工科数学

主编 严尚安

上

科学技术文献出版社

前　言

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会“关于工科数学改革的建议”的思路，立足于培养21世纪工程技术人才数学素质的需求而编写的。全书具有时代的气息，与传统的高等数学比较有以下显著特点：本书结构新、内容精，将分析、代数、几何、数学模型、数值计算方法等内容相互渗透，有机结合；增强了现代数学内容，提高了起点，并为内容延伸提供了接口；将微分学与积分学独立成篇，减少了内容的重复；增加了数学应用及学生实践环节的内容，并将计算运行框图引入到工科数学之中。

本书共分十九章，其主要内容为代数与几何、微分学、积分学、数学模型初步、数值计算方法初步等。本书在研讨和试用期间，得到了重庆市数学学会同行的大力支持，重庆大学赵中时教授，后勤工程学院唐钰其教授对本书提出了宝贵意见，后勤工程学院教务部沈室钢副教务长给予了大力支持，后勤工程学院唐真、余建民、邓文华等同志进行了前期论证与部分内容编写工作，在此深表谢意。

本书由后勤工程学院江兆嘉教授主审。

本书可作为工科各专业本科数学教材及其他专业数学参考用书，也可作为高校教师教学和工程技术人员自学参考用书。

本书参考学时(220~250)，“*”部分根据专业选学。

编　者　1997年8月于重庆

目　　录

第一章　集合　映射　函数

本章介绍工科数学最基本的概念——函数，函数是工科数学的研究对象．为了使工科数学更好地与现代数学以及应用数学接轨，我们将从现代数学最基本的两个概念——集合、映射出发并进行讨论．这样安排，对于打牢基础、拓广知识是颇为有益的．

第一节　集　合

一、集合

集合是从生活经验中抽象出来的一个最基础的数学概念．我们对于生活中“集合”这个事实并不陌生，如一堆苹果的全体，一批玩具的全体，教室里学生的全体等等，都构成一个集合．数学上所谓**集合**是指具有某种确定性质的对象的全体．组成集合的对象称为该集合的**元素**．

如果用 A 代表一个集合，a 表示这个集合的元素，我们便说 a 属于 A，记为 $a\in A$，否则，便说 a 不属于 A，记为 $a \overline{\in} A$，或 $a \notin A$．

集合有两种表示法，一种是列举法，就是把该集合的所有元素一一列举出来写在一个花括号内．如

$$A=\{a,b,c,d\}=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\};$$

自然数集 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$．

另一种是条件定义法，就是将具有条件 $P(x)$ 的元素所构成的集合表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 所具有的条件 }P(x)\},$$

其中 x 是该集合中的一个代表元素．如方程 $x^2-1=0$ 的解的集合可以表示为

$$A=\{x \mid x^2-1=0\}.$$

又如，中心在原点半径为 1 的圆周上的点的全体所组成的集合 A 可记为

$$A=\{(x,y) \mid x、y\text{ 是实数}, x^2+y^2=1\}.$$

例 1　有理数的全体构成一个集合，叫做有理数集，常用 Q 表示．实数的全体构成实数集，常用 R 表示．整数的全体构成的集合，常用 Z 表示．

例 2　设

$$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1, y-x^2\geqslant 0\}$$

它表示在 xoy 平面上，单位圆 $x^2+y^2=1$ 的内部与抛物线 $y=x^2$ 的上方所围图形（图 1－1 阴影部分）及其边界的点所构成的集合．

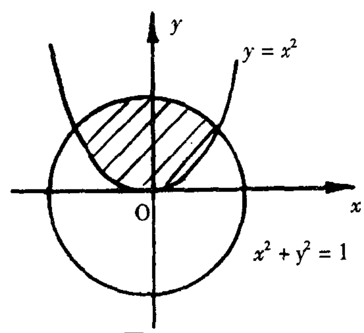

图 1－1

设有集合 A、B，若 A 中的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或说 A 包含在 B 内，记作 $A\subset B$．例如，自然数集

N 是有理数集 Q 的子集，而有理数集是实数集 R 的子集，则 $N \subset Q \subset R$.

