

工科数学

主编 严尚安

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}$$

而函数在闭区间上必有最大值和最小值等

$$f(\xi) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$$

由于 $f(\xi)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 因
还是负的, 只要 $\xi + \Delta x$ 在 $[a, b]$ 上, 总有

$$\begin{aligned} & \xi + \Delta x \leq f(\xi), \\ & f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0. \end{aligned}$$

当 $\Delta x > 0$ 时,

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0,$$

, 根据函数极限的性质 (第一章第四节定理 2),

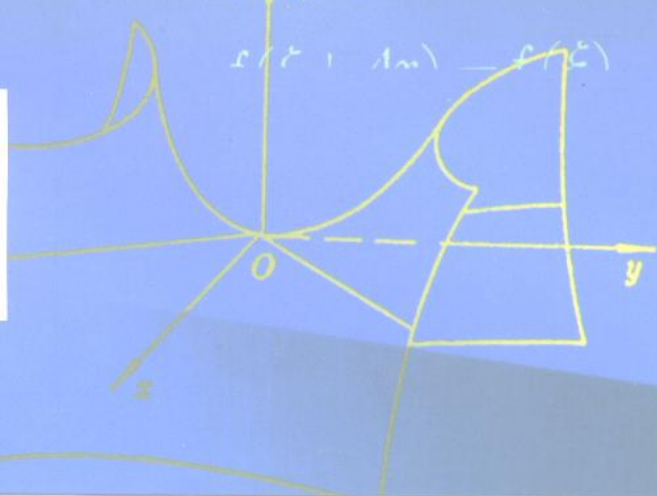
$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0,$$

同理, 当 $\Delta x < 0$ 时,

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi)$$



C



科学技术文献出版社

前 言

本书是根据国家教委工科数学课程指导委员会“关于工科数学改革的建议”的思路,立足于培养 21 世纪工程技术人才数学素质的需求而编写的。全书具有时代的气息,与传统的高等数学比较有以下显著特点:本书结构新、内容精,将分析、代数、几何、数学模型、数值计算方法等内容相互渗透,有机结合;增强了现代数学内容,提高了起点,并为内容延伸提供了接口;将微分学与积分学独立成篇,减少了内容的重复;增加了数学应用及学生实践环节的内容,并将计算运行框图引入到工科数学之中。

本书共分十九章,其主要内容为代数与几何、微分学、积分学、数学模型初步、数值计算方法初步等。本书在研讨和试用期间,得到了重庆市数学学会同行的大力支持,重庆大学赵中时教授,后勤工程学院唐钰其教授对本书提出了宝贵意见,后勤工程学院教务部沈室钢副教务长给予了大力支持,后勤工程学院唐真、余建民、邓文华等同志进行了前期论证与部分内容编写工作,在此深表谢意。

本书由后勤工程学院江兆嘉教授主审。

本书可作为工科各专业本科数学教材及其他专业数学参考用书,也可作为高校教师教学和工程技术人员自学参考用书。

本书参考学时(220~250),“*”部分根据专业选学。

编 者 1997 年 8 月于重庆

目 录

前 言

第一章 集合 映射 函数	[1]
第一节 集合	[1]
一、集合[1] 二、集合的运算[2] 三、集合运算的性质[3] 四、笛卡尔积集[4]	
习题 1-1[5]	
第二节 映射	[6]
一、关系[6] 二、映射[6]	
习题 1-2[7]	
第三节 函数	[8]
一、函数的概念[8] 二、一元函数[9] 三、二元函数[10]	
习题 1-3[12]	
第四节 函数的几种特性	[12]
一、有界性[12] 二、奇偶性[13] 三、单调性[13] 四、周期性[13]	
习题 1-4[14]	
第五节 基本初等函数 初等函数	[14]
一、幂函数[15] 二、指数函数[15] 三、对数函数[15] 四、三角函数[15] 五、反三角函数[16]	
六、初等函数[17] 七、双曲函数与反双曲函数[18]	
习题 1-5[19]	
第二章 行列式	[21]
第一节 全排列的逆序数	[21]
习题 2-1[22]	
第二节 行列式的定义	[22]
习题 2-2[25]	
第三节 行列式的性质	[25]
习题 2-3[29]	
第四节 行列式的展开	[30]
习题 2-4[36]	
第五节 克莱姆法则	[37]
习题 2-5[40]	
第三章 矩阵	[41]

