力学丛书

变分法及有限元

上册

钱伟长 著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了作为有限元法基础的变分原理，以广义变分原理贯穿全书．其中相当一部分内容是作者多年来的工作成果．

全书分上、下二册．上册为前九章，内容包括：变分法的基本理论；梁、板小挠度和大挠度的静力学、动力学问题；板的热弹性问题；弹性体小位移变形和大位移变形的静力学、动力学问题；热弹性力学和塑性力学问题等等．

本书可供有关科学研究人员、工程技术人员和高等院校师生参考．

力学丛书

变分法及有限元

（上册）

钱伟长 著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年8月第一版 开本：850×1168 1/32

1980年8月第一次印刷 印张：19 1/4

印数：精：1—4,300 插页：2

平：1—4,620 字数：511,000

统一书号：13031・1298

本社书号：1805・13—2

定价：精装本 4.00元 平装本 3.50元

序　　言

本书的主要目的，是为广大教师、科技工作者提供变分法和有限元的最新成果，从而使读者对教学、科研和生产中的理论问题和实际问题能更好地开展计算工作．作者以此来热烈响应党中央的号召，为社会主义祖国早日实现四个现代化贡献自己的力量．

本书的内容涉及变分法和有限元的各个方面，广泛地吸收了几十年来在国际上对实际计算有价值的先进材料．当然，其中相当一部分是我们自己三十年来在这方面的工作成果．本书对广义变分原理给予高度的重视，贯穿于全书．现在广义变分原理对有限元的利用，显示了越来越大的重要性．但是还可以说，广义变分原理的作用，迄今仍未得到充分的发挥．

本书论述的科学技术范围，不仅限于弹塑性力学，而且也涉及到其它许多学科．特别是在下册中，将为流体力学、电磁学、量子力学等学科设专章讲述．

本书是根据原《变分法及有限元》讲义改写而成的．自 1977 年 10 月至 1978 年 10 月，作者曾在清华大学开设《变分法及有限元》讲座，并为此写成一份讲义．参加讲座的除清华大学和各院校教师外，还有北京及外地的研究所、设计院的有关科技工作者． 1978 年暑假应云南昆明工学院的邀请，又向十七个省市近六十个院校、工矿科研单位的同志，进行了同样内容的简要讲述．今年三月在武昌华中工学院、四月将在无锡 702 研究所，分别为有关院校和科研单位进行讲述．在以往的讲述实践中，得到同志们的启发和帮助，使讲义的内容不断有所增益和修改，各单位也已广为翻印和复制．为满足广大科技工作者的要求，决心全部改写，现在已完成上册付梓，下册亦将在年内完成．

在本书的编写出版过程中，得到北京地质力学研究所潘立宙

同志的大力协助校审，并得首钢钱元凯同志制作全部插图，在此一并表示感谢.

本书在写作上必然会有一些不足和缺欠，甚至于可能还有差错，深望读者不吝提出批评指正.

钱伟长

一九七九年三月五日，
于清华园内照澜院.

目　　录

第 一 章

变分法的一些基本概念

§1.1 历史上有名的变分命题，泛函，较一般的变分命题

在科学技术上，常常需要确定某一函数 $z = f(x)$ 的极大值或极小值；这种计算分析是微积分里大家所熟知的．但是，我们经常还要去确定一类特殊的量——即所谓泛函——的极大值或极小值．这就是变分法所处理的范围．为了便于理解变分的命题，便于理解所谓泛函，我们将从历史上有名的三个变分命题讲起．

第一个变分命题，最速降线问题（brachistochrone）

设有两点 A 和 B，不在同一铅垂线上，设在 A，B 两点上连结着某一曲线，有一重物沿曲线从 A 到 B 受重力作用自由下滑．如果略去重物和线之间的摩擦阻力，从 A 到 B 自由下滑所需时间随这一曲线的形状不同而各不相同．问下滑时间最短的曲线是那一条曲线？它就是最速降线（图 1.1）．显而易见，最快的路线决不是连结 A，B 两点的直线段．当然，这条直线段在 A，B 两点间的路程最短，但沿这条直线自由下落时，运动速率的增长是比较慢的．如果我们取一条较陡的路程，则虽然路程是加长了，但在路程相当大的一部分中，物体运动的速率较大，所需总时间反而较少．

