线性拓扑空间引论

夏道行 杨亚立

上海科学技术出版社

责任编辑　赵序明

线性拓扑空间引论

夏道行　杨亚立

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 10.25　字数 271 000

1986年11月第1版　1986年11月第1次印刷

印数：1-5,400

统一书号：13119 1325　定价：2.55元

目　　录

预 备 知 识

本书假定读者已知集论、线性空间、点集拓扑等概念。但为了便于读者查找，又由于使用的名词和符号可能有所不同，在此把以后要用到的有关内容作一概述。

一、集和序集

集由元组成。通常用大写字母 A, B, …表示集；用小写字母 a, b, c, …, x, y, z, u, v, …表示集中的元。用 $a\in A$ 表示"a 是 A 的元"；$a\bar{\in}A$ 表示"a 不是 A 的元"。设 A、B 是两个集合，用 $A\subset B$ 表示"A 是 B 的子集"；用 $\{a\}$ 表示包含 a 的单点集；$\emptyset$ 表示空集。

设 X 是某个集，我们常常根据 X 中的元的某些性质来确定 X 的子集。例如实数集 R，由"大于 1"这一性质就可以确定 R 的一个子集，也就是说，由实数中"大于 1"的所有的数组成 R 的一个子集，此子集用下列符号表示之：

$$\{x\,|\,x\in R,\ x>1\}.$$

集 X 中的元的性质如果是由一个命题 P 给定的，用 $P(x)$ 表示元 x 具有命题 P 所述的性质，那末 X 中所有满足命题 P 的元的全体所组成的子集可用下列符号表示之：

$$\{x\,|\,x\in X,\ P(x)\}.$$

如果 P、Q 表示两个命题，我们用 $P\Longrightarrow Q$ 表示：由命题 P 可以推得命题 Q，即满足命题 P 的元必定满足命题 Q。$P\Longleftrightarrow Q$ 表示命题 P 和 Q 是等价的。

本书对常用到的几个集也以常用的固定符号表示之，例如，用 N 表示自然数的全体；K 表示实数或复数域；R 表示实数域；C 表示复数域。

设X、Y是两个集合。X到Y的映照f用$f: X\to Y$或$x\mapsto f(x)$表示之。X称为f的定义域。X在f映照下的像：$f(X)\equiv\{f(x)\mid x\in X\}$称为$f$的值域，其中"$\equiv$"表示它所联结的两边按定义是相同的。如果$A$是$X$的子集，那末把$A$中的每个元$x$映成$f(x)\in Y$的映照称为映照$f$在$X$的子集$A$上的限制，记为$f|_A$。通常，记$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$。如果$B\subset Y$，则称$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$为$B$在映照$f$下的原像。

集X中的元之间的关系$\leqslant$(或$\prec$)称为序关系，是指它满足下列三个条件：

(a) $x\leqslant x$(自反性)；

(b) $x\leqslant y,\ y\leqslant z\Longrightarrow x\leqslant z$(传递性)；

(c) $x\leqslant y,\ y\leqslant x\Longrightarrow x=y$(反对称性)。

通常，$y\geqslant x$即指$x\leqslant y$。如果$\leqslant$是序关系，那末$\geqslant$也是序关系，称为原来序关系$\geqslant$的对偶序关系。$y<x$表示$y\leqslant x$且$y\neq x$。一个具有序关系的集称为序集。如果序关系还满足：对于X中的每两个元x、y，下面两个关系至少有一个成立：

$$x\geqslant y,\ y\geqslant x, \tag{1}$$

那末这个序关系称为全序关系，而序集X称为全序集。不满足上述性质的序集称为半序集。

如果X是序集，A是X的子集，若$a\in X$使

$$x\in A\Longrightarrow x\leqslant a\quad(x\geqslant a),$$

则称a为A的上界(下界)。

如果a是A的上界(下界)，而且对于A的每个上界(下界)b，一定有$a\leqslant b(a\geqslant b)$，那末$a$称为$A$的上确界或上端(下确界或下端)。如果上(下)确界存在，它是唯一的。