第一节 矩阵的概念	[41]
第二节 矩阵的运算	[43]
一、矩阵的加法[43] 二、数与矩阵相乘[43] 三、矩阵与矩阵相乘[43] 四、矩阵的转置[46]	
五、矩阵的共轭[47]	
习题 3-2[47]	
第三节 逆矩阵与分块矩阵	[48]
一、逆矩阵及其性质[48] 二、矩阵分块法[52]	
习题 3-3[54]	
第四节 矩阵的初等变换与初等阵	[55]
一、矩阵的初等变换[55] 二、初等阵[58] 三、用初等变换法求逆矩阵[60]	
习题 3-4[62]	
第四章 向量与线性方程组	[63]
第一节 几何向量及其运算	[63]
一、向量的概念[63] 二、向量的运算[63]	
习题 4-1[69]	
第二节 n 维向量的概念	[69]
习题 4-2[70]	
第三节 线性相关与线性无关	[70]
习题 4-3[74]	
第四节 秩	[74]
一、向量组的秩[74] 二、矩阵的秩[76]	
习题 4-4[79]	
第五节 线性方程组解的讨论	[79]
习题 4-5[82]	
第六节 齐次线性方程组解的结构	[82]
习题 4-6[86]	
第七节 非齐次线性方程组解的结构	[87]
习题 4-7[89]	
第五章 线性空间与线性变换	[91]
第一节 线性空间的概念	[91]
一、线性空间的定义[91] 二、线性空间的性质[92]	
习题 5-1[92]	
第二节 维数,基与坐标	[93]
习题 5-2[95]	
* 第三节 子空间与线性生成	[96]
一、子空间[96] 二、线性生成空间[96]	
习题 5-3[98]	
第四节 欧氏空间	[98]
一、欧氏空间的概念[98] 二、向量范数[99] 三、 R^3 空间向量的坐标及运算[100]	
习题 5-4[102]	

第五节 基变换与坐标变换	[103]
习题 5-5[105]	
第六节 向量的正交化	[105]
习题 5-6[108]	
* 第七节 线性变换	[108]
一、线性变换的概念[108] 二、线性变换的矩阵表示式[110]	
习题 5-7[113]	
第六章 特征值问题与实二次型	[114]
第一节 特征值与特征向量	[114]
习题 6-1[117]	
第二节 相似矩阵	[117]
一、相似矩阵及其性质[117] 二、对称矩阵的相似[119] * 三、约当型矩阵简介[122]	
习题 6-2[123]	
第三节 二次型及其标准形	[125]
一、二次型与对称矩阵[125] 二、用正交变换将二次型化为标准形[126] 三、用配方法化二次型为标准形[128]	
习题 6-3[129]	
第四节 正定二次型	[130]
习题 6-4[132]	
第七章 空间解析几何	[133]
第一节 空间直角坐标系	[133]
一、空间直角坐标系[133] 二、空间两点的距离[134]	
习题 7-1[134]	
第二节 平面	[135]
一、平面的方程[135] 二、两平面的关系[137] 三、点到平面的距离[138]	
习题 7-2[138]	
第三节 空间直线	[139]
一、直线的方程[139] 二、两直线的关系[140] 三、直线与平面的关系[140] 四、平面束[142]	
* 五、 R^n 中的直线与超平面[143]	
习题 7-3[144]	
第四节 二次曲面	[145]
一、球面[145] 二、旋转曲面[145] 三、椭球面[146] 四、双曲面[147] 五、抛物面[148]	
六、二次柱面[149] 七、二次锥面[149]	
习题 7-4[150]	
第五节 空间曲线	[150]
一、空间曲线的方程[150] 二、曲线在坐标面上的投影[151]	
习题 7-5[152]	
第八章 函数的极限与连续	[153]
第一节 一元函数极限概念	[153]

一、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限[153]	二、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限[155]	
习题 8-1[157]		
第二节 函数极限定理		[158]
一、极限性质[158]	二、极限运算法则[158]	三、极限存在准则 两个重要极限[160]
习题 8-2[163]		
第三节 无穷小量与无穷大量		[164]
一、无穷小量[164]	二、无穷大量[165]	三、无穷小量的比较[167]
习题 8-3[168]		
第四节 一元函数的连续性		[169]
一、函数的连续性[169]	二、间断点及其分类[170]	三、初等函数的连续性[171]
习题 8-4[173]		
第五节 闭区间上连续函数的性质		[174]
一、最大值和最小值定理[174]	二、介值定理[174]	
习题 8-5[175]		
第六节 多元函数的极限与连续		[176]
一、二元函数的极限[176]	二、多元函数的极限[177]	三、二元函数的连续性[177]
四、闭区域上连续函数的性质[178]		
习题 8-6[178]		

第九章 微分学基本理论 [180]

第一节 导数		[180]
一、变化率问题[180]	二、导数概念[183]	三、导数与连续的关系[186]
四、一元函数导数与二元函数偏导数的几何意义[186]		
习题 9-1[187]		
第二节 函数的四则运算的求导法则 基本初等函数的导数		[189]
一、函数的四则运算的求导法则[189]	二、反函数的求导法则[191]	三、基本初等函数的导数[191]
习题 9-2[194]		
第三节 一元复合函数求导的链式法则 初等函数的求导问题		[195]
一、一元复合函数求导的链式法则[195]	二、初等函数的求导问题[198]	三、双曲函数与反双曲函数的导数[198]
习题 9-3[199]		
第四节 微分中值定理		[200]
一、罗尔(Rolle)定理[200]	二、拉格朗日(Lagrange)中值定理[201]	三、柯西(Cauchy)中值定理[202]
习题 9-4[203]		
第五节 多元复合函数求导法则		[203]
一、多元函数的全增量公式[204]	二、多元复合函数偏导数的链式法则[204]	
习题 9-5[207]		
第六节 隐函数及参变量函数的导数		[208]
一、隐函数求导法则[208]	二、参变量函数求导法则[212]	
习题 9-6[216]		
第七节 微分与全微分		[217]

