[德] J·波里特诺
W·汉　森　著

位勢理論

扫除的分析与概率方法

厦门大学出版社

位　势　理　论

扫除的分析与概率方法

[德] J. 波里特诺
W. 汉　森　著

高琪仁　吴炯圻　译
邱曙熙　校

厦门大学出版社

[闽]新登字 09 号

J. Bliedtner W. Hansen
Potential Theory
An Analytic and Probabilistic
Approach to Balayage
Springer－Verlag, 1986

位 势 理 论

扫除的分析与概率方法

[德] J. 波里特诺 W. 汉森 著

高琪仁 吴炯圻 译

邱曙熙 校

*

厦门大学出版社出版发行
厦门大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 19 印张 480 千字
1994 年 3 月第 1 版 1994 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—500 册
ISBN 7—5615—0887 —5/O· 54
定价:12.80 元

内 容 简 介

本书介绍近三十年来位势理论一些新发展的内容。书中系统地阐述了分析位势论与概率位势论之间的密切联系和它的主要工具—扫除理论及其在 Dirichlet 问题上的应用。全书共分九章，内容包括经典位势理论，预备知识，超过函数，超调和函数，Markov 过程，标准例子，扫除理论，Dirichlet 问题，偏微分方程。此外，还有一个文献注解。书中每节都配有练习题，作为正文的补充。使读者进一步熟悉正文的内容。

本书可作为数学系研究生教材，也可供大专院校数学系和有关专业师生参考。

J. Bliedtner W. Hansen
Potential Theory
An Analytic and Probabilistic
Approach to Balayage
Springer—Verlag, 1986

中文版前言

本书旨在阐述位势理论在分析与概率这两个研究方向之间的密切联系和它的主要工具一扫除理论以及这工具在 Dirichlet 问题上的应用。我们衷心感谢谢我们的同行高琪仁教授和吴炯圻教授为本书翻译作出的巨大努力和所表现的高度热忱。我们相信本书的中文版将在促进这个领域的研究中发挥重要作用。

[德国] J. 波里特诺， W. 汉森

The presentation of the close connection between analytic and probabilistic aspects of potential theory, its main tool balayage theory, and its application to the Dirichlet problem is the intentiom of our book. It is our pleasure to thank our colleagues Professor Gao Qi Ren and Professor Wu Jiong Qi for their translation which has been done with great effort and enthusiasm. We are sure that this Chinese edition will play an important role in advancing the research in this field.

J. Bliedtner, W. Hansen

引　言

近三十年来，位势理论迅速发展，其中许多新内容至今仍只出现在原始论文之中。本书旨在处理部分这种新发展的内容并有两个目的。其一是，把扫除空间的概念作为自然纽带来综合叙述分析位势论与概率位势论之间的密切联系；其二是，通过扫除空间的概念给出扫除理论的直接表述并进而用之于解 Dirichlet 问题来指出这一概念具有基本的重要性。至于进一步的研究专题，诸如对偶性、理想边界、积分表示以及 Dirichlet 形式等，本书将不予涉及。

本书的主题起源于经典位势论与 Brown 运动理论之间的联系，这两个理论用 Laplace 算子联系起来，但它们之间的深刻联系的发现最初是出现在 S。Kakutani[1]、[2]、[3]，M. Kac[1]及 J. L. Doob[2]等发表于 1944－1954 年间的论文中。这种联系可通过如下事实来表述：在解 Dirichlet 问题中出现的调和测度正好是 Brown 运动的击中分布，或等价地，关于 Laplace 方程的正超调和函数正好是 Brown 半群的超过函数。这种等价性使得位势论的概念和结果（诸如扫除、细拓扑、极集、瘦性及正则点等）得到概率的解释。