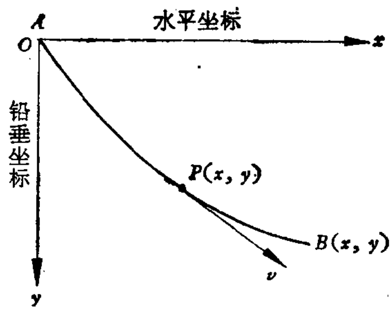

图 1.1 最速降线，A，B 两点固定，A 点和坐标原点重合

最速降线问题是约翰·伯努利（Johann Bernoulli）在1696年以公开信的形式提出来的[1]，曾引起广泛的注意；历经莱比尼兹（Leibniz）、牛顿（Newton）和约可毕·伯努利（Jacob Bernoulli）等的多方努力[2,3]，才得到较完善的解答.

现在让我们把最速降线问题，写成数学形式.

设 A 点和原点重合，B 点的坐标为 (x_1, y_1)，重体从 A 点下滑到 $P(x, y)$ 点时，其速度为 v；如果重体的质量为 m，引力加速度为 g，则重体从 A 到 P，失去势能 mgy，而获得动能 $\frac{1}{2}mv^2$. 由能量守恒定律

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad 或 \quad v = \sqrt{2gy} \tag{1.1}$$

如果以 s 表示曲线从 A 点算起的弧长，则

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \tag{1.1a}$$

而且弧长元素为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{1.2}$$

于是，从 (1.1a)，和 (1.2)，有

$$dt = \frac{ds}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}\, dx \tag{1.3}$$

从 A 到 B 积分，设总降落时间为 T，即得

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}\, dx \tag{1.4}$$

对于不同的 $y(x)$，T 也不同. 所以，T 是 $y(x)$ 的某种广义的函数，人们称这一类型的广义函数为**泛函**. 亦即 T 是 $y(x)$ 的一种泛函. 凡变量的值是由一个或多个函数的选取而确定的，这个变量称为这些函数的泛函. 最速降线问题，于是可以说成：

在满足 $y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$ 的一切 $y(x)$ 函数中，选取一个函数，使(1.4)式的泛函 T 为最小值．这个特定的函数就是最速降线的函数表达式．这就是最速降线问题的变分命题．所以，变分命题在实质上就是求泛函的极大值或极小值的问题．在这里我们应该指出下列各点：

(甲) 在泛函的积分线上，$x=0$，$x=x_1$ 都是定值，亦即是说，在变分中，$y(x)$ 的两端界限已定不变，其端值也不变，即 $y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$；这种变分称为边界已定的变分．

(乙) 在(1.4)式中，$\frac{dy}{dx}$ 不言而喻应该是存在的，至少是逐段连续的．

(丙) 这种变分，除端点为定值的边界条件外，没有其他条件，这是一种最简单的变分．

第二个变分命题，短程线 (Geodesic line) 问题

设 $\varphi(x,y,z)=0$ 为一已知曲面，求曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上所给两点 (A,B) 间长度最短的曲线．这个最短曲线叫短程线(图 1.2)．球面(如地球表面)上两点间的短程线即为通过两点的大圆．这是一个典型的变分问题．按曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 两点间的曲线长度为

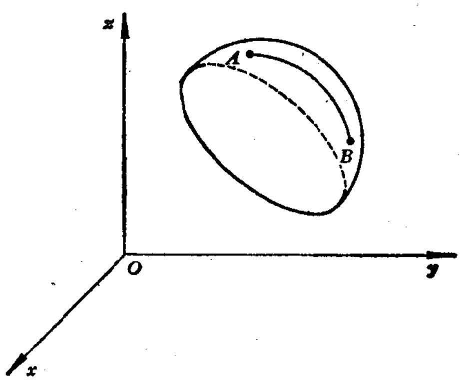

图 1.2 曲面上两点 A，B 间的短程线

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \tag{1.5}$$

其中 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 满足 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件. 于是,我们的变分命题可以写为:

在 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 满足 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件下,从一切 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 的函数中,选取一对 $y(x)$, $z(x)$, 使泛函 L [即 (1.5) 式]为最小.