一、微分[217]	二、全微分[220]	
习题 9-7[222]		
第八节	导数概念的推广	[223]
一、方向导数[223]	二、梯度[224]	* 三、多元函数的微分运算[226]
习题 9-8[229]		
第九节	高阶导数	[230]
一、一元函数的高阶导数[230]	二、多元函数的高阶偏导数[232]	* 三、海赛(Hesse)矩阵[234]
习题 9-9[236]		
第十章	微分学应用	[238]
第一节	函数值的计算	[238]
一、利用微分计算函数近似值[238]	二、利用泰勒(Taylor)公式计算函数近似值[240]	
习题 10-1[244]		
第二节	未定式极限	[245]
一、罗必塔(L'Hospital)法则[245]	二、杂例与泰勒公式的运用[248]	* 三、斯铎兹(Stolz)定理的应用[251]
习题 10-2[253]		
第三节	利用导数研究函数的单调性	[254]
习题 10-3[257]		
第四节	利用导数确定函数极值	[257]
一、一元函数的极值[257]	二、极值问题的一般描述[260]	* 三、多元函数泰勒公式与极值存在条件的证明[263]
习题 10-4[267]		
第五节	利用导数研究曲线的凹凸性	[267]
习题 10-5[269]		
第六节	利用导数描绘函数的图形	[270]
一、曲线的渐近线[270]	二、函数图形的描绘[271]	
习题 10-6[274]		
第七节	利用导数研究曲线的弯曲程度	[275]
一、弧微分[275]	二、曲率及其计算公式[275]	三、曲率圆与曲率半径[278]
四、曲率中心的计算公式	渐屈线与渐伸线[279]	
习题 10-7[281]		
第八节	导数的几何应用	[281]
一、一元函数导数的几何应用[281]	二、多元函数偏导数的几何应用[284]	
习题 10-8[288]		
第十一章	最优化问题	[289]
第一节	最优化问题及其数学模型	[289]
一、最优化问题[289]	二、最优化问题的数学模型[291]	三、最优化问题的分类[292]
习题 11-1[292]		
第二节	无约束最优化问题	[293]
习题 11-2[295]		
第三节	等式约束最优化问题	[296]

一、只有一个等式约束[296] 二、有 m 个等式约束[299]

习题 11-3[301]

* 第四节 凸集与凸函数 [301]

一、凸集及其简单性质[301] 二、凸函数[302] 三、凸规划[305]

习题 11-4[306]

习题参考答案 [307]

第一章 集合 映射 函数

本章介绍工科数学最基本的概念——函数,函数是工科数学的研究对象.为了使工科数学更好地与现代数学以及应用数学接轨,我们将从现代数学最基本的两个概念——集合、映射出发并进行讨论.这样安排,对于打牢基础、拓广知识是颇为有益的.

第一节 集 合

一、集合

集合是从生活经验中抽象出来的一个最基础的数学概念.我们对于生活中“集合”这个事实并不陌生,如一堆苹果的全体,一批玩具的全体,教室里学生的全体等等,都构成一个集合.数学上所谓集合是指具有某种确定性质的对象的全体.组成集合的对象称为该集合的**元素**.

如果用 A 代表一个集合, a 表示这个集合的元素,我们便说 a 属于 A ,记为 $a \in A$,否则,便说 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$,或 $a \notin A$.

集合有两种表示法,一种是列举法,就是把该集合的所有元素一一列举出来写在一个花括号内.如

$$A = \{a, b, c, d\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\};$$

$$\text{自然数集 } N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

另一种是条件定义法,就是将具有条件 $P(x)$ 的元素所构成的集合表示为

$$A = \{x | x \text{ 所具有的条件 } P(x)\},$$

其中 x 是该集合中的一个代表元素.如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解的集合可以表示为

$$A = \{x | x^2 - 1 = 0\}.$$

又如,中心在原点半径为 1 的圆周上的点的全体所组成的集合 A 可记为

$$A = \{(x, y) | x, y \text{ 是实数}, x^2 + y^2 = 1\}.$$

例 1 有理数的全体构成一个集合,叫做有理数集,常用 Q 表示.实数的全体构成实数集,常用 R 表示.整数的全体构成的集合,常用 Z 表示.

例 2 设

$$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y - x^2 \geq 0\}$$

它表示在 xoy 平面上,单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的内部与抛物线 $y = x^2$ 的上方所围图形(图 1-1 阴影部分)及其边界的点所构成的集合.

设有集合 A, B ,若 A 中的每个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,或说 A 包含在 B 内,记作 $A \subset B$.例如,自然数集

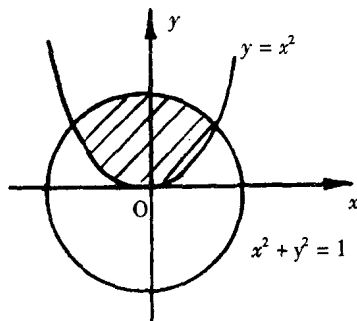


图 1-1

N 是有理数集 Q 的子集, 而有理数集是实数集 R 的子集, 则 $N \subset Q \subset R$.