如果序集X的子集A包含A的一个上界(下界)a，那末称a为A的最大元(最小元)。这时a也是A的上端(下端)。如果序集X的子集A中有一个元$a\in A$，A中没有元b能满足$b>a\ (<a)$，那末称a为A的极大(极小)元。最大(最小)元必是极大(极小)元，反之，一般不成立，但在全序情形是对的。

如果序集X中每两个元组成的集都有上端和下端，则称X为格(或络)，在格中，x、y的上端(下端)表示为$x\vee y(x\wedge y)$。

如果X是序集，对X中的任意两元x、y，必存在一元$z\in X$，使

$$z\geqslant x,\ z\geqslant y\ \ (z\leqslant x,\ z\leqslant y).$$

则称X为按序关系$\geqslant(\leqslant)$的定向集。

本书承认选择公理，下述命题是和选择公理等价的。

Zorn 引理 设X是非空序集，如果X中的每个全序子集在X中都有上端，那末X中至少有一个极大元。

设X是一个集，$\mathscr{F}$是X中的子集的集合(称为集族)。如果满足下述条件：

(a) $\mathscr{F}\neq\emptyset$，且$\emptyset\,\overline{\in}\,\mathscr{F}$；

(b) 如果$F\in\mathscr{F}$，而$F\subset G\subset X$，那末$G\in\mathscr{F}$；

(c) 如果$F\in\mathscr{F}$，$G\in\mathscr{F}$，那末$F\cap G\in\mathscr{F}$。

则称集族$\mathscr{F}$为X中的一个滤子。

二、点集拓扑

定义 1 设X是非空集，如果对于X中的每一个元x，规定了X的一些子集所组成的集族，以$\mathscr{V}(x)$表示之，如果$\mathscr{V}(x)$满足下面四个条件，则称为点x的环境(或邻域)组。

(1) 如子集$V\in\mathscr{V}(x)$，则$x\in V$，即每点的环境必包含这一点。

(2) 如果$V\in\mathscr{V}(x)$，则当$U\supset V$时，$U\in\mathscr{V}(x)$。换句话说，如果V是x的一个环境，那末包含V的集也一定是x的环境。

(3) $\mathscr{V}(x)$关于有限交是封闭的，即如果$V_1, \cdots, V_n\in\mathscr{V}(x)$，那末$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n\in\mathscr{V}(x)$。

(4) 设$V\in\mathscr{V}(x)$，则必存在一个集$U\in\mathscr{V}(x)$，使得对于U中一切y，有$V\in\mathscr{V}(y)$。粗略地说，如果V是x的一个环境，那末它也是"充分接近"于x的一切点的环境。

$T=\{\mathscr{V}(x), x\in X\}$定义了$X$上的一个拓扑。赋有拓扑的集称为拓扑空间，拓扑空间可记为(X, T)，或简单地记为X。

例如，设X是任一非空集，对X中每个x，规定

$$\mathscr{V}(x)=\{X\},$$

即只有一个集X组成的集族。易知$\mathscr{V}(x)$满足定义中一切条件，而这样定义的拓扑称为平凡拓扑。又如果规定X中每个含x的子集作为x的环境，显然也构成一个拓扑，称为X上的离散拓扑。

定义 2 设X是一拓扑空间，而$\{x_\nu\}$是X中的一个定向点列(即足标集是一个定向序集)，所谓点列x_ν收敛于$x_0(\in X)$，是指对于每个$V\in\mathscr{V}(x)$，必存在足标ν_0，使

$$\nu\geqslant\nu_0\Longrightarrow x_\nu\in V.$$

x_0称为点列x_ν的极限。通常表示为$\lim x_\nu=x_0$，或$x_\nu\xrightarrow{T}x_0$，其中T是X中的拓扑。

设A是X中的点集，所谓$x_0\in X$是A的附着点，是指由A中的点可作出一个半序点列收敛于x_0，A的附着点的全体组成的集称为A的闭包，记为$\overline{A}$或$\overline{[A]}_X$。如果$A=\overline{A}$，则称A为闭集。闭集的余集称为开集。点x是A的内点，是指$A\in\mathscr{V}(x)$，显然A的内点一定属于A。A的内点的全体所组成的集合称为A的开核，记为A^i。容易知道，A为开集的充要条件是A为它自己的每个点的环境，即$A=A^i$。容易验证：

