/2}}.\end{aligned}$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{\frac{D+\varepsilon}{D+\varepsilon/2}}\right)$收敛，级数（0.1）在 $s=s_1$ 时绝对收敛. 由于

s_1 的任意性，可见级数（0.1）在半平面 $\sigma>l+D$ 内绝对收敛.

不难看出，当 $l=\pm\infty$，$D<+\infty$ 时，(2.1) 仍然成立.

现在说明 σ_c，σ_u 及 σ_a 的克诺普-小岛铁藏公式. 考虑级数 (0.1). $\forall\, k\in\mathbb{N}$，如果 $[k,\ k+1)\cap\{\lambda_n\}=\{\lambda_{n_k},\ \lambda_{n_k+1},\cdots,\ \lambda_{n_k+p_k}\}\neq\varnothing$，那么令

$$A_k=\max_p\left\{\left|\sum_{j=n_k}^{n_k+p}a_j\right|\right\},\quad A_k^*=\sum_{j=n_k}^{n_k+p_k}|a_j|,$$

$$\overline{A}_k=\sup_{p,t}\left\{\sum_{j=n_k}^{n_k+p}a_je^{-\lambda_jit}\right\},$$

其中 $p\in\{0,1,2,\cdots,p_k\}$，$t\in(-\infty,+\infty)$. 如果 $[k,\ k+1)\cap\{\lambda_n\}=\varnothing$，那么令 $\log A_k=\log A_k^*=\log\overline{A}_k=-\infty$. 于是我们有下列公式：

定理 2.2 对于级数（0.1），

$$\sigma_c=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\log A_k}{k},\tag{2.2}$$

$$\sigma_u=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\log\overline{A}_k}{k},\tag{2.3}$$

$$\sigma_a=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{\log A_k^*}{k}.\tag{2.4}$$

证. 现证明 (2.2). 把这式中的上极限记作 α，且设 α 是有限数，先证 $\sigma_c\leqslant\alpha$. 为此只须证当 $s=\sigma_1>\alpha$ 时，级数 (0.1) 收敛. 取 $\sigma_2\in(\alpha,\ \sigma_1)$. 显然，$\exists\ K>0$，使得 $\forall\ k\in\mathbb{N}$，$A_k<Ke^{k\sigma_2}$. 如果 $[k,\ k+1)\cap\{\lambda_n\}\neq\varnothing$，那么

$$\left|\sum_{j=n_k}^{n_k+p}a_j\right|<Ke^{k\sigma_2}(p=0,1,\cdots,p_k).$$

由引理 1.1，

$$\sum_{j=n_k}^{n_k+p_k}a_je^{-\lambda_j\sigma_1}=\sum_{p=0}^{p_k-1}\left[\left(\sum_{j=n_k}^{n_k+p}a_j\right)\ (e^{-\lambda_{n_k+p}\sigma_1}-e^{-\lambda_{n_k+p+1}\sigma_1})\right]$$