这个变分命题和最速降线问题有下列相同和不同之点:

(甲) 它也是一个泛函求极值的问题,但这个泛函有两个可以选取的函数,即 $y(x)$, $z(x)$.

(乙) 边界也是已定不变的, 也有端点定值, 即 $y(x_1)=y_1$, $z(x_1)=z_1$; $y(x_2)=y_2$, $z(x_2)=z_2$.

(丙) $y(x)$, $z(x)$ 之间必需满足:

$$\varphi[x,y(x),z(x)]=0 \tag{1.6}$$

它是一个在 (1.6) 式条件下的变分求极值问题, 不是像最速降线问题那样是无条件的. 我们称这种命题为条件变分命题. 这个问题已经在 1697 年为约翰·伯努利所解决[2]. 但是这一类问题的普遍理论直到后来通过欧拉 [L. Euler (1744)][4], 拉格朗日 [L. Lagrange (1762)][5] 的努力才解决的.

第三个变分命题,等周问题 (isoperimetric problem)

在长度一定的封闭曲线中,什么曲线所围面积最大. 这个问题在古希腊时已经知道答案是一个圆, 但它的变分特性是一直到十八世纪才被欧拉察觉出来的 (1744)[4].

将所给曲线用参数形式表达为 $x=x(s)$, $y=y(s)$, 因为这条曲线是封闭的,所以 $x(s_0)=x(s_1)$, $y(s_0)=y(s_1)$, 这条曲线的周长为:

$$L=\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds \tag{1.7}$$

其所围面积 R 为[根据格林 (Green) 公式]:

$$R = \iint_R dxdy = \frac{1}{2}\oint_c (xdy - ydx)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_1}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)ds \tag{1.8}$$

等周问题于是可以写成：

在满足 $x(s_0)=x(s_1)$，$y(s_0)=y(s_1)$ 和 (1.7) 式条件下，从一切 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 的函数中选取一对 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 函数，使泛函 R [即 (1.8) 式]为最大.

这也是一个条件变分命题，但其条件本身也是一个泛函 [即 (1.7) 式]；同时，其边界(这里是端点)也是已定不变的；而且它是两个函数 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 所确定的泛函.

这三个历史上有名的变分命题，都是17世纪末期提出的，又都是18世纪上半叶解决的. 解决过程中，欧拉和拉格朗日创立了现在大家都熟知的变分法. 这个变分法后来广泛地用在力学的各个方面，对力学的发展起了很重要的作用.

十八世纪中叶，柏林科学院内发生过一件和变分法有关的政治事件，实质上是一件唯物主义和唯心主义的斗争事件[2,6,7]. 当时的科学院院长马波托斯 [Maupertuis (1698—1759)] 为了拍普鲁士皇帝弗烈德立赫二世的马屁，歌功颂德，提出了一个宗教命题，说什么"世界最优美，他按最完善的可能创造万物". 并宣称这也是已故前院长莱比尼兹 (1646-1716) 的思想. 有个荷兰数学家柯尼格 (Samuel Kōenig)，在 1756 年提出了莱比尼兹的一封信 (1707，但没有发信地址)，说莱比尼兹并不赞成这种说法，并以院士的身份写了一篇数学论文，在院报上发表，证明了在某些条件下，并不像院长声称的那样，走向最大，而是走向最小的. 马波托斯恼羞成怒，借口莱比尼兹的信没有发信地址，硬说这封信是柯尼格伪造的，并把柯尼格的院士职位也撤消了. 那时欧拉虽是变分法的创始人，熟知极大极小和不稳定平衡问题，作为科学院副院长，但也公开支持这个决议. 数学家伏尔泰 (Voltaire) 那时也是柏林科学院院士，对此深为不满，写了一篇讽刺论文"院长博士 (Dr. Akakia)"，把马波托斯写得既傲慢又愚蠢，把欧拉写得既天真又奴态十足，但皇帝禁止出版这篇论文，后来伏尔泰也逃离了普鲁士，这篇论文是在荷兰出版的.