(I) 设$\mathfrak{E}$是拓扑空间X中一切开集所组成的集族，则

(O_1) 空集$\varnothing$和全空间X在$\mathfrak{E}$中；

(O_2) $\mathfrak{E}$中任意个集的并集在$\mathfrak{E}$中；

(O_3) $\mathfrak{E}$中有穷多个集的交集在$\mathfrak{E}$中。

定理 1 设X是一集，$\mathfrak{E}$是X中某些子集所组成的集族，并且满足上述条件(O_1)、(O_2)、(O_3)。如果对每个元$x\in X$，规定$V\in\mathscr{V}(x)$，是指存在$O\in\mathfrak{E}$，使$x\in O\subset V$。则$\mathscr{V}(x)$满足定义1中的(1)～(4)，从而由它可在X上定义一拓扑，使X成为拓扑空间。并且在这拓扑空间中，$\mathfrak{E}$恰是X的一切开集所组成的集族。

证 $\mathscr{V}(x)$满足定义1中的条件(1)、(2)是明显的。由(O_3)可知$\mathscr{V}(x)$也满足(3)。下面只要验证条件(4)。设$V\in\mathscr{V}(x)$，依定义，存在$O\in\mathfrak{E}$，使$x\in O\subset V$。如果$y\in O$，则因$y\in O\subset V$可知$V\in\mathscr{V}(y)$，所以$O\in\mathscr{V}(x)$满足条件(4)的要求。从而由$\mathscr{V}(x)$可

在 X 上给定一个拓扑。

下面证明 $\mathfrak{C}$ 恰好是 X 中的一切开集。设 $O\in\mathfrak{C}$，依上述规定，对于每个 $x\in O$，$O\in\mathscr{V}(x)$。所以 O 是开集。反之，设 U 是拓扑空间 X 中的开集，那末对于每个 $x\in U$，$U\in\mathscr{V}(x)$。依上述规定，存在 $O_x\in\mathfrak{C}$，使 $x\in O_x\subset U$。因此，根据 (O_2)，有

$$U=\bigcup_{x\in U}O_x\in\mathfrak{C}.$$

证毕。

设 X 是拓扑空间，在其上规定了每个点 x 的环境组 $\mathscr{V}(x)$。那末 X 中开集的全体 $\mathfrak{C}$ 满足 $(O_1)\sim(O_3)$。由定理 1，依据 $\mathfrak{C}$，又可定义 X 上的一个拓扑，则这个拓扑和原拓扑必定一致。这是因为：由定义 1 中条件(4)，对每个 $V\in\mathscr{V}(x)$，必存在 x 的开环境 W，使 $W\subset V$。这样，由全体开集就可唯一地确定相应的拓扑。所以定义拓扑时也可以规定满足 $(O_1)\sim(O_3)$ 的集族作为开集的全体。

定义 3 设 X 是一拓扑空间，$x\in X$。又设 $\mathscr{U}(x)$ 是点 x 的某些环境所成的环境族。如果对于点 x 的任何环境 V，必有 $U\in\mathscr{U}(x)$，使得 $U\subset V$。则称 $\mathscr{U}(x)$ 是拓扑在点 x 的环境基。

例如，当 (R,ρ) 是一个距离空间，$x\in R$，取 $\mathscr{U}(x)=\{O(x,r)|r>0\}$，那末它就是在 x 点的一个环境基。

由于 x 的环境组 $\mathscr{V}(x)$ 可由环境基 $\mathscr{U}(x)$ 唯一地确定，故拓扑可由环境基 $\mathscr{U}(x)$ 确定。

定理 2 设 X 是一集，如果对每个点 $x\in X$ 指定了 X 的子集族 $\mathscr{U}(x)$ 满足条件：

(N_1) 对每个 $U\in\mathscr{U}(x)$，含有点 x；

(N_2) 对任何 U_1、$U_2\in\mathscr{U}(x)$，必有 $U\in\mathscr{U}(x)$，使得 $U\subset U_1\cap U_2$；

(N_3) 设 $U\in\mathscr{U}(x)$，而且 $y\in U$，则必有 $V\in\mathscr{U}(y)$，使得 $V\subset U$。那末必有 X 上的唯一拓扑 T，使得 $\mathscr{U}(x)$ 成为 T 在 x 点的环境基。