若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 但 $A \neq B$, 则称集合 A 为集合 B 的真子集.

不含任何元素的集合叫做空集, 记为 ϕ .

显然空集是任一集合的子集, 即对于任意集合 A , 有 $\phi \subset A$.

下面引进实数集 R 中区间与邻域的概念.

设 a, b 为两个实数, 且 $a < b$, 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间, 记为 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$; 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间, 记为 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$; 类似地有半开区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 以及 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$. 上述区间中 a, b 分别叫做区间的左、右端点, $b - a$ 则是区间的长度. 区间可用数轴表示, 如图 1-2 所示.

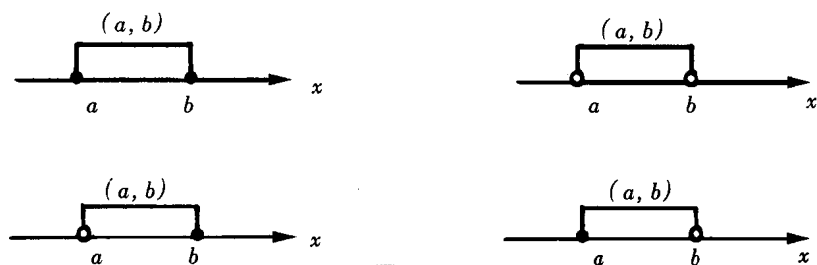


图 1-2

全体实数 x 组成的集合 $-\infty < x < +\infty$, 记为 $(-\infty, +\infty)$; 不小于 a 的实数 x 组成的集合 $a \leq x < +\infty$, 记为 $[a, +\infty)$; 小于 b 的实数 x 组成的集合 $-\infty < x < b$, 记为 $(-\infty, b)$, 这一类区间叫做无限区间.

设有 a 与 δ 两个实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的实数 x 组成的集合叫做点 a 的 δ 邻域, 记为 $N_\delta(a)$, 其中 a 叫做邻域的中心, δ 叫邻域的半径. 由于 $|u| < \delta$ 等价于 $-\delta < u < \delta$, 上式令 $u = x - a$, 则有 $-\delta < x - a < \delta$, 即 $a - \delta < x < a + \delta$, 它可用开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 表示. 这就是说, a 的 δ 邻域就是 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 的点 x 的集合, 其数轴表示如图 1-3.

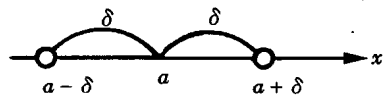


图 1-3

二、集合的运算

设有 A, B 两个集合, 由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合, 称为 A 与 B 的并集(简称并), 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

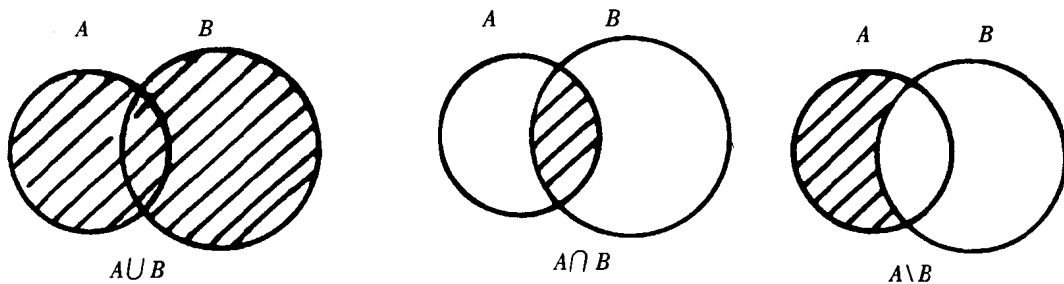


图 1-4

设集合 A, B , 由同时属于 A 与 B 的元素所组成的集合, 称为 A 与 B 的交集(简称交), 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

若 $A \cap B = \phi$, 则称 A, B 不相交, 若 $A \cap B \neq \phi$, 则说 A 与 B 相交

设集合 A, B , 由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合, 称为 A 与 B 的差集(简称差), 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

并集、交集、差集运算, 可用图 1-4 表示.

如果我们所讨论的问题在一个大集合 X (常称为基本集) 中进行, 所研究的其它集合都是 X 的子集, 此时称 $X - A$ 为 A 的余集(或补集), 记作 $\bar{A}$ 或 A^c , 即

$$\bar{A} = X - A = \{x | x \in X \text{ 但 } x \notin A\}.$$

例 3 设基本集 $X = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数}\}$, $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, 如图 1-5 所示, 求 $A \cup B, A \cap B, \bar{A}$.

解 $A \cup B = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$
 $= B$

$$A \cap B = A.$$

$\bar{A} = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数}, x^2 + y^2 > 1\}$ 即 xoy 平面圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的外部的点的集合.