这种等价性也导致了 J. L. Doob[3]、[4]、[5]在处理热方程的 Dirichlet 问题时采用了分析与概率相结合的方法。基于上述结果和 G. Tautz[1]、[2]早些时候所做的尝试的结果，M. Brelot [9]—[12]及 H. Bauer[3]、[5]发展成调和空间的位势理论。他们从调和函数的基本性质（簇性质、Dirichlet 问题的局部可解性、收敛性质）出发建立了一套广泛的理论，它涉及了一大类线性二阶椭圆型与抛物型偏微分方程；特别地，得到了对任意开集解 Dirichlet 问题的共同处理方法。这种理论在 C. Constantinescu－A. Cornea 的专著[4]中达到了发展的顶峰。与此同时，从概率的角度出发，G. A. Hunt 于 1957－1958 年发表的基本论文[1]、[2]、[3]标志了 Markov 过程的位势论的开始。关于这一理论的严密表述可参见 R. M. Blumenthal－R. K. Getoor 的专著[1]。

P. A. Meyer 在 1963 年的论文[1]及 N. Boboc－C. Constantinescu－A. Cornea 在 1967 年的论文[1]中证明了，类似于经典位势论与 Brown 运动之间的联系，每个调和空间必对应一个 Markov 过程。但是直到 1978 年才由 J. Bliedtner－W. Hansen 给出与一个调和空间相关联的 Markov 过程的特征（也可见 J. C. Taylor[5]）。

调和空间是由某种微分方程的解的性质诱导而引入的，这一点可从其对应的 Markov 过程总有连续的轨道，即它们是扩散过程这一事实体现出来。但是，轨道是否连续这对 Markov 过程的位势论并不起重要作用。而且，甚至在调和空间位势论中也表明位势比调和函数更重要，并且连续的位势锥所具有的真正决定性的性质在更为一般的框架中也成立。

这种观点导致了本书作者把 G. Mokobdzki－D. Sibony[1]—[4]的研究及 C. Constantinescu －A. Cornea 的专著[4]所采用的方法结合起来并进而引入扫除空间的概念。这一概念不仅可

阐明分析位势论与概率位势论之间的联系，而且也为扫除理论提供了一个清楚而又直接明了的表述。扫除理论起源于为研究平衡问题而引入的 H. Poincare 扫除法(法语的扫除"balayer"=英语的"to sweep")，而该问题现已为 M. Brelot 的缩减法(reduction technique)所解决。所有这些结论都可以在扫除空间中的更一般的框架中实现而不会丧失那些在调和空间中已得到的结果，并且证明过程也不会更加复杂。特别，不同类型的 Dirichlet 问题可用一个精巧的方法统一处理。这种方法的一个有决定意义的新优点是 Riesz 位势与 Markov 链成了更为标准的例子，从而它们的位势论也可包括于其中。

在第 0 章，我们简要地叙述了关于 Brown 半群的超过函数与关于 Laplace 算子的正超调和函数是一致的这一事实。这种讨论是为导向统一处理子 Markov 过程的超过函数(第 Ⅰ 章)与关于一族调和核的正超调和函数(第 Ⅲ 章)服务的。一些必需涉及泛函分析的预备知识可见于第 Ⅰ 章；本书的第一部分(第 Ⅳ 章)也简要介绍了 Markov 过程。这里的体系主要是在于适应这样的主要结果，即证明由扫除空间、调和核族、子 Markov 半群及 Markov 过程等方法给出的位势论的各种描述都是等价的。为了加深了解，这里给出了按这种方式处理的三个标准例子，即经典位势论，R 中的平移及离散位势论。在第 Ⅴ 章，通过研究子空间，卷积半群的从属运算，乘积及映象，我们得到了更深刻的例子。特别，由于列举了 Riesz 位势和热传导方程，我们的标准范例就齐全了。

本书的第二部分从第 Ⅵ 章开始，函数的扫除与测度的扫除是这部分的中心内容。所有的证明都是在扫除空间的框架中给出，即其证明方法是分析的。但是所有重要的概念都给予概率解释。我们希望这将增大对这个理论的兴趣，并同时也会导致加深对许多陈述的理解。当然，可以看到，其中许多分析方法的证明都得到(且可能必须有)概率直观的指导。我们鼓励有兴趣的读者去寻求其中某些结果的纯概率证明方法以便弄清楚是否能通过考虑适当的途径并应用强 Markov 性质来避开分析法的微妙。作为扫除理论的一个应用，第 Ⅶ 章研究了各种类型的 Dirichlet 问题。首先，Perron－Wiener－Brelot 方法被修改后用于扫除空间—— 当然这时，在一个开集上的边界函数必须用其余集上的函数来代替。连续的实位势锥的丰富结构使得我们有可能去发展关于连续的上调和锥的 Choquet 型理论。这导致了弱 Dirichlet 问题的解的研究并产生了重要的逼近定理。最后一章建立了"好的"二阶线性椭圆型和抛物型微分算子生成调和空间因此它们的位势论可被这里的一般理论所包括。