设 X、Y 是拓扑空间。映照 $f: X\to Y$，如果对于 $y=f(x)$ 的每

个环境V，$f^{-1}(V)$是x的环境，则称f在x点连续。如果f在每一点$x\in X$连续，则称f是连续的。f是连续的充要条件是：对Y中的每个开集G，$f^{-1}(G)$是X中的开集。

设$\mathscr{F}_1$、$\mathscr{F}_2$是X中的两个滤子，若$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$（在集包含的意义下），则称$\mathscr{F}_2$精于$\mathscr{F}_1$。任意点$x$的完全环境组$\mathscr{V}(x)$是一个滤子，称为$x$点的邻滤子。若$X$上的一个滤子$\mathscr{F}$精于$x$的邻滤子，则称拓扑空间$X$上的滤子$\mathscr{F}$收敛于$x$。设$\{x_\alpha,\ \alpha\in A\}$是$X$中的定向点列，令$S(\alpha_0)=\{x_\alpha|\alpha\geqslant\alpha_0\}$，则由$\{S(\alpha),\ \alpha\in A\}$生成的滤子称为$\{x_\alpha\}$的截部滤子。定向点列$x_\alpha$收敛于$x$的充要条件是它的截部滤子收敛于$x$。

在集X上赋以两个拓扑$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$。如果每一个$\mathscr{T}_1$-开集都是$\mathscr{T}_2$-开集，则称拓扑$\mathscr{T}_2$精于拓扑$\mathscr{T}_1$（或$\mathscr{T}_1$粗于$\mathscr{T}_2$），记为$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$。

设$(X,\ \mathscr{T})$是拓扑空间，A是X的子集，如果在A上赋以一个拓扑，使它的开集就是X中的开集和A的交，则称A为X的子空间，其拓扑称为$\mathscr{T}$在A上的导出拓扑，记为$\mathscr{T}|_A$，也称为A上的相对拓扑。

设X是拓扑空间，如果对X中的任意两个不同的点，必至少有一点的一个环境不包含第二个点，那末称X满足T_0分离公理；如果对X中的任意两个不同的点x、y，x必有一个环境不包含y，而y也有一个环境不包含x，则称X满足T_1分离公理；如果对X中的任意两个不同的点x、y，存在x、y相应的环境U、V，使得$U\cap V=\emptyset$，则称X满足Hausdorff（或T_2）分离公理。拓扑空间X是T_2型的充要条件是：其中每个收敛定向点列的极限是唯一的。如果拓扑空间X是T_1型的，且每一点具有由闭环境组成的环境基，则称X是正则的（或T_3型的）。如果拓扑空间X是T_2型的，且对于每个闭子集A及每个$b\bar{\in}A$，存在一个连续函数$f:X\to[0,1]$，使$f(b)=1$及$x\in A$时$f(x)=0$，则称X为全正则的。如果拓扑空间中每两个不相交的闭集A、B，都存在开集U、V，使$A\subset U$，$B\subset V$，且$U\cap V=\emptyset$，则称X是正规的（或T_4型的）。很明显，每个

正规空间是全正则的。每个全正则空间是正则的。

如果对于拓扑空间 X 中的每一点 x，都存在由至多可列个环境组成的基，则称 X 满足第一可列公理。

设 X 是 T_2 型拓扑空间，如果对于 X 的每个开覆盖都存在有限子覆盖，则称 X 是紧的。X 是紧的充要条件是：对于 X 中的每个闭集族，如其中有限个闭集均有非空交，则此闭集族必有非空交。X 中的子集 A 称为是紧的，是指把 A 看作 X 的子空间时是紧的。设 A 是 X 中的子集，如果 A 的闭包 $\overline{A}$ 是紧的，则称 A 是相对紧的。紧空间的每个闭子空间是紧的。任意个紧空间的拓扑积是紧的（称为 Тихонов 定理）。

三、 线性空间

本书中将只讨论实数域或复数域上的线性空间。设 X 是线性空间，在 X 中能张成全空间的线性无关向量组称为 X 中的 Hamel 基。设 $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ 是 X 中的一个 Hamel 基，则对每个 $x\in X$，必存在有限个 $x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_n}$，使 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_{\alpha_i}$，$\lambda_i\in K$（实数或复数域）。