上述三个历史上有名的变分命题，都有从泛函求极值的共同性，端点或边界都是已定不变的，但有的有条件(第二、第三命题)，有的没有条件(第一命题)．在有条件的变分命题中，有的条件是通常的函数条件(第二命题)，有的条件则本身也是一种泛函(第三命题)．当然，边界已定不变的、没有条件的变分(第一命题)是最简单的，而且也是很有用的．这种边界已定不变的无条件变分还有许多例子．现在再举三个例子如下：

第四个变分命题，最小旋转面问题

设有一正值函数 $y=y(x)>0$，它所代表的曲线通过 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 两点，当这条曲线绕 x 轴旋转时，得一旋转面，求旋转面的面积最小的那个函数 $y=y(x)$．

即在 $y(x_1)=y_1$，$y(x_2)=y_2$ 的端点条件下求使泛函

$$S=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \tag{1.9}$$

最小的函数 $y(x)$．

第五个变分命题，费马 (Fermat) 原理

费马原理说：通过介质的光路，使光线通过这一段光路所需时间为最小值．以二维空间为例．设介质的折光率为 $\mu(x, y)$，而光线通过介质的速度 $v(x, y)=\dfrac{c}{\mu(x, y)}$，其中 c 为真空中的光速，是一个常数．从原点 $(0, 0)$ 到 (x, y) 点的光行时间为

$$T=\int_0^l \frac{ds}{v}=\frac{1}{c}\int_0^{x_1} \mu(x, y)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \tag{1.10}$$

其中 $y=y(x)$ 为待定的光线通过的路线．费马定理成为："求 $y(x)$，使泛函 T [(1.10) 式]成为最小值"．

下面再增加一个条件变分命题的例子．

第六个变分命题，悬索形状问题

求长度已知的均匀悬索的悬线形状．悬线形状是由悬线达到

最低位能的要求来决定的，而悬线的位能则由悬线的重心决定.设悬线各点的铅垂坐标为 $y(x)$，并通过 $A(0, y_0)$，$B(x_1, y_1)$ 两点，悬索长度为

$$L = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{1.11}$$

悬索重心高度为

$$y_c = \frac{1}{L}\int_0^L y ds = \frac{1}{L}\int_0^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{1.12}$$

这个变分命题是：在通过 $y(0) = y_0$，$y(x_1) = y_1$ 两点，并满足(1.11)式的条件的一切曲线 $y = y(x)$ 中，求使 y_c [即(1.12)式]为极小的函数 $y = y(x)$. 这是一个端点已定不变的条件变分命题.

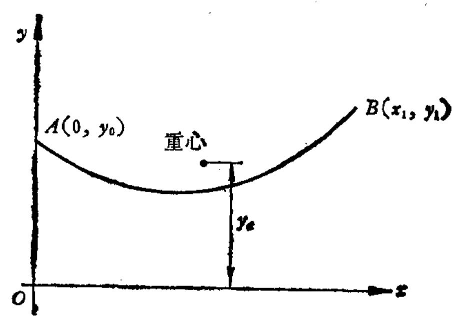

图 1.3 悬索的形状和坐标

归纳起来，我们可以把最简单的边界已定不变的变分命题写为：

在通过 $y(x_1) = y_1$，$y(x_2) = y_2$ 两点的条件下，选取 $y(x)$，使泛函

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] dx \tag{1.13}$$

为极值.

其中 $y'(x) = \frac{dy}{dx}$，$F(x, y, y')$ 为一已知的 x，y，y' 的函数，$F(x, y, y')$ 当然还有一些可微的条件. $y(x)$ 也视所处理的问题

不同而有一些可微的条件，它是在变分法的发展过程中，欧拉和拉格朗日所最先处理的变分命题.