若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称集合 A 与 B **相等**，记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 但 $A \neq B$，则称集合 A 为集合 B 的**真子集**.

不含任何元素的集合叫做**空集**，记为 ϕ.

显然空集是任一集合的子集，即对于任意集合 A，有 $\phi \subset A$.

下面引进实数集 R 中区间与邻域的概念.

设 a、b 为两个实数，且 $a < b$，满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**闭区间**，记为 $[a, b]$，即 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做**开区间**，记为 (a, b)，即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$；类似地有**半开区间** $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 以及 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$. 上述区间中 a、b 分别叫做区间的左、右端点，$b - a$ 则是区间的长度. 区间可用数轴表示，如图 1－2 所示.

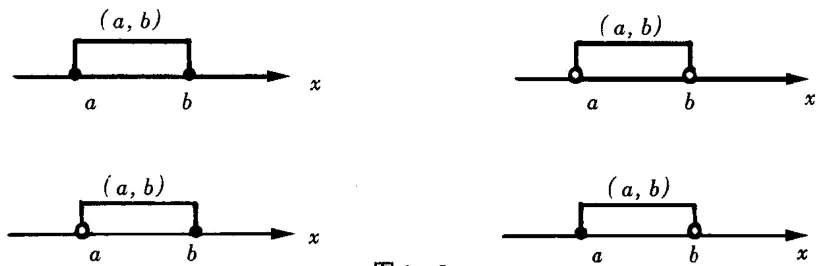

图 1－2

全体实数 x 组成的集合 $-\infty < x < +\infty$，记为 $(-\infty, +\infty)$；不小于 a 的实数 x 组成的集合 $a \leqslant x < +\infty$，记为 $[a, +\infty)$；小于 b 的实数 x 组成的集合 $-\infty < x < b$，记为 $(-\infty, b)$，这一类区间叫做**无限区间**.

设有 a 与 δ 两个实数，且 $\delta > 0$，满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的实数 x 组成的集合叫做点 a 的 **δ 邻域**，记为 $N_\delta(a)$，其中 a 叫做邻域的中心，δ 叫邻域的半径. 由于 $|u| < \delta$ 等价于 $-\delta < u < \delta$，上式令 $u = x - a$，则有 $-\delta < x - a < \delta$，即 $a - \delta < x < a + \delta$，它可用开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 表示. 这就是说，a 的 δ 邻域就是 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 的点 x 的集合，其数轴表示如图 1－3.

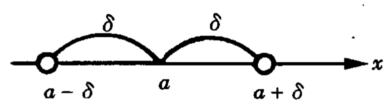

图 1－3

二、集合的运算

设有 A、B 两个集合，由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称并），记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

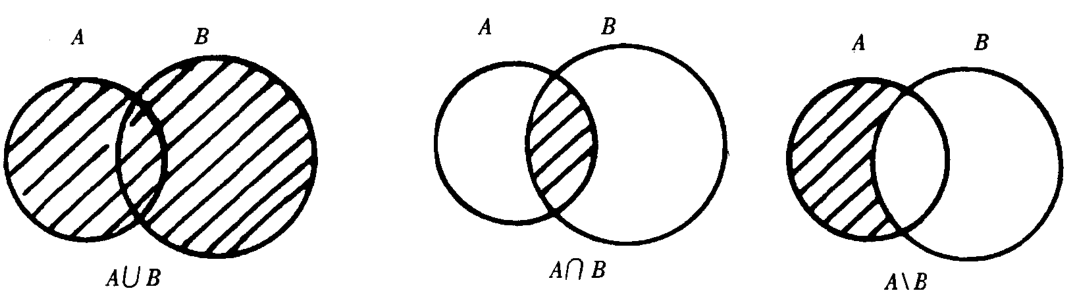

图 1－4

设集合 A、B，由同时属于 A 与 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（简称交），记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}.$$

若 $A\cap B=\phi$，则称 A、B **不相交**，若 $A\cap B\neq\phi$，则说 A 与 B **相交**.