定理 3 每个线性空间 X 都有 Hamel 基。

证 设 P 是 X 中的线性无关子集组成的集族。在 P 中按 $\subset$ 规定序，$A\leqslant B$ 即是指 $A\subset B$，P 是一个半序集。如果 P_1 是 P 中的任一全序子集，令 $B=\bigcup\{A, A\in P_1\}$，容易知道，B 是 X 中的线性无关向量组，$B\in P$，B 是 P_1 的上端。由 Zorn 引理即知 P 中必有极大元，此极大元即是 X 的 Hamel 基。证毕。

设 X 是线性空间，所有形如 x_0+M 的子集（其中 $x_0\in X$，M 是 X 的线性子空间）称为 X 中的（线性）流形。X 中的极大真子流形称为超平面。子集 $H\subset X$ 是超平面的充要条件为：存在 X 上的某线性泛函 f，使对某 $\alpha\in K$，$H=\{x\mid f(x)=\alpha\}$。

如果 M、N 是 X 的线性子空间，$X=M\oplus N$ 是代数直接和，则称 N 是 M 的代数补子空间。称 X/M 的维数为子空间 M 的余维数（codimension），或 co-维数。

第一章 线性拓扑空间

在本世纪初，泛函分析的主要研究对象是具体和抽象的线性赋范空间和其上的线性算子，在1920年以后，进一步讨论了线性距离空间。线性赋范空间和线性距离空间都有如下性质：首先，它们都是线性空间，即在空间中定义了加法和数量乘法两种代数运算，并且关于这两种运算是封闭的。其次，它们按照范数（或赋准范）所定义的距离成为一个拓扑空间，并且按照这个拓扑，线性空间中所定义的两种代数运算是连续的。这种既是代数系统又是拓扑空间的结构在泛函分析中是最有用的。但是，随着研究的不断深入，仅仅研究线性赋范空间或线性距离空间上的理论，应用起来是很不够的。例如，每个无限维线性赋范空间按弱拓扑就不是一个线性距离空间，这说明了引进并研究更为广泛的空间类是很必要的。在1934～1935年，由 Колмогоров 和 J. Von Neumann 几乎同时引进了线性拓扑空间的概念，它可以看作线性距离空间的一种推广。在此附带说明一下，有些书上为了区别于另一个概念，而把这里称作的线性拓扑空间叫做拓扑向量空间。

§1 定　　义

设 E 是一集，其中的元记为 x, y, …。如果在 E 中规定了线性运算和拓扑 $\mathscr{T}$，使得 E 满足下面三个条件：

(1) E 是一个线性空间（本书中只考虑当系数域 K 是实数域或复数域的情形，分别称为实线性空间和复线性空间）；

(2) E 上有一个拓扑 $\mathscr{T}$，使 $(E, \mathscr{T})$ 为拓扑空间；

(3) E 中的线性运算关于 E 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 是连续的，即

(a) 乘积拓扑空间 $E\times E$ 到 E 的映照

$$(x, y)\longmapsto x+y$$

是连续的。

(b) 令数域 K 取欧几里得拓扑，乘积拓扑空间 $K\times E$ 到拓扑空间 E 的映照

$$(\lambda, x)\longmapsto \lambda x$$

是连续的。

则称 E 是一个线性拓扑空间。有时为了标明 E 上取拓扑 $\mathscr{T}$，把线性拓扑空间用记号 $(E, \mathscr{T})$ 或 $E(\mathscr{T})$ 表示。

设 E 是线性空间，$x\in E$，集 $A\subset E$，用 $A+x$ 表示集 $\{y+x|y\in A\}$，称它为 A 经过平移 x 后所成的集。又，如果 $B\subset E$，用 $A+B$ 表示集 $\{x+y|x\in A, y\in B\}$，称它为 A 和 B 的算术和。显然，平移可看作其特例，$A+x$ 即为 $A+\{x\}$，其中 $\{x\}$ 表示是由 x 一个元组成的单点集。类似地，可以定义 λA, $A-B$, $-A$ 等集。不过须注意：一般说来，不能断言 $2A=A+A$，但有 $2A\subset A+A$。