(1.13) 式这样的泛函还可以推广，使它包括 $y(x)$ 的高阶导数 $y''(x), y'''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$ 等. 例如对泛函

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)]dx \quad (1.14)$$

的变分命题，在这样的变分命题中，边界条件有时具有下面形式.

$$\left.\begin{array}{l}y(x_1)=y_1, y'(x_1)=y_1', y''(x_1)=y_1'', \cdots, y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}\\ y(x_2)=y_2, y'(x_2)=y_2', y''(x_2)=y_2'', \cdots, y^{(n-1)}(x_2)=y_2^{(n-1)}\end{array}\right\} \quad (1.15)$$

亦即在边界点上不仅给出函数的值，而且还给出 $(n-1)$ 阶以下的导数值.

还可以推广到泛函有两个或两个以上函数的情况. 如泛函形式为

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}; z, z', z'', \cdots, z^{(n)})dx \quad (1.16)$$

也可以推广到含有多个自变量的函数的泛函. 这时，泛函是一个重积分，例如二个自变量的泛函为

$$\Pi=\iint_S F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \quad (1.17)$$

所有函数 $z(x, y)$ 在域 S 的边界 c 上的值已给出，即所有容许曲面都要经过 c.

§1.2 变分及其特性

函数的极大及极小问题是大家知道的，泛函的极大极小问题有类似的特性. 首先，让我们把函数的定义和泛函的定义，函数的连续和泛函的连续，函数的宗量的增量（或微分）和泛函的宗量增量（或变分）互相类比地进行研究.

1. 函数的定义和泛函的定义

如果对于变量 x 的某一区域中的每一 x 值，y 有一值与之对

应，或者数 y 对应于数 x 的关系成立，则我们称变量 y 是变量 x 的函数，即 $y = y(x)$.

如果对于某一类函数 $\{y(x)\}$ 中每一函数 $y(x)$，Π 有一值与之对应，或者数 Π 对应于函数 $y(x)$ 的关系成立，则我们称变量 Π 是函数 $y(x)$ 的泛函，即 $\Pi = \Pi[y(x)]$.

所以，函数是变量和变量的关系，泛函是变量与函数的关系．泛函是一种广义的函数．

2. 微分和变分

函数 $y(x)$ 的宗量 x 的增量 Δx 是指这个宗量的某两值之差 $\Delta x = x - x_1$. 如果 x 的微分用 dx 表示，则 dx 也是增量的一种，即当这种增量很小很小时，$dx = \Delta x$.

泛函 $\Pi[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 的增量在它很小时称为变分，用 $\delta y(x)$ 或 δy 来表示，$\delta y(x)$ 是指 $y(x)$ 和跟它相接近的 $y_1(x)$ 之差，即 $\delta y(x) = y(x) - y_1(x)$；这里应指出：$\delta y(x)$ 也是 x 的函数，只是 $\delta y(x)$ 在指定的 x 域中都是微量．这里还假定，宗量 $y(x)$ 在接近 $y_1(x)$ 的一类函数中是任意改变着的．

曲线 $y = y(x)$，$y = y_1(x)$ 要怎样才算是相差很小或很接近？这是需要进一步说明的．

最简单的理解是，在一切 x 值上，$y(x)$ 和 $y_1(x)$ 的差（指差的模）都很小；也就是 $y = y(x)$，$y = y_1(x)$ 的曲线的纵坐标到处都很接近．图 1.4a，b 所画二曲线都是接近的．

实际情况是，曲线图 1.4b 中不仅两曲线的纵坐标接近，而且在对应点的切线方向之间也是接近的；但曲线图 1.4a 中的两条曲线则不然，虽然两曲线的纵坐标是接近的，但在对应点的切线方向之间并不接近．图 1.4a 中的两条曲线，我们把它们叫做**零阶接近度**的曲线，在这类接近度的曲线中，$y(x) - y_1(x)$ 的差值到处很小，但 $y'(x) - y_1'(x)$ 的差值就不很小．图 1.4b 中的两条曲线，则叫做**一阶接近度**的曲线，在这类接近度的曲线中，$y(x) - y_1(x)$，$y'(x) - y_1'(x)$ 的差值到处都很小．