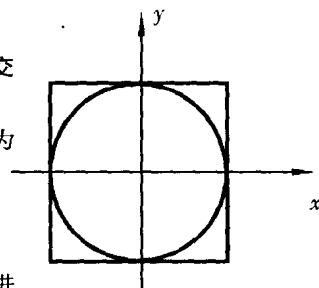


图 1-5

三、集合运算的性质

定理 1 设 A, B, C 为三个任意集合, 则下列法则成立:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- (3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
- (4) 传递律 $A \subset B, B \subset C$ 则 $A \subset C$
- (5) 等幂律 $A \cup A = A, A \cap A = A$
- (6) 吸收律 $A \cup \phi = A, A \cap \phi = \phi,$
 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

若 $A \subset B$ 则 $A \cup B = B, A \cap B = A.$

证 仅以分配律中第一式为例, 其余各式可类似证明.

设 $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cup B$, 且 $x \in C \Leftrightarrow x \in A$, 且 $x \in C$ 或 $x \in B$, 且 $x \in C \Leftrightarrow x \in A \cap C$ 或 $x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).$

定理 2(对偶原理) 设 A, B 都是基本集 X 的子集, 则 $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

即: 两个集合并集的余集等于每个集合的余集的交集; 两个集合交集的余集等于每个集合的余集的并集.

证 $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Leftrightarrow x \in (\bar{A} \cap \bar{B})$

又由于 $\overline{(A \cup B)} = \overline{(\bar{A}) \cap (\bar{B})} = A \cap B$

则有 $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

对于 n 个集合, 对偶原理为

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad \overline{\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

四、笛卡尔积集

定义 1 设 A, B 为两个集合, 由 $a \in A$ 及 $b \in B$ 的一切有序元素对 (a, b) 组成的集合, 叫集合 A 与集合 B 的笛卡尔积集(直积集), 记作 $A \times B$, 读为 A 叉 B . 即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

其中 a 为 (a, b) 的第一个坐标, b 为 (a, b) 的第二个坐标; A 为 $A \times B$ 的第一个坐标集, B 为 $A \times B$ 的第二个坐标集.

集合 X 与自身的笛卡尔积 $X \times X$ 常记作 X^2 .

例 4 设 $R = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, 则 $R^2 = R \times R = \{(x, y) | x \in R, y \in R\}$. R 为坐标轴上一切点的集合, R^2 为坐标面 xoy 上一切点的集合.

例 5 设 $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$ 则

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\},$$

$$B \times A = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}.$$

这个例题说明, 只要 $A \neq B$ (A, B 为非空集), 便有 $A \times B \neq B \times A$.

定义 2 对于任意 n 个集合 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 集合 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$ 称为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的笛卡尔积, 记作 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. 其中 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为有次序的 n 元素组, $x_i, 1 \leq i \leq n$, 称为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的第 i 个坐标, $X_i, 1 \leq i \leq n$, 称为笛卡尔积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 的第 i 个坐标集.

n 个集合 X 的笛卡尔积 $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ 个 } X}$ 记作 X^n

例如 $R^n = R \times R \times \dots \times R$ 即为所有的有序实数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 组成的集合, 它是实数集 R 的 n 次直积.

我们常用到 R^2 平面集上的区域的概念. 为此, 我们介绍下面的有关知识.

设 $P_0(x_0, y_0)$ 为 R^2 中的一点, $\delta > 0$ 为一常数, 则 R^2 中所有与 P_0 距离小于 δ 的点的集合称为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $N_\delta(P_0)$, 即

$$\begin{aligned} N_\delta(P_0) &= \{P | |P - P_0| < \delta\} \\ &= \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}. \end{aligned}$$

设 A 为 R^2 的一个子集, P 为 R^2 中一点: 如果存在一个常数 $\delta > 0$, 使得

$$N_\delta(P) \subseteq A$$

则称 P 为 A 的一个内点, 如果存在一个常数 $\delta > 0$ 使得

$$N_\delta(P) \cap A = \phi$$

则称 P 为 A 的一个外点; 如果 P 的任一邻域都含有 A 的点又含有 A 以外的点, 则称 P 为 A 的一个边界点. A 的全体边界点的集合叫做 A 的边界.

设 A 为 R^2 的一个子集, 如果 A 的每一个点都是它的内点, 则 A 称为一个开集, 空集 ϕ 规定为开集.

设 A 为 R^2 的子集, 如果 A 中任意两点, 都能用一条包含于 A 中的折线连接起来, 则称 A 为连通集. 连通的开集称为区域(或开区域), 区域与其边界的并集称为闭域.

如果集合 A 可以被包含在一个以原点为中心的圆内, 则称 A 为有界集, 否则称为无界集.

上述邻域、内点、开集、区域等概念可以完全类似地推广到 R^n 空间中去. 其中 P_0 的 δ 邻域 $N_\delta(P_0)$ 定义为:

$$N_\delta(P_0) = \{P | P \in R^n, |P - P_0| < \delta\}$$

设 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则

$$N_\delta(P_0) = \{P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2\}$$

它是以点 P_0 为中心,以 δ 为半径的 n 维开球.