如果用拓扑空间的相应语言，条件(3)又可以表达如下：

(a′) 对于 E 中任意一对向量 x、y，和 $x+y$ 的任一环境 U_{x+y} 必有 x、y 的相应环境 U_x、U_y，使得

$$U_x+U_y\subset U_{x+y}. \tag{1}$$

(b′) 对于 E 中任一向量 x、任一数 $\lambda\in K$ 以及 λx 的任一环境 $U_{\lambda x}$，必有相应的正数 δ 和 x 的环境 U_x，使得当 $|\lambda-\mu|<\delta$ 时，有

$$\mu U_x\subset U_{\lambda x}. \tag{2}$$

我们可以把(a′)和(b′)中所取的环境限制在环境基中。

顺便指出，这里关于加法和数乘的连续性是指 $(x, y)\mapsto x+y$ 是 x、y 的二元连续映照；$(\lambda, x)\mapsto\lambda x$ 是 λ、x 的二元连续映照。这比分别关于一个变元的连续性的条件强。

在同一个线性空间上，通常可以规定几个拓扑，使它成为线性拓扑空间。下面我们可看到，如果在线性赋范空间中，用弱拓扑代替范数拓扑，也是一个线性拓扑空间。

设 E 是一个线性空间，如果在 E 上给定了拓扑 $\mathscr{T}$，使得 $(E, \mathscr{T})$

是一个线性拓扑空间，则就称 $\mathscr{T}$ 是 E 上的一个向量拓扑。从定义可直接知道，线性拓扑空间就是给定了一个向量拓扑的线性空间。

设 $(E_1, \mathscr{T}_1)$ 与 $(E_2, \mathscr{T}_2)$ 是两个线性拓扑空间，如果存在 E_1 到 E_2 上的一一映照 φ，使得 φ 既是线性空间 E_1 与 E_2 间的同构映照，同时又是拓扑空间 $(E_1, \mathscr{T}_1)$ 与 $(E_2, \mathscr{T}_2)$ 间的同胚映照（这样的映照 φ 称为同构同胚映照），则称线性拓扑空间 $(E_1, \mathscr{T}_1)$ 与 $(E_2, \mathscr{T}_2)$ 是拓扑同构的，或简称同构的，用记号 $(E_1, \mathscr{T}_1)\cong(E_2, \mathscr{T}_2)$ 表示之。

线性拓扑空间的拓扑可以局部化。即指：线性拓扑空间的拓扑可以用 0 点的环境（或一组环境基）完全确定。在线性拓扑空间 $(E, \mathscr{T})$ 中，0 的环境集合用记号 $\mathscr{N}(E, \mathscr{T})$ 或 $\mathscr{N}(E)$，$\mathscr{N}(\mathscr{T})$，$\mathscr{N}$ 简单表示之。有时也用 $\mathscr{N}_a$ 表示 a 点的环境集。

定理 1　设 E 是线性拓扑空间，$a\in E$，集合 $G\subset E$ 成为 a 点的环境的充要条件是：$G-a\in\mathscr{N}$。换句话说，$a+U\in\mathscr{N}_a$ 的充要条件是 $U\in\mathscr{N}$。

证　对 E 中的任一向量 a，作映照 $T_a: x\mapsto x+a$。由线性拓扑空间定义中的条件(3)的(a)可知：T_a 是连续映照。易知，T_a 的逆映照 $T_a^{-1}=T_{-a}: x\mapsto x-a$ 也是连续的。所以 T_a 是 E 到 E 上的拓扑同胚映照。因为 $T_a0=a$，所以 $G\in\mathscr{N}_a$ 的充要条件是：$T_a^{-1}G=G-a$ 是 0 的某个环境。证毕。

定理 1 说明了线性拓扑空间的齐性。由定理 1 可知：对于每个向量拓扑可由某一点的环境全体所唯一确定，特别可以由 0 点的环境 $\mathscr{N}$ 唯一确定。$\{a+U\,|\,U\in\mathscr{N}\}$ 就是 E 中 a 点环境全体，即任一点 a 的环境可以由 0 的环境全体经平移 a 而得到。从而，线性空间 E 上的两个向量拓扑相同的充要条件是：在 0 点有相同的环境集合（或环境基）。与这个等价的是：两个向量拓扑相同的充要条件是：两个向量拓扑有相同的收敛于 0 的定向点列(net)。