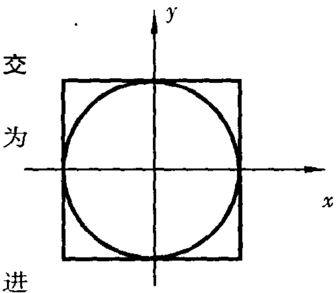

图 1-5

设集合 A、B，由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**（简称差），记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 但 } x\notin B\}.$$

并集、交集、差集运算，可用图 1-4 表示．

如果我们所讨论的问题在一个大集合 X（常称为基本集）中进行，所研究的其它集合都是 X 的子集，此时称 $X-A$ 为 A 的**余集**（或补集），记作 $\overline{A}$ 或 A^c，即

$$\overline{A}=X-A=\{x\mid x\in X\text{ 但}\notin A\}.$$

例 3　设基本集 $X=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数}\}$，$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$，如图 1-5 所示，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$\overline{A}$.

解　$A\cup B=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$

$=B$

$A\cap B=A$.

$\overline{A}=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2>1\}$　即 xoy 平面圆 $x^2+y^2=1$ 的外部的点的集合．

三、集合运算的性质

定理 1　设 A、B、C 为三个任意集合，则下列法则成立：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$

(4) 传递律　$A\subset B$，$B\subset C$ 则 $A\subset C$

(5) 等幂律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

(6) 吸收律　$A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$，

$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$

若 $A\subset B$　则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$.

证　仅以分配律中第一式为例，其余各式可类似证明．

设 $x\in(A\cup B)\cap C\Leftrightarrow x\in A\cup B$，且 $x\subset C\Leftrightarrow x\in A$，且 $x\in C$ 或 $x\in B$，且 $x\in C\Leftrightarrow x\in A\cap C$、或 $x\in B\cap C\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

定理 2（对偶原理）　设 A、B 都是基本集 X 的子集，则 $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

即：两个集合并集的余集等于每个集合的余集的交集；两个集合交集的余集等于每个集合的余集的并集．

证　$x\in\overline{(A\cup B)}\Leftrightarrow x\notin(A\cup B)\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in(\overline{A}\cap\overline{B})$

又由于　$\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}=\overline{(\overline{A})}\cap\overline{(\overline{B})}=A\cap B$

则有　$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

对于 n 个集合，对偶原理为

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{n})A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

四、笛卡尔积集

定义 1 设 A,B 为两个集合，由 $a\in A$ 及 $b\in B$ 的一切有序元素对 (a,b) 组成的集合，叫集合 A 与集合 B 的**笛卡尔积集**(直积集)，记作 $A\times B$，读为 A 叉 B. 即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

其中 a 为 (a,b) 的第一个坐标，b 为 (a,b) 的第二个坐标；A 为 $A\times B$ 的第一个**坐标集**，B 为 $A\times B$ 的第二个**坐标集**.

集合 X 与自身的笛卡尔积 $X\times X$ 常记作 X^2.

例 4 设 $R=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，则 $R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R)\}$. R 为坐标轴上一切点的集合，R^2 为坐标面 xoy 上一切点的集合.

例 5 设 $A=\{0,1\}$，$B=\{a,b,c\}$ 则

$$A\times B=\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\},$$
$$B\times A=\{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}.$$

这个例题说明，只要 $A\neq B$(A、B 为非空集)，便有 $A\times B\neq B\times A$.

定义 2 对于任意 n 个集合 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，集合 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in X_1,x_2\in X_2,\cdots,x_n\in X_n\}$ 称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**笛卡尔积**，记作 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. 其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为有次序的 n 元素组，x_i，$1\leqslant i\leqslant n$，称为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 i 个坐标，X_i，$1\leqslant i\leqslant n$，称为笛卡尔积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的第 i 个坐标集.

n 个集合 X 的笛卡尔积 $\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n次}$ 记作 X^n

例如 $R^n=R\times R\times\cdots\times R$ 即为所有的有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成的集合，它是实数集 R 的 n 次直积.