习 题 1-1

1. 设 $A = \{1, 2, 7, 8\}$, $B = \{n | n^2 < 50, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{n | 0 < n \leq 30 \text{ 且 } \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\}$, 求 $B \setminus (A \cup C)$, $(B \cap C) \setminus A$.
2. 已知 A, B, C, Z^* 都是整数集 Z 的子集, $A = \{n | n = 3m, m \geq 4\}$; $B = \{n | n = 2m, |m| \geq 1\}$; $C = \{n | |n| \leq 10\}$, $Z^* = Z \setminus \{0\}$. 试用 A, B, C, Z^* 的运算, 表达下列集合:
 - (1) $\{n | n = 6m, m \geq 2\}$;
 - (2) 奇数组成的集合;
 - (3) $\{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$.
3. 假设 $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 2\}$. 求 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.
4. 设 Z 为一基础集, A, B 均为其子集, 证明:
 - (1) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;
 - (2) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
 - (3) 若 $A \cup B = Z, A \cap B = \phi$, 则 $\bar{B} = A, \bar{A} = B$.
5. 证明等式:
 - (1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - (2) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;
 $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$.
 - (3) $\overline{\bar{M}} = M$;
 $N \subset M \Leftrightarrow \bar{M} \subset \bar{N}$.
6. 设 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, $C = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$. 在平面直角坐标系内画出下列集合:
 - (1) $A \cup (B \times C)$;
 - (2) $A \cap (B \times C)$;
 - (3) $A \setminus (B \times C)$;
 - (4) $(B \times C) \setminus A$.
7. 设 $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d, e\}$, 试列举 $X \times Y$ 的所有成员.
8. 设 X_i 是由 m_i 个不同元素构成的集合, $1 \leq i \leq n$. 问 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 的元素有多少?
9. 设 X, Y 为集合, 证明:
 - (1) 设 $X \times \phi = \phi \times X = \phi$.
 - (2) 若 $X \neq \phi, Y \neq \phi$, 则 $X \times Y \neq \phi$.
 - (3) 若 $X \neq \phi, Y \neq \phi$, 则 $X \times Y = Y \times X$ 当且仅当 $X = Y$.
10. 用区间表示下列不等式:
 - (1) $2 < x \leq 6$;
 - (2) $|x - 3| \leq 4$;
 - (3) $|1 + 3x| \leq 1$;
 - (4) $|x - 1| > 2$.

第二节 映 射

一、关系

定义 1 设 A, B 为集合, A 与 B 的笛卡儿积集 $A \times B$ 的每一子集 $r \subset A \times B$ 都称为从 A 到 B 中的关系, 若元素 a, b 之间有关系 r , 记作 arb , 或 $(a, b) \in r$. $(a, b) \in r$ 中的第一个元素 a 允许取值所有元素组成的集合叫做关系 r 的定义域, 记为 $\text{dom}(r)$ 或 $D(r)$; 第二个元素 b 允许取值所有元素组成的集合叫做关系 r 的值域, 记为 $\text{ran}(r)$ 或 $R(r)$, 即

$$\text{dom}(r) = \{a \mid a \in A, \exists b \in B, \text{使得 } arb\},$$

$$\text{ran}(r) = \{b \mid b \in B, \exists a \in A, \text{使得 } arb\}.$$

例 1 实数集上的“=”关系可定义为

$$“=” = \{(x, y) \mid x, y \text{ 为一切实数}, x = y\}.$$

$$\text{dom}(“=”) = \text{ran}(“=”) = \text{实数集 } R.$$

若关系“=”中的元素 (x, y) 看作直角坐标系中的点, 则关系“=” $\subset R^2$ 是直线 $y = x$.

同理, 实数集上的关系“>”可定义为

$$“>” = \{(x, y) \mid x, y \in R, x > y\},$$

作为直角坐标系上的点集, 关系“>”是图 1-6 中阴影部分的点所组成的半平面.

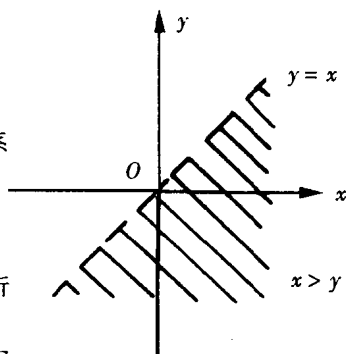


图 1-6

类似地, 我们可以定义两直线平行或垂直的关系, 两三角形相似的关系, 人口集合中的性别相同或肤色相同等关系.

定义 2 设 r 为从集合 x 到集合 y 中的关系 (即 $r \subset x \times y$), s 为从集合 y 到集合 z 的关系 (即 $s \subset y \times z$), 对于 $x \in X$ 及 $z \in Z$, 存在 $y \in Y$, 使得 $(x, y) \in r$ 且 $(y, z) \in s$. 这时通过 Y , 从 X 到 Z 中的关系, 称为关系 r 与关系 s 的复合 (或合成), 记作 sor , 即

$$\text{sor} = \{(x, z) \mid \exists y \in Y, \text{使得 } xry, ysz\}.$$

二、映射

定义 3 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系, 如果, 对任一 $x \in X$, 通过关系 f 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为 (从 X 到 Y 的) 映射. 记作

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto y.$$

定义中包含两层意思, 即: (1) 对于每一个 $x \in X$, 有 $y \in Y$, 使得 xfy (即 $(x, y) \in f$); (2) 若有 xfy_1, xfy_2 , 则 $y_1 = y_2$.