例 1　设 E 是线性空间，在 E 中规定了最粗拓扑（即只有全空间及空集为开集）。这时加法和数乘运算的连续性是平凡的。除

了E是仅由$\{0\}$一个向量组成的这种情况外，它不满足分离性条件。

例 2 赋准范空间。实数或复数域K上的线性空间E叫做赋准范的，是指：存在由E到实数的一个映照$x\mapsto\|x\|$，满足下述条件(x、y表示E中的元)：

(a) $\|x\|\geqslant 0$，且$\|0\|=0$；

(b) $\|-x\|=\|x\|$；

(c) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

(d) 如果$t_n\to t$ (t_n、$t\in K$)，且$\{x_n\}\subset E$，$\|x_n-x\|\to 0$，则$\|t_nx_n-tx\|\to 0$。

这时，$\|x\|$称为元x的赋准范。赋准范空间$(E,\|\cdot\|)$上通常按距离$\rho(x,y)=\|x-y\|$引进拓扑成为一个距离空间。由定义容易直接验证，如果在E中$x_n\to x$，$y_n\to y$，数$t_n\to t$，则$t_nx_n+y_n\to tx+y$。由此可知，赋准范空间是一个线性拓扑空间。

特别是，赋范空间是赋准范空间，从而赋范空间按范数拓扑是线性拓扑空间。

设Φ是E上的拓扑集合，取强于Φ中的每个拓扑的最弱拓扑，记为$\bigvee\Phi$。拓扑$\bigvee\Phi$可以这样构造：记$O(T)$为关于拓扑T的开集全体，则$O(T)$关于有限交和任意个集的并一定封闭。把$\cup\{O(T),T\in\Phi\}$张成关于有限交和任意个集的并运算封闭的集合O'(即O'是包含$\cup\{O(T),T\in\Phi\}$且关于有限交和任意个集的并封闭的集族中最小的一个)，则由O'中的集作开集所定义的拓扑即是$\bigvee\Phi$，且是唯一确定的。容易验证$\bigvee\Phi$有如下的性质：对于任一拓扑空间S，映照$f: S\to(E,\bigvee\Phi)$成为连续的充要条件是：对于每一个$T\in\Phi$，映照$f: S\to(E,T)$是连续的。下述例子给出了由向量拓扑集合构造新的向量拓扑的一种方法。

例 3 设Φ是线性空间E上的向量拓扑集合，则$\bigvee\Phi$也是向量拓扑。由上面的叙述知道定向点列$\{x_\alpha\}$按拓扑$\bigvee\Phi$收敛于x_0的充要条件是对每一个$T\in\Phi$，有$x_\alpha\xrightarrow{T}x_0$。下面证明对于拓扑$\bigvee\Phi$，加法是连续的。设$\{x_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$、$\{y_\beta,\beta\in\mathscr{B}\}$是两个定向点

列，且按 $\bigvee\Phi$，$x_\alpha\to a$，$y_\beta\to b$，作半序集 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\in\mathscr{A},\beta\in\mathscr{B}\}$，并且规定当 $\alpha\leqslant\alpha'$，$\beta\leqslant\beta'$ 时 $(\alpha,\beta)\leqslant(\alpha',\beta')$。作半序点列

$$\{x_\alpha+y_\beta\mid(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\}.$$

今证明它按照 $\bigvee\Phi$ 收敛于 $a+b$。事实上，由 $x_\alpha\xrightarrow{\bigvee\Phi}a$ 和 $y_\beta\xrightarrow{\bigvee\Phi}b$ 可知，对每一个 $T\in\Phi$ 也有 $x_\alpha\xrightarrow{T}a$，$y_\beta\xrightarrow{T}b$，因为 T 是向量拓扑，所以 $x_\alpha+y_\beta\xrightarrow{T}a+b$，从而 $x_\alpha+y_\beta\xrightarrow{\bigvee\Phi}a+b$。即 $(E,\bigvee\Phi)$ 中加法是连续的。同样可以证明关于数乘的连续性。因此 $\bigvee\Phi$ 是向量拓扑。

例 4 设 X 是线性空间。如果 F 是一族线性映照 $f: X\to Y_f$，其中 Y_f 是线性拓扑空间，那末在 X 上，唯一地存在使得 F 中的一切 f 都连续的最弱的向量拓扑，记为 σF。按 σF，$x_\alpha\to a$ 的充要条件是对每个 $f\in F$，$f(x_\alpha)$ 在 Y_f 中收敛于 $f(a)$。利用 f 的线性，与例 3 同样可证 σF 是 X 上的向量拓扑。

由例 4 可以知道线性拓扑空间的乘积空间是线性拓扑空间。事实上，设 $X_\alpha(\alpha\in A)$ 是一族线性拓扑空间，X 是所有形如 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ $(x_\alpha\in X_\alpha,\ \alpha\in A)$ 元的全体，称为 X_α，$\alpha\in A$ 的乘积集合，记为 $X=\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$，实际上，即是把 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 看作是一个元，其 α-坐标是 X_α 中的元。由 X 到 X_α 的映照

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A}\mapsto x_{\alpha_0}\ (\alpha_0\in A)$$

称为 X 在 X_{α_0} 上的投影，记为 p_{α_0}，令 $P=\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$，则 X 上的乘积拓扑即是 σP。它是例 4 的特例。

§2 一些基本性质

由定义可知线性拓扑空间关于加法是一个拓扑群，在其上用自然的方式可引进一致性结构。在下面叙述的一些基本拓扑性质中，有一些是属于拓扑群和一致性空间的一般性质。

设 X 是线性拓扑空间，下面介绍它的一些基本性质。

(I) 对固定的元 $a\in X$，平移映照 τ_a：$x\mapsto x+a$ 是 X 到 X 上的拓扑同胚映照。拓扑同胚映照有时也简称为拓扑映照。

类似地可得

(II) 设 $\lambda\neq 0$，则映照 $x\mapsto\lambda x$ 是 X 到 X 上的拓扑映照。

由(II)可知，如果 $\lambda\neq 0$，则 $U\in\mathcal{N}$ 的充要条件是 $\lambda U\in\mathcal{N}$。

下述推论是有用的：集 $A\subset X$ 是开(闭)集的充要条件是：对任一 $\lambda\neq 0$，λA 是开(闭)集，或对于任一固定的元 a，$A+a$ 是开(闭)集。

(III) 对 X 中每一个 0 的环境 $V\in\mathcal{N}$，必存在 $U\in\mathcal{N}$，使得 $U+U\subset V$。

证 由于线性拓扑空间中的映照 $(x, y)\mapsto x+y$ 是 $X\times X$ 到 X 的连续映照，特别考虑到 $(0, 0)$ 点的连续性，因为 $0+0\mapsto 0$，所以对每个 $V\in\mathcal{N}$，存在 U_1、$U_2\in\mathcal{N}$，使当 $x\in U_1$、$y\in U_2$ 时，有 $x+y\in V$，令 $U=U_1\cap U_2\in\mathcal{N}$，则

$$U+U\subset U_1+U_2\subset V.$$

(IV) 设 $x\in X$，V 是 x 的任一环境，则必有 x 的环境 U，使得 U 的闭包 $U^-\subset V$。

证 由(I)，我们只要考虑 $x=0$ 的情况。设 V 是任一 0 的环境，由(III)，存在 0 的环境 U，使得 $U+U\subset V$。下面证明 U 即为所求。事实上，若 $y\in U^-$，由闭包的定义，y 的环境 $y-U$ 和 U 相交，故 $y\in U+U\subset V$，$U^-\subset V$。

定理 1 对于线性拓扑空间 X，下述条件是等价的：

(a) X 是正则空间(即 T_3 型的)；

(b) $\{0\}$ 是闭集；

(c) 对 X 中的每一个向量 $x\neq 0$，存在 0 的环境 U，使 $x\bar{\in}U$。

由此，满足 T_0 公理的线性拓扑空间必是正则的。

证 $(a)\Longrightarrow(b)$ 是明显的。

设 $\{0\}$ 是闭集，由(I)的推论，对每一个 $x\in X$，$x\neq 0$，单点集 $\{x\}$ 也是闭集。所以存在 0 的环境 $U=X\ \{x\}$，使 $x\bar{\in}U$，即 $(b)\Longrightarrow(c)$。