本书差不多每个小节都会有一些练习题，其主要目的是使读者进一步熟悉材料。我们附加了一些文献注解，包含了一些历史的纪录，尽管它们很不齐全。我们对所有欠缺和疏漏表示歉意。另外，为了方便读者，本书的最后一页列出了本书各标准例子的索引。

本书的材料是在法兰克福大学和比莱贵特大学的研究生教材的基础上整理成的，假定读者已熟悉如下课程的一些基本知识：泛函分析(例如 Hahn－Banach 定理)，测度论(如局部紧空间上的 Radon 测度)及概率论(如条件期望)。但是不必假定读者已懂得位势论。尽管如此，我们希望本书能为这方面的专家提供一些有用的东西，不论是简化了的证明，或者是其中结果的本身。

我们衷心感谢 Dorothea Burghardt，Christa Draeger 及 Hannelore Sternberg 为打印本书最后一次手稿所做的出色工作。

基 本 记 号

$\mathbb{N}$	正整数集
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*$	非负实数集，正实数集$\geqslant 0$，>0
$\overline{\mathbb{R}}$	广义实直线
$\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\Vert\cdot\Vert$	$\mathbb{R}^n$ 上的内积与范数
λ^n	$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度
$\lim\limits_{s\downarrow t}(\lim\limits_{s\uparrow t})$	$\lim\limits_{s\to t,s>t}(\lim\limits_{s\to t,s<t})$
X	具有可数基的局部紧空间
$\overline{A},A^0,A^*$	集 A 的闭包、内部、边界
$\boldsymbol{P}(X)$	X 的子集全体
u	X 的相对紧开子集构成的基
$B(X)$	X 上的(或 X 的子集上的)所有 Borel 数值函数全体
l,s,c(u,s,c)	下(上)半连续
$C(X)$	X 上的实连续函数全体所成空间
$C_0(X)$	X 上的于无穷远处取零值的连续实函数全体所成空间
$K(X)$	X 上的具紧支柱的实连续函数全体所成空间
A_b,A^+,A_r	分别为 A 中的有界的，正的，实的函数全体构成的集
$\Vert f\Vert$	$f\in \boldsymbol{B}_b(X)$的一致范数
$\{f\geqslant g\}$	$\{x\in X: f(x)\geqslant g(x)\}$
S(f)	f 的支柱，即$\overline{\{f\neq 0\}}$
I_A	集 A 的特征函数
$f\|_A$	f 在 A 上的限制，即 I_Af
$f\in A/B$	f 是 $A-B$ 可测的
$M_+(X)$	X 上的所有(正 Radon)测度全体
$M_+^1(X)$	X 上的所有概率测度全体
supp(μ)	测度 μ 的支柱
$\mu\|_A$	μ 在 A 上的限制或 $I_A\mu$
ε_x	集中在 x 的单位质量，即 Dirac 测度

目　　录

第 0 章　经典位势论

在这一章，我们将看到，经典位势论与 Brown 运动在数学上是等价的。第 1 节简要描述调和与超调和函数的性质，而后，第 2 节介绍 Brown 半群并证明一些重要性质。第 3 节证明相对于 Brown 半群的超过函数全体与 $\mathbb{R}^n$ 的正超调和函数全体是一致的，这表明这两种理论在技术上是一致的。这一结果的重要性今后将会明朗化，特别在第 Ⅵ 章，Brown 半群的概率模型即 Brown 运动是很有用的。

§1. 调和与超调和函数

经典位势论是建立在 $\mathbb{R}^n, n\geqslant 1$ 的 Laplace 方程 $\Delta h=0$ 的基础上的，此处

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

是 Laplace 算子。设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，$h\in C^2(U)$，即 h 是 U 上二次连续可微的实函数。若 $\Delta h=0$，则称 h 在 U 调和。我们看到 U 上的所有调和函数所成之集 $\mathcal{H}(U)$ 是 $C(U)$ 的一个线性子空间。