对于每一个 $x \in X$, 使得 xfy 的那个唯一的 $y \in Y$, 称为点 X 的象或值, 记为 $f(x)$. 对于每一个 $y \in Y$, 如果 $x \in X$, 使得 xfy , 则称 x 是 y 的原象, 记作 $f^{-1}(y)$. 集合 X 叫映射 f 的定义域, 记为 $\text{Dom}(f)$ 或 $D(f) = X$; 象 $y = f(x)$ 所组成的集合叫做映射 f 的值域, 记为 $R(f)$, 或 $f(X) (\subset Y)$, 即

$$\text{Ranf} = f(X) = \{y \mid y \in Y, \exists x \in X \text{ 使 } y = f(x)\}.$$

定义 4 设 f 是从 X 到 Y 的映射.

(1) 如果 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 称 f 为一一映射或单射, 这时 $D(f)$ 中每一个元素对应唯一的象, $R(f) \subseteq Y$ 中的每一个象, 也只对应唯一的原象;

(2) 如果 $R(f) = Y$, 称 f 是从 X 到 Y 上的映射或满射, 否则, 即 $R(f)$ 是 Y 的真子集, 就称 f

2. 求下列映射的定义域、值域并指出映射是否为单射、双射.

(1) $y = x^3, R \rightarrow R;$

(2) $y = \operatorname{tg} x, R \rightarrow R;$

(3) $y = \operatorname{tg} x, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow R;$

(4) $y = \sec x, [0, \pi] \rightarrow R;$

(5) $a_n = \frac{1}{n}, N \rightarrow R;$

(6) $y = \log_{1/2} x, R \rightarrow R;$

(7) A 为偶数集, $f(2n) = n, A \rightarrow N.$

3. 设 $A = \{x, y, z\}, B = \{a, b, c, d\}$, 定义

$f: x \rightarrow a, y \rightarrow b, z \rightarrow c;$

$g: x \rightarrow a, y \rightarrow d, z \rightarrow a;$

$\varphi: x \rightarrow a, z \rightarrow c.$

问 f, g, φ 是否为 A 到 B 的映射.

4. 设映射 $f: Z \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$. 试证明 g 是 f 的逆映射的充分必要条件是 $g \circ f = I_Y$ 和 $f \circ g = I_Z$ 同时成立.

5. 足球联赛规定, 每支球队都在主、客场与另一支球队打两场比赛. 设有甲、乙、丙三支足球队, 用甲 r 乙 $= (\text{甲}, \text{乙})$ 定义一种关系, 表示甲队在主场, 乙队在客场进行比赛. 设 $A = \{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}\}$, 试求 $r(A)$, 问这样定义的关系是否是一个映射?

第三节 函 数

一、函数的概念

如果第二节中映射的定义(定义3)中的 X, Y 为实数直积集, 就得到我们所讨论的函数概念. 一般地说, 设 X 是 n 次直积 R^n 内的一个子集, f 是从 X 到 $Y \subset R^m$ 的映射, 即:

$$f: X \rightarrow Y, X \subset R^n, Y \subset R^m$$

$$x \mapsto y$$

则称 f 为向量值函数. 这里 $x \in X$ 是 R^n 中的一个点 $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, x 的象 y 是 R^m 中的一个向量 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, X 称为 f 的定义域, y_j 称为 y 的第 j 个坐标, 本书中我们主要研究 $Y \subset R$ 的实值函数, 有下列概念.

定义1 设 f 是从 X 到 Y 的映射, 即 $f: X \rightarrow Y$. 若 X, Y 都是实数集, $X \subset R, Y \subset R$, 则称映射 f 为一元实值函数, 简称一元函数, 或函数. 记为 $f: X \rightarrow Y, x \mapsto y$, 或 $x \mapsto f(x)$, 或 $y = f(x)$. 其中 $X = D(f)$ 称为 f 的定义域; $R(f)$ 称为 f 的值域; x 称为自变量, 它是 y 的原象; y 称为因变量, 它是 x 的象.

定义2 设 f 是从 X 到 Y 的映射: 若 $X \subset R^n, Y \subset R$, 即 $f: X \rightarrow Y, X \subset R^n, Y \subset R, x \mapsto y$, 则称映射 f 为 n 元函数; 若 $X \subset R^2, Y \subset R$, 则称映射 f 为二元函数.

二元以及二元以上的函数统称为多元函数.

设有函数 $f: A \rightarrow R^1$ 和 $g: B \rightarrow R^1$, 如果 $A = B$ 且对一切 $x \in A$, 都有 $f(x) = g(x)$, 则称函数 f 与函数 g 相等, 记作 $f(x) = g(x)$.