我们常用到 R^2 平面集上的区域的概念. 为此，我们介绍下面的有关知识.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 R^2 中的一定点，$\delta>0$ 为一常数，则 R^2 中所有与 P_0 距离小于 δ 的点的集合称为点 P_0 的 δ **邻域**，记为 $N_\delta(P_0)$，即

$$N_\delta(P_0)=\{P\mid |P-P_0|<\delta\}$$
$$=\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}.$$

设 A 为 R^2 的一个子集，P 为 R^2 中一点：如果存在一个常数 $\delta>0$，使得

$$N_\delta(P)\subseteq A$$

则称 P 为 A 的一个**内点**，如果存在一个常数 $\delta>0$ 使得

$$N_\delta(P)\cap A=\phi$$

则称 P 为 A 的一个**外点**；如果 P 的任一邻域都含有 A 的点又含有 A 以外的点，则称 P 为 A 的一个**边界点**. A 的全体边界点的集合叫做 A 的**边界**.

设 A 为 R^2 的一个子集，如果 A 的每一个点都是它的内点，则 A 称为一个**开集**，空集 ϕ 规定为开集.

设 A 为 R^2 的子集，如果 A 中任意两点，都能用一条包含于 A 中的折线连接起来，则称 A 为**连通集**. 连通的开集称为**区域**(或开区域)，区域与其边界的并集称为**闭域**.

如果集合 A 可以被包含在一个以原点为中心的圆内，则称 A 为**有界集**，否则称为**无界集**.

上述邻域、内点、开集、区域等概念可以完全类似地推广到 R^n 空间中去. 其中 P_0 的 δ 邻域 $N_\epsilon(P_0)$ 定义为：

$$N_\epsilon(P_0)=\{P\mid P\in R^n,|P-P_0|<\delta\}$$

设 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$P_0=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$N_\epsilon(P_0)=\{P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\mid (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2<\delta^2\}$$

它是以点 P_0 为中心,以 δ 为半径的 n 维开球 .

习　题1-1

1. 设 $A=\{1,2,7,8\}$, $B=\{n\mid n^2<50, n\in N\}$, $C=\{n\mid 0<n\leqslant 30$ 且 $\frac{n}{3}\in N\}$,求 $B\setminus(A\cup C)$,$(B\cap C)\setminus A$.

2. 已知 A,B,C,Z^* 都是整数集 Z 的子集,$A=\{n\mid n=3m, m\geqslant 4\}$;$B=\{n\mid n=2m, |m|\geqslant 1\}$;$C=\{n\mid |n|\leqslant 10\}$,$Z^*=Z\setminus\{0\}$. 试用 A、B、C、Z^* 的运算,表达下列集合:

(1) $\{n\mid n=6m, m\geqslant 2\}$;

(2) 奇整数组成的集合;

(3) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}$.

3. 假设 $A=\{x\in R\mid 0<x<1\}$, $B=\{x\in R\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$. 求 $A\cap B$,$A\cup B$,$A\setminus B$,$B\setminus A$.

4. 设 Z 为一基础集,A、B 均为其子集,证明:

(1) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$;

(2) $A\setminus B=(A\cup B)\setminus B=A\setminus(A\cap B)$;

(3) 若 $A\cup B=Z$,$A\cap B=\phi$,则 $\overline{B}=A$,$\overline{A}=B$.

5. 证明等式:

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(2) $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$;

$A\cup B=A\cup(\overline{A}\cap B)$.

(3) $\overline{\overline{M}}=M$;

$N\subset M\Leftrightarrow\overline{M}\subset\overline{N}$.

6. 设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$, $B=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$, $C=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$. 在平面直角坐标系内画出下列集合:

(1) $A\cup(B\times C)$;　(2) $A\cap(B\times C)$;

(3) $A\setminus(B\times C)$;　(4) $(B\times C)\setminus A$.

7. 设 $X=\{a,b\}$, $Y=\{c,d,e\}$,试列举 $X\times Y$ 的所有成员 .

8. 设 X_i 是由 m_i 个不同元素构成的集合,$1\leqslant i\leqslant n$. 问 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的元素有多少?

9. 设 X、Y 为集合,证明:

(1) 设 $X\times\emptyset=\emptyset\times X=\emptyset$.

(2) 若 $X\neq\emptyset$,$Y\neq\emptyset$,则 $X\times Y\neq\emptyset$.

(3) 若 $X\neq\emptyset$,$Y\neq\emptyset$,则 $X\times Y=Y\times X$ 当且仅当 $X=Y$.

10. 用区间表示下列不等式:

(1) $2<x\leqslant 6$;

(2) $|x-3|\leqslant 4$;

(3) $|1+3x|\leqslant 1$;

(4) $|x-1|>2$.

第二节　映　射

一、关系

定义 1　设 A、B 为集合，A 与 B 的笛卡儿积集 $A\times B$ 的每一子集 $r\subset A\times B$ 都称为从 A 到 B 中的**关系**，若元素 a、b 之间有关系 r，记作 arb，或 $(a,b)\in r$. $(a,b)\in r$ 中的第一个元素 a 允许取值所有元素组成的集合叫做关系 r 的定义域，记为 $\mathrm{dom}(r)$ 或 $D(r)$；第二个元素 b 允许取值所有元素组成的集合叫做关系 r 的**值域**，记为 $\mathrm{ran}(r)$ 或 $R(r)$，即

$$\mathrm{dom}(r)=\{a\mid a\in A,\exists\, b\in B,\text{使得 } arb\},$$

$$\mathrm{ran}(r)=\{b\mid b\in B,\exists\, a\in A,\text{使得 } arb\}.$$

例 1　实数集上的"="关系可定义为

$$\text{“}=\text{”}=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为一切实数},x=y\}.$$

$$\mathrm{dom}(\text{“}=\text{”})=\mathrm{ran}(\text{“}=\text{”})=\text{实数集 } R.$$

若关系"="中的元素 (x,y) 看作直角坐标系中的点，则关系"=" $\subset R^2$ 是直线 $y=x$.

同理，实数集上的关系">"可定义为

$$\text{“}>\text{”}=\{(x,y)\mid x、y\in R,x>y\},$$

作为直角坐标系上的点集，关系">"是图 1－6 中阴影部分的点所组成的半平面.

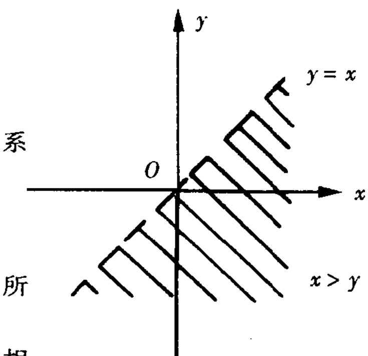

图 1－6

类似地，我们可以定义两直线平行或垂直的关系，两三角形相似的关系，人口集合中的性别相同或肤色相同等关系.

定义 2　设 r 为从集合 x 到集合 y 中的关系(即 $r\subset x\times y$)，s 为从集合 y 到集合 z 的关系(即 $s\subset y\times z$)，对于 $x\in X$ 及 $z\in Z$，存在 $y\in Y$，使得 $(x,y)\in r$ 且 $(y,z)\in s$. 这时通过 Y，从 X 到 Z 中的关系，称为关系 r 与关系 s 的**复合**(或合成)，记作 $s\circ r$，即

$$s\circ r=\{(x,z)\mid \exists\, y\in Y,\text{使得 } xry,ysz\}.$$

二、映射

定义 3　设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系，如果，对任一 $x\in X$，通过关系 f 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为(从 X 到 Y 的)**映射**. 记作

$$f:X\to Y,x\mapsto y.$$

定义中包含两层意思，即：(1)对于每一个 $x\in X$，有 $y\in Y$，使得 xfy(即 $(x,y)\in f$)；(2)若有 xfy_1，xfy_2，则 $y_1=y_2$.

对于每一个 $x\in X$，使得 xfy 的那个唯一的 $y\in Y$，称为点 X 的**象**或**值**，记为 $f(x)$. 对于每一个 $y\in Y$，如果 $x\in X$，使得 xfy，则称 x 是 y 的**原象**，记作 $f^{-1}(y)$. 集合 X 叫映射 f 的**定义域**，记为 $\mathrm{Dom}(f)$ 或 $D(f)=X$；象 $y=f(x)$ 所组成的集合叫做映射 f 的**值域**，记为 $R(f)$，或 $f(x)(\subset Y)$，即

$$\mathrm{Ran}f=f(X)=\{y\mid y\in Y,\exists\, x\in X\text{ 使 } y=f(x)\}.$$

定义 4　设 f 是从 X 到 Y 的映射.

(1) 如果 $\forall\, x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，称 f 为**一一映射或单射**，这时 $D(f)$ 中每一个元素对应唯一的象，$R(f)\subseteq Y$ 中的每一个象，也只对应唯一的原象；

(2) 如果 $R(f)=Y$，称 f 是从 X 到 Y **上的映射**或**满射**，否则，即 $R(f)$ 是 Y 的真子集，就称 f

是从 X 到 Y 的**映射或内射**；

(3) 如果 f 既是一一映射又是满射，则称 f 是从 X 到 Y **上的一一映上或双射**．通常所说的一一对应就是指一一映上的．

例 2　映射 $f: N \to N$ 定义为

$$\forall n \in N, n \mapsto f(n) = 2n$$

即 N 为自然数集，$\forall n$ 表示任意给定义一个 n，$R(f)$ 为全体偶数集，则 f 是 N 到 N 的一一映射，但 $R(f) \neq N$，所以不是满射．

定义 5　设 f 是从 X 到 Y 上的一一映射，则 $\forall y = f(x) \in Y$ 都对应着唯一的 $x \in X$，因而得到一个从 Y 到 X 上的一个映射，称为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，即

$$f^{-1}: Y \to X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x$$

这时 $R(f^{-1}) = D(f)$，而 $D(f^{-1}) = R(f)$．

定义 6　设有两个映射 f 与 g，$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$．若对于任一 $x \in X$，通过 f 有唯一的 $y = f(x) \in Y$，$y \in f(x)$ 又通过 g 而对应着唯一的 $z = g(y) = g(f(x)) \in Z$，这样就确定了一个从 X 到 Z 的新映射，称为 f 与 g 的**复合映射**，记作 $g \circ f$，即

$$g \circ f: X \to Z.$$

例 3　设 X 为某顾客到购物中心购得以重量计价的物品的集合，Y 表示物品重量集（单位克），Z 为物品价值集（单位元）．映射

$$f(\text{秤重量}): X \to Y;\ g(\text{计价}): Y \to Z.$$

则 $\forall x \in X, x \mapsto f(x) = y \in Y, y \mapsto g(y) = g \circ f(x)$

物品　　　物品重量　　　　　　价值

于是复合映射　$g \circ f: X \to Y, x \mapsto (g \circ f)(x)$ 为从物品到价值的映射．

例 4　在集合 Z 上，定义 $f(x) = x, x \in Z$，即 f 把 Z 中的每个元素都映射为自身，这种映射称为 Z 上的**恒等映射(或单位映射)**，通常记作 I_x 或 I．显然 I 是一一映上的．

例 5　设 f 和 g 都是 Z 到自身的映射，且

$$f: n \mapsto n+1, g: n \mapsto n-1,$$

则 $g \circ f = f \circ g = n$，即 $f(g)$ 和 $g(f)$ 都是 Z 的恒等映射．f 是可逆的，其逆映射是 g．同样 f 也是 g 的映射．

例 6　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实常数，如果对于任意的 $Z = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$，定义

$$f(Z) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

则称 f 是 R^n 到 R 的线性映射（也称 f 是 R^n 上的线性函数）．

集合 Z 到自身的映射叫 Z 的**变换**，Z 到自身的双射叫 Z 的一一变换，有限集上的一一变换叫**置换**．

例 7　$y = ax$ 是 R 到 R 的一个变换，根据例 6，它是一个线性变换．

类似地，有 $f: Z \in R^n \to Y \in R^n$ 的映射：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

是 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ 到 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$ 的一个线性变换．

习　题 1－2

1. 设 $Z = \{a, b, c\}$，$Y = \{d, e, f, g\}$．$r = \{(a,d), (c,e), (b,f)\}$ 为从 Z 到 Y 中的关系．令 $A = \{a, c\}$，$B = \{d, e, f\}$．试求 $r(A)$，$r^{-1}(B)$，$D(r)$，$R(r)$．

2. 求下列映射的定义域、值域并指出映射是否为单射、双射．

(1) $y=x^3$, $R\to R$;

(2) $y=\mathrm{tg}x$, $R\to R$;

(3) $y=\mathrm{tg}x$, $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to R$;

(4) $y=\sec x$, $[0,\pi]\to R$;

(5) $a_n=\frac{1}{n}$, $N\to R$;

(6) $y=\log_{1/2}x$ $R\to R$;

(7) A 为偶数集，$f(2n)=n$，$A\to N$.

3. 设 $A=\{x,y,z\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，定义

f: $x\to a, y\to b, z\to c$;

g: $x\to a, y\to d, z\to a$;

φ: $x\to a, z\to c$.

问 f、g、φ 是否为 A 到 B 的映射．

4. 设映射 $f:Z\to Y$，$g:Y\to Z$. 试证明 g 是 f 的逆映射的充分必要条件是 $g\circ f=I_y$ 和 $f\circ g=I_x$ 同时成立．

5. 足球联赛规定，每支球队都在主、客场与另一支球队打两场比赛．设有甲、乙、丙三支足球队，用甲 r 乙 =(甲、乙)定义一种关系，表示甲队在主场，乙队在客场进行比赛．设 $A=\{$甲，乙，丙$\}$，试求 $r(A)$，问这样定义的关系是否是一个映射?

第三节 函 数

一、函数的概念

如果第二节中映射的定义(定义 3)中的 X、Y 为**实数直积集**，就得到我们所讨论的函数概念．一般地说，设 X 是 n 次直积 R^n 内的一个子集，f 是从 X 到 $Y\subset R^m$ 的映射，即：

$$f:X\to Y, X\subset R^n, Y\subset R^m$$
$$x\mapsto y$$

则称 f 为**向量值函数**．这里 $x\in X$ 是 R^n 中的一个点 $x(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，x 的象 y 是 R^m 中的一个向量 $y\doteq(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$X$ 称为 f 的定义域，y_j 称为 y 的第 j 个坐标，本书中我们主要研究 $Y\subset R$ 的实值函数，有下列概念．

定义 1 设 f 是从 X 到 Y 的映射，即 $f:X\to Y$. 若 X、Y 都是实数集，$X\subset R$，$Y\subset R$，则称映射 f 为**一元实值函数**，简称**一元函数**，或**函数**．记为 $f:X\to Y$，$x\mapsto y$，或 $x\mapsto f(x)$，或 $y=f(x)$. 其中 $X=D(f)$ 称为 f 的**定义域**；$R(f)$ 称为 f 的**值域**；x 称为**自变量**，它是 y 的原象；y 称为**因变量**，它是 x 的象．

定义 2 设 f 是从 X 到 Y 的映射：若 $X\subset R^n$，$Y\subset R$，即 $f:X\to Y$，$X\subset R^n$，$Y\subset R$，$x\mapsto y$，则称映射 f 为 **n 元函数**；若 $X\subset R^2$，$Y\subset R$，则称映射 f 为**二元函数**．

二元以及二元以上的函数统称为**多元函数**．

设有函数 $f:A\to R^1$ 和 $g:B\to R^1$，如果 $A=B$ 且对一切 $x\in A$，都有 $f(x)=g(x)$，则称函数 f 与函数 g **相等**，记作 $f(x)=g(x)$.

函数可以进行四则运算与复合，即

设有 $f:A\to R^1$，则常数 K 与函数 f 的乘积定义为 $kf:A\to R^1$，$x\mapsto kf(x)$

函数 $f:A\to R^1$ 与 $g:B\to R^1$，$C=A\cap B$，则函数 f 与 g 的和、差、积分别定义为

$f \pm g: C \to R^1, x \mapsto f(x) \pm g(x)$，即$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$；

$f.g: C \to R^1, x \mapsto f(x)g(x)$，即$(fg)(x) = f(x)g(x)$.

若 $B_1 = \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$，$C_1 = A \cap B_1$，则函数 f 与 g 的商定义为

$$\frac{f}{g}: C_1 \to R^1, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}，即(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

设函数 $g: A \to B, x \mapsto g(x) = u$ 与函数$f: B \to C, u \mapsto f(u) = y$，则复合关系 $f \circ g: A \to C$，$x \mid (f \circ g)(x) = y$，称为**复合函数**，记作

$$y = f[g(x)]$$

其中 u 称为中间变量．

函数 $f: A \to B, x \mapsto y$ 作为一个映射，其逆映射 $f^{-1}: B \to A, y \mapsto f^{-1}(y) = x$，称为函数 f 的**反函数**．按照习惯，我们把 $y = f(x)$反函数 $x = f^{-1}(y)$写作 $y = f^{-1}(x)$．如正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数，即反正弦函数写作 $y = \arcsin x$ 而不写为 $x = \arcsin y$．

按照定义，我们所说的函数就是指映射 f，但习惯上，常将一元函数表示为 $y = f(x)$，将多元函数表示为 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，二元函数表示为 $z = f(x, y)$．本书中，我们也采用这种表示形式．

二、一元函数

一元函数 $y = f(x)$中定义域、值域与对应法则是构成函数 $y = f(x)$的三要素．求函数的定义域就是确定自变量 x 的取值范围．函数定义域确定的办法是：在实际问题中，根据问题的实际意义来确定．如圆面积 A 和半径 r 的关系为$A = \pi r^2$，则 r 的定义域为 $0 \leqslant r < +\infty$，即圆的半径不可以取负值．在用数学式子表示的函数表达式中，往往根据数学表达式有意义的自变量所允许的取值范围来确定定义域．一般用区间来表示定义域．

例 1　求 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \lg(4 - x^2)$的定义域．

解　由于在实数范围内负数不能开平方，所以$\sqrt{x^2 - 1}$中的 $x^2 - 1 \geqslant 0$，为了使分式有意义，分母不能为零，即 $x^2 - 1 \neq 0$，所以有 $x^2 - 1 \geqslant 0$，即 $x^2 > 1$，或$|x| > 1$，即 $x < -1, x > 1$．这样 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$中 x 的允许取值范围为$(-\infty, -1)$与$(1, +\infty)$；

又当$4 - x^2 \leqslant 0$时，对数无意义，所以，$4 - x^2 > 0$ 即 $x^2 < 4$，或$|x| < 2$，即$(-2, 2)$．

取$(-\infty, -1)$、$(1, +\infty)$与$(-2, 2)$的交集得到函数的定义域为$(-2, -1)$与$(1, 2)$．

例 2　设 $u = g(x) = \sin x, f(u) = \lg u$　求复合函数 $f[g(x)]$及其定义域．

解　复合函数为 $y = f[g(x)] = \lg[\sin x]$，其定义域为

$$\begin{aligned} D &= \{x \mid \sin x > 0\} \\ &= \{x \mid x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}. \end{aligned}$$

显然函数 g 将$A = (-\infty, +\infty)$映射到 $B = [-1, 1]$，函数 f 将 $B_1 = (0, +\infty)$映射到 $C = (-\infty, +\infty)$．取复合函数的定义域只能取使 $B \cap B_1 = (0, 1]$有意义的 X 的取值范围，即$\{x \mid x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$．

上述两例说明：求函数定义域时使数学表达式有意义的含义是指：分母不能为零；偶次根式内必须非负；对数的真数必须是正数；反正弦、反余弦的自变量的绝对值不能超过 1 等等．求复合函数 $y = f(u), u = \varphi(x)$即 $y = f[\varphi(x)]$的定义域时，要先确定函数 $u = \varphi(x)$的值域 B 与函数$y = f(u)$的定义域 B_1 的交集，再利用 $B \cap B_1$ 来确定 X 的允许取值范围．如果 $B \cap B_1 = \phi$，则 $y = f(u), u = \varphi(x)$就不能构成复合函数．

在函数定义中，对应法则 f 是至关重要的．对应法则就是因变量 y 与自变量 x 之间的关系．据此，自变量 x 取定后，因变量 y 就有唯一确定的值与之对应．函数 $y = f(x)$的表示法很多，常见的有三种：