现假定 U 是非空的、相对紧的，$f\in \mathcal{C}(U^*)$。那未，经典的 Dirichlet 问题就是要求 f 在 U 上的一个调和延拓，即找一个函数 $h\in \mathcal{H}(U)$ 使得 $\lim\limits_{x\to z} h(x)=f(z)$，对每个 $z\in U^*$ 成立。若对每个 $f\in \mathcal{C}(U^*)$，Dirichlet 问题都可解，则称 U 为正则的。

下面的边界极小值原理表明对于一个给定的边界函数 f，至多存在一个对应的 Dirichlet 问题的解。

1.1　**命题**　设 $h\in C^2(U)$ 满足 $\Delta h\leqslant 0$ 在 U 上成立且 $\liminf\limits_{x\to z} h(x)\geqslant 0$ 对每个 $z\in U^*$ 成立，那未 $h\geqslant 0$。

证明　1. 先假定 $\Delta h<0$ 在 U 上成立且 $\inf h(U)<0$（译者注，此即 $\inf\limits_{x\in U} h(x)<0$）。那未存在一点 $a\in U$ 使得

$$h(a) = \inf h(U)$$

对每个 $1\leqslant i\leqslant n$，函数

$$t \longmapsto h(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_n)$$

有定义且在 a_i 的一个邻域是二次连续可微的，并在 a_i 达到极小值。因此

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(a)\geqslant 0,$$

这与 $\Delta h<0$ 矛盾。因此，若 $\Delta h<0$ 在 U 上成立，则必有 $h\geqslant 0$。

2. 若 $\Delta h\leqslant 0$ 且 $\inf h(U)<0$，我们可选取 $r>0$ 及 $\varepsilon>0$ 使得 $\|x\|<r$ 对每个 $x\in U$ 成立且 $\inf h(U)+\varepsilon r^2<0$. 定义 $\bar{h}$：

$$\bar{h}(x)=h(x)+\varepsilon(r^2-\|x\|^2),\qquad (x\in U),$$

那么 $h\in C^2(U)$，

$$\Delta\bar{h}=\Delta h-2\varepsilon n<0$$

且 $\bar{h}\geqslant h$，因此对每个 $z\in U^*$，

$$\liminf_{x\to z}\bar{h}(x)\geqslant\liminf_{x\to z}h(x)\geqslant 0$$

因此，据第1段的结论得出 $\bar{h}\geqslant 0$；但另一方面，当 ε 适当选取时却有 $\inf\bar{h}(U)<0$，这矛盾说明 $h\geqslant 0$。

下面证明 $\mathbb{R}^n$ 的每个开球为正则。故设 $a\in\mathbb{R}^n$，$r>0$ 且

$$B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-a\|<r\},\quad S_r(a)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-a\|=r\},$$

用 $\sigma_{a,r}$ 表示 $S_r(a)$ 上的以1为规范的面测度。对每个 $x\in B_r(a)$，定义 Poisson 核 $P_x:S_r(a)\to\mathbb{R}^+$ 为

$$P_x(y):=P_x^{a,r}(y):=r^{n-2}\frac{r^2-\|x-a\|^2}{\|x-y\|^n},$$

对每个有下界的 Borel 可测函数 $f:S_r(a)\to\bar{\mathbb{R}}$，定义 Poisson 积分 $Hf:B_r(a)\to\bar{\mathbb{R}}$ 为

$$Hf(x):=H_{a,r}f(x):=\int fP_x d\sigma_{a,r}$$

注意到若 $f\geqslant 0$，则 $Hf\geqslant 0$.

1.2 **命题** 设 $f:S_r(a)\to\bar{\mathbb{R}}$ 下有界且 Borel 可测。若 f 是 $\sigma_{a,r}$ 可积的，则 Hf 在 $B_r(a)$ 调和；若 $f\in C(S_r(a))$，则 $\lim\limits_{x\to z}Hf(x)=f(z)$ 对每个 $z\in S_r(a)$ 成立。特别，$B_r(a)$ 为正则。

证明 易验证对每个 $y\in S_r(a)$，函数 $x\longmapsto P_x(y)$ 在 $B_r(a)$ 调和。进一步，函数 $(x,y)\longmapsto\frac{\partial P_x(y)}{\partial x_i}$ 及 $(x,y)\longmapsto\frac{\partial^2 P_x(y)}{\partial x_i\partial x_j}$ 在 $B_r(a)\times S_r(a)$ 上连续，故可改变积分与微分的次序且得到 $Hf\in C^2(B_r(a))$，

$$\Delta Hf(x)=\int f(y)\Delta P_x(y)\sigma_{a,r}(dy)=0$$

对每个 $x\in B_r(a)$ 成立，因此 Hf 在 $B_r(a)$ 调和。

下证 $H1=1$，设 $0<r'<r$，$x',x''\in S_{r'}(a)$. 那么存在 $\mathbb{R}^n$ 上的旋转变换 S 使得 $S(a)=a$ 且 $x''=Sx'$。因为 $\sigma_{a,r}$ 是关于旋转不变的，故得

$$H1(x'')=H1(Sx')=r^{n-2}\int\frac{r^2-\|Sx'-a\|^2}{\|Sx'-y\|^n}\sigma_{a,r}(dy)$$

$$=r^{n-2}\int\frac{r^2-\|x'-a\|^2}{\|Sx'-Sy\|^n}\sigma_{a,r}(dy)=H1(x').$$

因此，函数 $H1$ 在 $S_{r'}(a)$ 上取常数值 $\alpha_{r'}$。考虑函数 $H1-\alpha_{r'}$ 的调和性，我们由(1.1)节推出 $H1-\alpha_{r'}=0$ 在 $B_{r'}(a)$ 上恒成立。特别，$\alpha_{r'}=H1(a)=r^{n-2}\int\frac{r^2}{r^n}d\sigma_{a,r}=1$.

现假定 $f\in C(S_r(a))$. 设 $z\in S_r(a)$ 且 $\varepsilon>0$. 那末存在函数 $f',f''\in C(S_r(a))$ 及 $\delta>0$ 使得 $f'=0$

在 $B_{2\delta}(z)\cap S_r(a)$ 上成立，$|f''|\leqslant\varepsilon$ 且

$$f=f(z)+f'+f''.$$

因 $H1=1$，故

$$Hf=f(z)+Hf'+Hf''.$$

此处 $|Hf''|\leqslant H|f''|\leqslant H\varepsilon=\varepsilon$. 进一步，对每个 $x\in B_r(a)\cap B_\delta(z)$ 及每个 $y\in S_r(a)\backslash B_{2\delta}(z)$，

$$P_x(y)=r^{n-2}\frac{r^2-\|x-a\|^2}{\|x-y\|^n}\leqslant r^{n-2}\frac{r^2-\|x-a\|^2}{\delta^n}.$$

因此，对每个 $x\in B_r(a)\cap B_\delta(z)$，

$$|Hf'(x)|=\left|\int_{S_r(a)\backslash B_{2\delta}(z)} f'P_x d\sigma_{a,r}\right|\leqslant\|f'\|\frac{r^{n-2}}{\delta^n}(r^2-\|x-a\|^2).$$

这证明

$$\lim_{x\to z}Hf'(x)=0$$

因而 $\limsup_{x\to z}|Hf(x)-f(z)|<\varepsilon$. 因 $\varepsilon>0$ 是任意的，故得

$$\lim_{x\to z}Hf(x)=f(z)$$

1.3 **推论** （平均值性质）。设 U 是$\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，$h\in C(U)$ 那未 h 在 U 上调和当且仅当对每个 $a\in U$. 每个满足 $\bar{B}_r(a)\subset U$ 的 $r>0$ 及每个 $x\in B_r(a)$，有下式成立

$$h(x)=\int hP_x d\sigma_{a,r}$$

证明 若 h 在 U 上调和。那未由(1.1)及(1.2)知，对每个 $a\in U$ 及满足 $\bar{B}_r(a)\subset U$ 的 $r>0$，有 $h|_{B_r}(a)=H_{a,r}(h|_{S_r}(a))$ 反之，若这个平均值性质成立，那未由(1.2)知，h 在每个满足 $\bar{B}_r(a)\subset U$ 的球 $B_r(a)$ 内调和，从而在 U 调和。

设 U 是$\mathbb{R}^n$ 的开子集；一个下半连续(l. s. c.)函数 $v:U\to]-\infty,+\infty]$ 称为**超调和的**，如果

$$\int vP_x d\sigma_{a,r}\leqslant v(x)$$

对每个 $a\in U$，每个满足 $\bar{B}_r(a)\subset U$ 的 $r>0$ 及每个 $x\in B_r(a)$ 都成立。用 ${}^*\mathcal{H}(U)$ 表示 U 上的超调和函数全体。据(1,3)节得

$$\mathcal{H}(U)\cap(-{}^*\mathcal{H}(U))=\mathcal{H}(U)$$

易知 ${}^*\mathcal{H}(U)$ 是一个 min-稳定的凸锥，(其中 min 稳定意指 $\forall\ s,t\in{}^*\mathcal{H}(U)$，有 $\min(s,t)=\min\{s(x),t(x)\}\in{}^*\mathcal{H}(U)$—译者)。而且，若 (v_n) 是 ${}^*\mathcal{H}(U)$ 中的增加列，则 $\sup v_n\in{}^*\mathcal{H}(U)$.

1.4 **命题** 设 $v\in C^2(U)$，那未 v 为超调和的当且仅当 $\Delta v\leqslant 0$.

证明 假定 $\Delta v\leqslant 0$，$a\in U$，$r>0$ 满足 $\bar{B}_r(a)\subset U$，定义 $f: B_r(a)\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x)=v(x)-H(v|_{S_r(a)})\qquad(x\in B_r(a))$$

那未 $f\in C^2(B_r(a))$，$\Delta f=\Delta v<0$ 在 $B_r(a)$ 上成立且 $\lim_{x\to z}f(x)=v(z)-v(z)=0$ 对每个 $z\in S_r(a)$ 成立。故由(1.1)节知 $f\geqslant 0$，即对每个 $x\in B_r(a)$，

$$\int vP_x d\sigma_{a,r}\leqslant v(x)$$

从而 $v\in{}^*\mathcal{H}(U)$.

反之，设 v 在 U 为超调和，而 V 是满足 $\Delta v(x)>0$ 的 $x\in U$ 全体所成的集。那未 V 是 U 的开

子集。将上一段的结论应用于-v 在 V 上的限制，推出-v 在 V 为超调和的，从而 v 在 V 为调和，即在 V 上有 $\Delta v=0$。因此 $V=\varnothing$，即 $\Delta v\leqslant 0$在 U 上成立。

1.5 **例** 定义函数 $N:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$如下：

$$N(x,y)=\begin{cases}\infty & ,\quad x=y\\ \|x-y\|^{2-n} & ,\quad x\neq y,\end{cases}\qquad \text{当 } n\geqslant 3\text{时；}$$

$$N(x,y)=\begin{cases}\infty & ,\quad x=y\\ -\log\|x-y\| & ,\quad x\neq y,\end{cases}\qquad \text{当 } n\geqslant 2\text{时；}$$

$$N(x,y)=-|x-y|\qquad \text{当 } n\geqslant 1\text{时；。}$$

若 $n\geqslant 3$（相应地，$n=2$）时，函数 N 称为 Newton 核（相应地，对数核）。对每个 $x\in\mathbb{R}^n$，函数 $N^x:y\longmapsto N(x,y)$在$\mathbb{R}^n$ 为超调和，在$C\{x\}$为调和。

事实上，先假定 $n\geqslant 2$，直接计算可推出 N^x 在$C\{x\}$为调和。进一步，$\lim\limits_{y\to x}N^x(y)=\infty$，故 N^x 为连续。设 $a\in\mathbb{R}^n$，$r>0$，$h=H_{a,r}(N^x|_{S_r(a)})$. 我们要证在 $B_r(a)$ 上有 $h\leqslant N^x$. 若 $x\overline{\in} B_r(a)$，则显然有 $h=N^x$ 在 $B_r(a)$成立，这因为 N^x 在$C\{x\}$为调和。现考虑 $x\in B_r(a)$的情形，那么 N^x 在 $S_r(a)$为连续的实值函数，故 h 在 $B_r(a)$ 为调和。特别，存在 $r'>0$使得 $\overline{B}_{r'}(x)\subset B_r(a)$且 $\overline{B}_{r'}(x)$上有 $N^x\geqslant h$，在开集 $B_r(a)\setminus\overline{B}_{r'}(x)$上考虑函数 N^x-h 并应用(1.1)节的结论可推出 $N^x\geqslant h$。接着，假定 $x\in S_r(a)$，那么对每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$h_n=H(\inf\ (N^x,n)|_{S_r(a)}).$$

由(1.1)知 $N^x-h_n\geqslant 0$对每个 n 成立，从而

$$h=\sup h_n\leqslant N^x$$

最后，假设 $n=1$，$a\in\mathbb{R}$，$r>0$. 那未 $B_r(a)=]a-r,a+r[$，$S_r(a)=\{a-r,a+r\}$，而 Poisson 积分的定义缩简为

$$H_{a,r}f(x)=\frac{(a+r)-x}{2r}f(a-r)+\frac{x-(a-r)}{2r}f(a+r).$$

因此，一个函数 $f:U\to]-\infty,+\infty[$在$\mathbb{R}$的一个开子集 U 上为超调和的当且仅当它在 U 的每个构成子间上为凹函数。特别，每个函数 $y\longmapsto -|x-y|$在$\mathbb{R}$为超调和，在$C\{x\}$为调和。

1.6 **推论** $n\geqslant 3$时，$^*\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$是线性分离的(Linearly separating).

证明 若 $x,y\in\mathbb{R}^n$，$x\neq y$ 且 $\lambda\in\mathbb{R}_+$，那末 $N^x(x)=\infty\neq\lambda N^x(y)$.

1.7 **练习**

1. 对所有 $x,y\in B_{r/2}(a)$及 $f\in\mathcal{B}^+(S_r(a))$，

$$H_{a,r}f(x)\leqslant 3^{n+1}H_{a,r}f(y).$$

2. 设 U 为$\mathbb{R}^n$ 的一个区域，(h_n)是 $\mathcal{H}(U)$中的增加列，满足 $\sup h_n(x_0)<\infty$，对某个 $x_0\in U$成立。那未 $\sup h_n\in\mathcal{H}(U)$。

3. 设 U 是$\mathbb{R}^n$ 的一个区域，K 为 U 的紧子集。那末存在一个常数 $c>0$使得 $h(x)\leqslant ch(y)$对每个 $h\in\mathcal{H}^+(U)$及任意一点 $x,y\in K$成立。

§2 Brown 半群

对每个 $t>0$，定义$\mathbb{R}^n(n\geqslant 1)$上的一个实函数 g_t 为

$$g_t(x):=(\frac{1}{2\pi t})^{n/2}e^{-\frac{\|x\|^2}{2t}};$$

又定义$\mathbb{R}^n$ 上的一个核 P_t 为

$$P_t f = g_t * f$$

即

$$P_t f(x) = \int g_t(x-y)f(y)\lambda^n(dy), \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

对每个 $f\in B^+(\mathbb{R}^n)$成立。注意到，对每个 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$P_t 1(x) = (\frac{1}{2\pi t})^{n/2}\int e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}\lambda^n(dy)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left((\frac{1}{\sqrt{2\pi t}})\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x_i-y_i)^2}{2t}}dy_i\right) = 1,$$

即 $P_t 1 = 1$，进一步可证

$$P_s P_t = P_{s+t}$$

对每个 $s,t>0$成立。事实上，由于 $g_s*(g_t*f)=(g_s*g_t)*f$，我们只要证下面式子成立即可：

$$g_s * g_t = g_{s+t}.$$

显然，只要就 $n=1$的情况证明之即可。这时，对每个 $x\in\mathbb{R}$，

$$g_s * g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{2s}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2s}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s+t}{2st}y^2+\frac{x}{s}y}dy$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s+t}{2st}y^2+\frac{x}{s}y}dy = e^{\frac{tx^2}{2s(s+t)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{t}{s+t}x)^2}dy$$

$$= \sqrt{2\pi\frac{st}{s+t}}e^{\frac{tx^2}{2s(s+t)}}$$

因为

$$-\frac{x^2}{2s}+\frac{tx^2}{2s(s+t)} = -\frac{x^2}{2s}(1-\frac{t}{(s+t)}) = -\frac{x^2}{2(s+t)},$$

故得

$$g_s * g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s+t)}}e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}} = g_{s+t}(x).$$

因为具有上述性质，这族$(P_t)_{t>0}$称为**半群**，它是$\mathbb{R}^n$ 上的 Brown **半群**。

2.1 **引理** 对每个 $t>0, x\in\mathbb{R}^n$ 及$1\leqslant i\leqslant n$，

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(x) = -\frac{x_i}{t}g_t(x),$$

$$\frac{\partial^2 g_t}{\partial x_i^2}(x) = \left(\frac{x_i^2}{t^2}-\frac{1}{t}\right)g_t(x),$$

$$\frac{\partial g_t}{\partial t}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|^2}{t^2}-\frac{n}{t}\right)g_t(x),$$

特别，

$$\frac{1}{2}\Delta g_t=\frac{\partial}{\partial t}g_t$$

证明 显然易见。

2.2 **命题** 对每个 $f\in B_b(\mathbb{R}^n)$ 及每个 $t>0$，有 $P_tf\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 及

$$\frac{1}{2}\Delta P_tf=\frac{\partial}{\partial t}P_tf$$

证明 因由(2.1)节知$\frac{1}{2}\Delta g_t=\frac{\partial}{\partial t}g_t$，故只需验证积分与微分的次序的交换是可行的即可。令 $r>0$并定义 $g\in B^+(\mathbb{R}^n)$如下

$$g(y)=\begin{cases}(\frac{r}{2\pi})^{n/2} & , \quad y\in B_{2r}(0)\\ \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{n/2}e^{-\frac{\|y\|^2}{8r}} & , \quad y\in \complement B_{2r}(0).\end{cases}$$

设 $x\in B_r(0)$，$\frac{1}{r}<t<r$ 若 $y\in\complement B_{2r}(0)$，则$\|y\|\leqslant 2\|x-y\|$，

从而

$$-\frac{\|x-y\|}{2t}\leqslant-\frac{\|y\|^2}{8r}.$$

因此对每个 $y\in\mathbb{R}^n$，

$$g_t(x-y)\leqslant g(y).$$

进一步，$\|y-x\|\leqslant r+\|y\|$，从而

$$\left|\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(x-y)\right|\leqslant r(r+\|y\|)g(y)$$

$$\left|\frac{\partial^2 g_t}{\partial x_i^2}(x-y)\right|\leqslant r^2(r+\|y\|)^2g(y)$$

因为 $y\longmapsto(r+\|y\|)^2g(y)$可积，由此推出命题成立。

2.3 **命题** 设 $f\in B_b(\mathbb{R}^n)$。那末对每个 $z\in\mathbb{R}^n$

$$\liminf_{x\to z}f(x)\leqslant\liminf_{(x,t)\to(z,0)}P_tf(x)\leqslant\limsup_{(x,t)\to(z,0)}P_tf(x)\leqslant\limsup_{x\to z}f(x).$$

若 f 是一致连续的，则 $\lim\limits_{t\downarrow 0}\|P_tf-f\|=0$.

证明 应用变换 $y\longmapsto\frac{y-x}{\sqrt{t}}$，对每个 $t>0, x\in\mathbb{R}^n$ 可推得

$$P_tf(x)=\int g_1(y)f(\sqrt{t}\,y+x)\lambda^n(dy).$$

因此据 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to z}f(x)&=\int g_1(y)\liminf_{(x,t)\to(z,0)}f(\sqrt{t}\,y+x)\lambda^n(dy).\\&\leqslant\liminf_{(x,t)\to(z,0)}\int g_1(y)f(\sqrt{t}\,y+x)\lambda^n(dy).\\&=\liminf_{(x,t)\to(z,0)}P_tf(x).\end{aligned}$$