函数可以进行四则运算与复合, 即

设有 $f: A \rightarrow R^1$, 则常数 K 与函数 f 的乘积定义为 $kf: A \rightarrow R^1, x \mapsto kf(x)$

函数 $f: A \rightarrow R^1$ 与 $g: B \rightarrow R^1, C = A \cap B$, 则函数 f 与 g 的和、差、积分别定义为

$$f \pm g: C \rightarrow R^1, x \mapsto f(x) \pm g(x), \text{ 即 } (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x);$$

$$f \cdot g: C \rightarrow R^1, x \mapsto f(x)g(x), \text{ 即 } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

若 $B_1 = \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$, $C_1 = A \cap B_1$, 则函数 f 与 g 的商定义为

$$\frac{f}{g}: C_1 \rightarrow R^1, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ 即 } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

设函数 $g: A \rightarrow B, x \mapsto g(x) = u$ 与函数 $f: B \rightarrow C, u \mapsto f(u) = y$, 则复合关系 $f \circ g: A \rightarrow C$,

$x \mapsto (f \circ g)(x) = y$, 称为复合函数, 记作

$$y = f[g(x)]$$

其中 u 称为中间变量.

函数 $f: A \rightarrow B, x \mapsto y$ 作为一个映射, 其逆映射 $f^{-1}: B \rightarrow A, y \mapsto f^{-1}(y) = x$, 称为函数 f 的反函数. 按照习惯, 我们把 $y = f(x)$ 反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写作 $y = f^{-1}(x)$. 如正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数, 即反正弦函数写作 $y = \arcsin x$ 而不写为 $x = \arcsin y$.

按照定义, 我们所说的函数就是指映射 f , 但习惯上, 常将一元函数表示为 $y = f(x)$, 将多元函数表示为 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 二元函数表示为 $z = f(x, y)$. 本书中, 我们也采用这种表示形式.

二、一元函数

一元函数 $y = f(x)$ 中定义域、值域与对应法则是构成函数 $y = f(x)$ 的三要素. 求函数的定义域就是确定自变量 x 的取值范围. 函数定义域确定的办法是: 在实际问题中, 根据问题的实际意义来确定. 如圆面积 A 和半径 r 的关系为 $A = \pi r^2$, 则 r 的定义域为 $0 \leq r < +\infty$, 即圆的半径不可以取负值. 在用数学式子表示的函数表达式中, 往往根据数学表达式有意义的自变量所允许的取值范围来确定定义域. 一般用区间来表示定义域.

例 1 求 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \lg(4 - x^2)$ 的定义域.

解 由于在实数范围内负数不能开平方, 所以 $\sqrt{x^2 - 1}$ 中的 $x^2 - 1 \geq 0$, 为了使分式有意义, 分母不能为零, 即 $x^2 - 1 \neq 0$, 所以有 $x^2 - 1 \geq 0$, 即 $x^2 > 1$, 或 $|x| > 1$, 即 $x < -1$, $x > 1$. 这样 $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 中 x 的允许取值范围为 $(-\infty, -1)$ 与 $(1, +\infty)$;

又当 $4 - x^2 \leq 0$ 时, 对数无意义, 所以 $4 - x^2 > 0$ 即 $x^2 < 4$, 或 $|x| < 2$, 即 $(-2, 2)$.

取 $(-\infty, -1)$ 、 $(1, +\infty)$ 与 $(-2, 2)$ 的交集得到函数的定义域为 $(-2, -1)$ 与 $(1, 2)$.

例 2 设 $u = g(x) = \sin x$, $f(u) = \lg u$ 求复合函数 $f[g(x)]$ 及其定义域.

解 复合函数为 $y = f[g(x)] = \lg[\sin x]$, 其定义域为

$$\begin{aligned} D &= \{x \mid \sin x > 0\} \\ &= \{x \mid x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \end{aligned}$$

显然函数 g 将 $A = (-\infty, +\infty)$ 映射到 $B = [-1, 1]$, 函数 f 将 $B_1 = (0, +\infty)$ 映射到 $C = (-\infty, +\infty)$. 取复合函数的定义域只能取使 $B \cap B_1 = (0, 1]$ 有意义的 X 的取值范围, 即 $\{x \mid x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

上述两例说明: 求函数定义域时使数学表达式有意义的含义是指: 分母不能为零; 偶次根式内必须非负; 对数的真数必须是正数; 反正弦、反余弦的自变量的绝对值不能超过 1 等等. 求复合函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 即 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域时, 要先确定函数 $u = \varphi(x)$ 的值域 B 与函数 $y = f(u)$ 的定义域 B_1 的交集, 再利用 $B \cap B_1$ 来确定 X 的允许取值范围. 如果 $B \cap B_1 = \emptyset$, 则 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 就不能构成复合函数.

在函数定义中, 对应法则 f 是至关重要的. 对应法则就是因变量 y 与自变量 x 之间的关系. 据此, 自变量 x 取定后, 因变量 y 就有唯一确定的值与之对应. 函数 $y = f(x)$ 的表示法很多, 常见的有三种: