约束力学系统的运动稳定性

梅凤翔　史荣昌　张永发　朱海平　著

STABILITY OF MOTION OF CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEMS

北京理工大学出版社

约束力学系统的运动稳定性

梅凤翔　史荣昌
张永发　朱海平　著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书系统全面地论述约束力学系统的稳定性理论，包括基本概念与基本定理，完整约束力学系统的平衡稳定性，完整约束力学系统的运动稳定性，非完整约束力学系统的平衡稳定性，非完整约束力学系统的运动稳定性，Birkhoff 系统的运动稳定性等六章。本书结构严谨，叙述简洁。每章均有典型例题，并附有习题和主要参考文献。

本书可作为力学、数学、自控、航空、航天、系统工程等专业高年级大学生和研究生的教材以及相关专业教师和研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

约束力学系统的运动稳定性/梅凤翔等著. —北京：北京理工大学出版社，1997.1

ISBN 7-81045-137-5

Ⅰ.约… Ⅱ.梅… Ⅲ.约束-力学-运动稳定性理论 Ⅳ.O317

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 23995 号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路 7 号)

邮政编码 100081 电话(010)68422683

北京地质印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 9.5 印张 239 千字

1997 年 1 月第 1 版 1997 年 1 月第 1 次印刷

印数：1－1200 册 定价：16.00 元

前　　言

由 Poincaré 和 Ляпунов 创立的运动稳定性理论已有百年历史。一百年来，运动稳定性理论在数学、力学、航空、航海、航天、新技术和高技术中得到广泛应用，发挥了越来越大的作用。

80 年代以来，我国已出版有关稳定性的专著多种，它们都有各自特色。

本书的第一个特点是专门研究约束力学系统的运动稳定性，包括通常理解的两大类约束系统——完整约束力学系统和非完整约束力学系统的稳定性，以及更广泛意义的一类约束系统——Birkhoff 系统的稳定性。本书的第二个特点是强调从力学系统的运动微分方程出发，根据无扰运动来建立力学系统的受扰运动方程。本书的第三个特点是研究较多的实际力学系统的稳定性问题。

本书内容有六章，第一章基本概念与基本定理；第二章完整约束力学系统的平衡稳定性；第三章完整约束力学系统的运动稳定性；第四章非完整约束力学系统的平衡稳定性；第五章非完整约束力学系统的运动稳定性；第六章 Birkhoff 系统的运动稳定性。第一章由史荣昌，朱海平执笔；第二、三章由梅凤翔，张永发执笔；第四、五章由梅凤翔，朱海平执笔；第六章由梅凤翔，史荣昌执笔。本书第四、五、六章为课题组国家自然科学基金项目（1993. 1－1995. 12）内容，而第四、五章的一些内容来自朱海平的博士论文。

作者感谢北京理工大学学术专著出版基金的支持，感谢国家自然科学基金会的支持。

北京理工大学应用力学系刘桂林教授在百忙中审阅了书稿并提出宝贵意见，谨致谢意。

限于作者水平，书中难免有疏漏，敬请读者批评指正。

作　者

1996 年 3 月

目　　录

第一章　基本概念与基本定理

§1.1　稳定性的基本定义 …………………………… (1)

1.1.1　受扰运动微分方程 …………………………… (1)

1.1.2　稳定性的定义 …………………………… (4)

1.1.3　Ляпунов 函数和 K 类函数 …………………………… (5)

§1.2　Ляпунов 直接法的基本定理及其推广 …………… (8)

1.2.1　Ляпунов 直接法的基本定理 …………………… (8)

1.2.2　渐近稳定与不稳定定理的推广 ………………… (12)

§1.3　Ляпунов 一次近似理论 …………………………… (16)

1.3.1　定常线性系统的 Ляпунов 函数 ………………… (16)

1.3.2　Ляпунов 一次近似理论 …………………………… (20)

1.3.3　Routh-Hurwitz 判据 …………………………… (24)

§1.4　关于系统的部分变量稳定性 ……………………… (27)

1.4.1　基本概念 …………………………… (27)

1.4.2　关于部分变量稳定性的基本定理 ……………… (28)

习题 …………………………… (30)

参考文献 …………………………… (32)

第二章　完整约束力学系统的平衡稳定性

§2.1　完整保守系统的平衡稳定性 ……………………… (33)

2.1.1　完整保守系统的运动方程和平衡位置 ………… (33)

2.1.2　Lagrange 定理 …………………………… (35)

2.1.3　平衡不稳定定理 …………………………… (40)

2.1.4　Painlevé 和 Wintner 反例 …………………… (45)

2.1.5　陀螺力的影响 …………………………… (45)

2.1.6 耗散力的影响 …………………………………………… (46)

§2.2 完整非保守系统的平衡稳定性 ……………… (48)

2.2.1 定常完整约束系统的平衡稳定性 ……………… (48)

2.2.2 非定常完整约束系统的平衡稳定性 …………… (51)

2.2.3 相对平衡的稳定性 ………………………………… (54)

习题 ……………………………………………………………… (64)

参考文献 ………………………………………………………… (67)

第三章 完整约束力学系统的运动稳定性

§3.1 Routh 定理 ……………………………………………… (68)

3.1.1 Routh 方程 ……………………………………………… (68)

3.1.2 稳态运动 ………………………………………………… (70)

3.1.3 Routh 定理 ……………………………………………… (71)

3.1.4 Routh 定理的逆定理 …………………………………… (74)

3.1.5 耗散力的影响 …………………………………………… (78)

§3.2 完整保守系统的运动稳定性 ………………………… (79)

3.2.1 Lagrange 方程的受扰运动微分方程 ………………… (80)

3.2.2 受扰运动方程为定常的情形 ………………………… (83)

3.2.3 受扰运动方程为非定常的情形 ……………………… (87)

§3.3 一般完整系统的运动稳定性 ………………………… (89)

3.3.1 一般完整系统的受扰运动微分方程 ………………… (89)

3.3.2 一般完整系统的运动稳定性 ………………………… (93)

习题 ……………………………………………………………… (95)

参考文献 ………………………………………………………… (97)

第四章 非完整约束力学系统的平衡稳定性

§4.1 关于非完整系统的平衡稳定性 ……………………… (98)

4.1.1 线性齐次定常非完整系统的运动方程和平衡方程 ……………………………………………… (98)

4.1.2 线性齐次定常非完整系统平衡状态流形的稳定性 ……………………………………………… (104)

4.1.3 线性齐次定常非完整系统平衡位置的 Ляпунов 稳定性 ……………………………………………… (115)

4.1.4 几点注记……………………………………………………（119）
§4.2 非完整系统平衡状态流形的稳定性 ……………（120）
4.2.1 平衡状态流形的稳定性理论………………………………（120）
4.2.2 相应完整系统在约束流形上的稳定性………………（124）
4.2.3 非完整系统平衡状态流形的稳定性定理……………（127）
4.2.4 广义 Чаплыгин 系统平衡状态流形的稳定性 ………（133）
§4.3 非完整系统平衡位置关于部分变量的
稳定性 ……………………………………………………（137）
4.3.1 力学系统平衡位置关于部分变量的稳定性理论……（137）
4.3.2 非完整系统平衡位置关于部分变量的
稳定性定理……………………………………………………（139）
4.3.3 非完整系统平衡位置关于部分与全部变量的
稳定性的关系………………………………………………（147）
§4.4 非完整系统相对平衡状态流形的稳定性 ………（150）
4.4.1 非完整系统相对运动动力学方程和相对
平衡方程……………………………………………………（151）
4.4.2 非完整系统相对平衡状态流形的稳定性判据………（154）
4.4.3 线性齐次定常非完整约束的情形……………………（158）
习题 ……………………………………………………………（164）
参考文献 ………………………………………………………（168）
第五章 非完整约束力学系统的运动稳定性
§5.1 线性齐次定常非完整系统稳态运动的
稳定性 ……………………………………………………（170）
5.1.1 线性齐次定常非完整系统的循环坐标、循环积分和
稳态运动……………………………………………………（170）
5.1.2 线性齐次定常非完整系统稳态运动的稳定性………（174）
5.1.3 线性齐次定常非完整系统稳态运动的稳定性问题
归结为完整系统的平衡稳定性问题…………………（177）
§5.2 非线性定常非完整系统稳态运动的稳定性 ……（191）
5.2.1 非线性定常非完整系统的稳态运动…………………（191）
5.2.2 非线性定常非完整系统稳态运动的稳定性判据……（194）

5.2.3 一类特殊非完整系统的稳态运动……………………（201）
§5.3 非完整有势系统的运动稳定性……………………（204）
5.3.1 非完整有势系统的受扰运动微分方程………………（204）
5.3.2 Чаплыгин 非完整系统的运动稳定性 ………………（212）
5.3.3 广义 Чаплыгин 非完整系统的运动稳定性 …………（215）
5.3.4 算例……………………………………………………（216）
§5.4 一般非完整系统的运动稳定性……………………（218）
5.4.1 一般非完整系统的受扰运动微分方程………………（218）
5.4.2 一般非完整系统运动稳定性判据……………………（221）
§5.5 弱非完整系统的稳定性 ……………………………（227）
5.5.1 弱非完整系统的运动方程及其显式…………………（227）
5.5.2 弱非完整系统的一次近似方程………………………（230）
5.5.3 弱非完整系统的运动稳定性…………………………（232）
习题 ………………………………………………………（235）
参考文献 …………………………………………………（236）
第六章 Birkhoff 系统的运动稳定性
§6.1 自由 Birkhoff 系统的平衡稳定性 ………………（238）
6.1.1 自由 Birkhoff 系统的运动方程和平衡方程…………（239）
6.1.2 自由 Birkhoff 系统的受扰运动方程和一次
近似方程……………………………………………（242）
6.1.3 自由 Birkhoff 系统平衡稳定性的一次近似方法……（244）
6.1.4 自由 Birkhoff 系统平衡稳定性的直接方法…………（249）
6.1.5 自由 Birkhoff 系统平衡状态流形的稳定性…………（251）
§6.2 自由 Birkhoff 系统的运动稳定性 ………………（253）
6.2.1 自由 Birkhoff 系统的受扰运动方程…………………（254）
6.2.2 自由 Birkhoff 系统的运动稳定性……………………（254）
§6.3 约束 Birkhoff 系统的平衡稳定性 ………………（258）
6.3.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程………………………（259）
6.3.2 约束 Birkhoff 系统的平衡稳定性……………………（265）
6.3.3 约束 Birkhoff 系统平衡状态流形的稳定性…………（277）
§6.4 约束 Birkhoff 系统的运动稳定性 ………………（281）

6.4.1 约束 Birkhoff 系统的受扰运动方程 …………………… (281)
6.4.2 约束 Birkhoff 系统运动稳定性的一次近似方法 …… (283)
6.4.3 约束 Birkhoff 系统运动稳定性的直接方法 ………… (289)
习题 ……………………………………………………………… (290)
参考文献 ………………………………………………………… (292)

第一章 基本概念与基本定理

Ляпунов 稳定性理论是研究系统受到瞬时干扰后，运动状态随时间的变化规律，建立判别方法以判断系统受扰和无扰运动状态是否相差很小。自 19 世纪末，Ляпунов 创立运动稳定性的一般理论以来，稳定性理论和方法已在数学、力学、航空、航海、航天、新技术和高技术中得到广泛应用，发挥了越来越大的作用。

本章介绍运动稳定性的基本概念与基本定理，为以后几章研究约束力学系统的稳定性打下基础，包括稳定性的基本定义，Ляпунов 直接法的基本定理，Ляпунов 一次近似理论，关于部分变量的稳定性等。

§ 1.1 稳定性的基本定义

本节介绍 Ляпунов 稳定性的基本定义，包括受扰运动微分方程，稳定性的定义，Ляпунов 函数等

1.1.1 受扰运动微分方程

考虑一力学系统，其运动用微分方程

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},t),\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{R}^n \qquad (1.1.1)$$

来描述，这里 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 为 n 维矢量，表示系统运动状态的矢量；时间 $t\in \boldsymbol{I}[\tau,+\infty)$，$\tau\in \boldsymbol{R}$；$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开区域；$\boldsymbol{f}\in C(\boldsymbol{D}\times \boldsymbol{I},\boldsymbol{R}^n)$，且满足解的唯一性条件。此时，过每一点 $(t_0,\boldsymbol{y}_0)\in \boldsymbol{I}\times \boldsymbol{D}$，方程(1.1.1)存在解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0)$，它对应于系统的一个具体的运动。

研究系统的某一给定运动

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{y}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0) \tag{1.1.2}$$

称这个运动为无扰运动。假设在初始时刻 t_0，系统受到干扰，初始状态由 $\boldsymbol{y}_0$ 变为 $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$，称干扰后的系统运动 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$ 为受扰运动，它对应着初始状态 $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$。

引进新变量

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{g}(t) \tag{1.1.3}$$

称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为扰动，$\boldsymbol{x}_0=\tilde{\boldsymbol{y}}_0-\boldsymbol{y}_0$。为初始扰动。无扰运动 $\boldsymbol{g}(t)$ 和受扰运动 $\boldsymbol{y}(t)$ 都满足运动微分方程(1.1.1)，由此可得到 $\boldsymbol{x}(t)$ 应满足的微分方程

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\dot{\boldsymbol{g}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t),t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t),t)\\&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{g}(t),t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t),t)\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

简记作

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.1.5}$$

其中

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t),t)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(t),t)$$

可以看出，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ 满足条件

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0},t)=0 \tag{1.1.6}$$

称扰动 $\boldsymbol{x}(t)$ 所满足的微分方程(1.1.5)为无扰运动(1.1.2)的受扰运动微分方程。

例 1.1.1 单摆的运动微分方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{\mu}{ml}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{a}$$

其中 θ 为单摆偏离铅垂位置的角度，m 为单摆质量，g 为重力加速度，l 为摆长，μ 为阻尼系数(图 1.1)。试研究受扰运动微分方程。

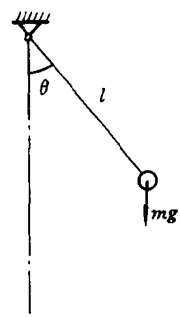

图 1.1

令

$$y_1=\theta,\qquad y_2=\dot{\theta}$$

则方程(a)表为

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{l}\sin y_1 - \frac{\mu}{ml}y_2 \tag{b}$$

设方程(b)在初始条件

$$y_{10} = \theta_0,\ y_{20} = \omega_0$$

下，有特解

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(t) = y_1(t;t_0,\theta_0,\omega_0) \\ y_2 &= g_2(t) = y_2(t;t_0,\theta_0,\omega_0) \end{aligned} \tag{c}$$

取运动(c)作为单摆的无扰运动，令

$$x_1(t) = y_1(t) - g_1(t),\ x_2(t) = y_2(t) - g_2(t) \tag{d}$$

其中 $y_1(t)$，$y_2(t)$为受扰运动，满足微分方程(b)；$x_1(t)$，$x_2(t)$为扰动。将式(d)代入方程(b)，得到受扰运动微分方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}[\sin(x_1 + g_1) - \sin g_1] - \frac{\mu}{ml}x_2$$

显然，它有解

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0$$

力学系统最简单的运动状态是系统的平衡状态。所谓平衡状态是指，随着时间 t 的变化，状态矢量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 保持不变，即

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 = \text{const.} \tag{1.1.7}$$

由于平衡状态也是系统的一个运动，故可类似上面的方法，得到它的受扰运动微分方程。

例 1.1.2 车厢以加速度 a 作匀加速直线运动，在厢内悬挂的单摆的运动微分方程为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0 \tag{a}$$

其中 θ 为单摆偏离车厢上铅垂线的偏角。令

$$y_1 = \theta,\qquad y_2 = \dot{\theta}$$

将其代入方程(a)，得到

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{l}\sin y_1 - \frac{a}{l}\cos y_1 \tag{b}$$

试研究平衡状态的受扰运动微分方程。

令 $\dot{y}_1=\dot{y}_2=0$，由方程(b)得到平衡状态为

$$y_1 = g_1(t) = \mathrm{arctg}(-\frac{a}{g}),\ y_2 = g_2(t) = 0$$

令

$$x_1(t) = y_1(t) - \mathrm{arctg}(-\frac{a}{g}),\ x_2(t) = y_2(t) \tag{c}$$

将式(c)代入方程(b)，得到平衡状态的受扰运动微分方程

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{l}(a^2 + g^2)^{1/2}\sin x_1 \tag{d}$$

由于运动状态 $\boldsymbol{x}$ 的力学意义，系统的平衡状态有绝对与相对之分。

1.1.2　稳定性的定义

由前面分析知，研究系统(1.1.1)无扰运动(1.1.2)的稳定性问题可以转化为研究受扰运动微分方程(1.1.5)的零解稳定性问题。

定义 1.1.1　如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得当初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，对于一切 $t\geqslant t_0$，都有

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$$

则称系统的无扰运动是稳定的。反之，如果存在某个 $\varepsilon>0$ 和某个 t_0，对于任意的 $\delta>0$，总存在满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 和时间 $t_1\geqslant t_0$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_1;t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \geqslant \varepsilon$$

则称系统的无扰运动是不稳定的。

定义 1.1.2　如果系统的无扰运动是稳定的，且存在 $\delta=\delta(t_0)>0$，使得当初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，有

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\| = 0$$

则称系统的无扰运动是渐近稳定的。

图 1.2 对稳定性的定义给出了几何解释，其中 l_1,l_2,l_3 分别为稳定、渐近稳定和不稳定的情形。

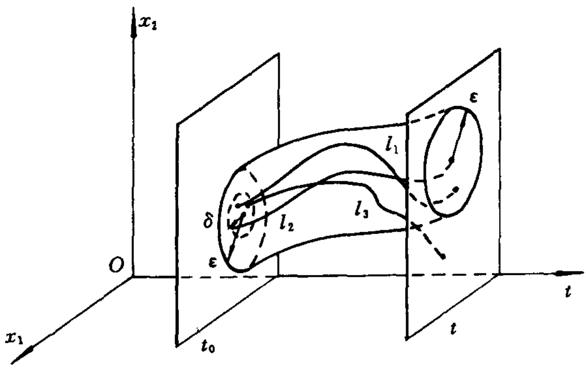

图 1.2

由以上定义可以看出，判断一个无扰运动的稳定性，需给出受扰运动微分方程的解，这是研究稳定性理论的一种方法。但是，由于微分方程的求解通常是十分困难的，甚至是不可能的，从而产生了另一种方法——Ляпунов 函数法或 Ляпунов 直接法。

1.1.3 Ляпунов 函数和 K 类函数

Ляпунов 函数，亦称 V 函数，是 Ляпунов 直接法判断系统稳定性的关键。

假设系统的受扰运动微分方程为式(1.1.5)，定义区域

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_H &= \{(t,\boldsymbol{x})\,|\,t \geqslant t_0,\ \|\boldsymbol{x}\| < H\} \\ \boldsymbol{D}_H &= \{\boldsymbol{x}\,|\,\|\boldsymbol{x}\| < H\} \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

假设函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 为在区域 $\boldsymbol{Q}_H$ 内定义的关于 $t,\boldsymbol{x}$ 的函数，它对 $t,\boldsymbol{x}$ 连续可微，且 $V(t,\boldsymbol{0})=0(t\geqslant t_0)$。

定义 1.1.3 函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 称为常正(常负)的，如果在区域 $\boldsymbol{Q}_H$ 内有 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0(\leqslant 0)$。常正和常负的函数统称为常号函数。

定义 1.1.4 不显含时间 t 的函数 $W(\boldsymbol{x})$ 称为正定(负定)的，如果在区域 $\boldsymbol{D}_H$ 内，对任何 $\boldsymbol{x}\neq 0$，都有 $W(\boldsymbol{x})>0(<0)$。

定义 1.1.5 函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 称为正定(负定)的，如果存在正定(负定)函数 $W(\boldsymbol{x})$，使得在区域 $\boldsymbol{Q}_H$ 内有 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant W(\boldsymbol{x})(V(t,\boldsymbol{x})\leqslant -W(\boldsymbol{x}))$。正定和负定的函数称为定号函数。

定义 1.1.6 函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 称为具有无穷小上界，如果存在正定函数 $W(\boldsymbol{x})$，使得

$$|V(t,\boldsymbol{x})|\leqslant W(\boldsymbol{x})$$

例 1.1.3 函数 $V(t,x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\sin t$ 是常正的；函数 $V(t,x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2\sin t$ 是正定的；函数 $V(t,x_1,x_2)=x_1\sin t+x_2\cos t$ 具有无穷小上界；函数 $V(t,x_1,x_2)=\sin[(x_1+x_2)t]$ 有界，但不具有无穷小上界。

具有无穷小上界的函数一定是有界的，但反之不一定。

如果函数 V 不显含时间 t，即 $V=V(\boldsymbol{x})$，则定义 1.1.5 与定义 1.1.4 是等价的。

所有不显含时间的函数 $V(\boldsymbol{x})$，由于其连续性，都具有无穷小上界。

函数 $\varphi(r)$ 称为属于 K 类函数，如果 $\varphi(r)(r\geqslant 0)$ 是连续的严格单调上升函数，且 $\varphi(0)=0$。

Ляпунов 函数与 K 类函数之间有下列重要关系。

引理 1.1.1 对于在区域 $\boldsymbol{D}_H$ 上给定的任意正定函数 $W(\boldsymbol{x})$，必存在两个 K 类函数 φ_1,φ_2，使得

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant W(\boldsymbol{x})\leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

［证明］ 取

$$\varphi_1(r)=\frac{r}{H}\inf_{r\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})$$

由于 $W(\boldsymbol{x})$ 有下界，故 $\varphi_1(r)$ 是存在的，且 $\varphi_1(0)=0,\varphi_1(r)>0(r>0$ 时)。

先证 φ_1 连续。对于 $r_1\leqslant r_2\leqslant H$，有

$$\begin{aligned}\varphi_1(r_2)-\varphi_1(r_1)&=\frac{r_2}{H}\inf_{r_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})-\frac{r_1}{H}\inf_{r_1\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})\\&=\frac{r_2}{H}\inf_{r_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})-\frac{r_1}{H}W(\boldsymbol{x}_0)\\&\leqslant\frac{r_2}{H}W(\boldsymbol{x}_1)-\frac{r_1}{H}W(\boldsymbol{x}_0)\\&=\frac{r_2}{H}[W(\boldsymbol{x}_1)-W(\boldsymbol{x}_0)]+\frac{1}{H}(r_2-r_1)W(\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}$$

这里，当 $\boldsymbol{x}_0\in\{\boldsymbol{x}\mid r_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H\}$ 时，取 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_0$；当 $\boldsymbol{x}_0\in\{\boldsymbol{x}\mid r_1\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r_2\}$ 时，取 $\boldsymbol{x}_1$ 为射线 Ox_0 与 $\|\boldsymbol{x}\|=r_2$ 的交点。由于 $W(\boldsymbol{x})$ 连续，故对于任意的正数 ε，存在 $\delta>0$，当 $0\leqslant r_2-r_1<\delta$ 时，有

$$\varphi_1(r_2)-\varphi_1(r_1)\leqslant\frac{r_2}{H}W(\boldsymbol{x}_1)-\frac{r_1}{H}W(\boldsymbol{x}_0)<\varepsilon$$

故函数 $\varphi_1(r)$ 是连续的。

再证 φ_1 是严格单调上升的。实际上，当 $0\leqslant r_1<r_2\leqslant H$ 时，有

$$\begin{aligned}\varphi_1(r_1)=\frac{r_1}{H}\inf_{r_1\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})\leqslant\frac{r_1}{H}\inf_{r_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})<\frac{r_2}{H}\inf_{r_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H}W(\boldsymbol{x})\\=\varphi_1(r_2)\end{aligned}$$

从而，$\varphi_1(r)$ 为严格单调上升的连续函数，即 φ_1 属于 K 类函数。

取

$$\varphi_2(r)=\max_{\|\boldsymbol{x}\|<r}W(\boldsymbol{x})+Rr,\ R>0$$

显然，$\varphi_2(r)$ 是存在的，且 $\varphi_2(0)=0$，$\varphi_2(r)>0$（$r>0$ 时）。用类似上面的方法，可证明 φ_2 属于 K 类函数。

由 φ_1，φ_2 的定义，得知

$$\begin{aligned}\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant\inf_{\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\|\xi\|\leqslant H}W(\xi)\leqslant W(\boldsymbol{x})\leqslant\max_{0\leqslant\|\xi\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|}W(\xi)\\<\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)\end{aligned}$$

即

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant W(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

证毕。

§1.2 Ляпунов直接法的基本定理及其推广

本节介绍Ляпунов直接法的基本定理(定理1.2.1～定理1.2.3)以及渐近稳定与不稳定定理的推广(定理1.2.4和定理1.2.5)。

1.2.1 Ляпунов直接法的基本定理

定理1.2.1(Ляпунов А М,1892[1]) 如果在区域Ω_H上存在正定(负定)函数$V(t,\boldsymbol{x})$,它沿受扰运动微分方程(1.1.5)的导数$\dot{V}$常负(常正),那么系统(1.1.1)的无扰运动(1.1.2)是稳定的。

[证明] 因$V(t,\boldsymbol{x})$为正定函数,故存在正定函数$W(\boldsymbol{x})$,使得

$$V(t,\boldsymbol{x}) \geqslant W(\boldsymbol{x})$$

由引理1.1.1知,存在K类函数φ,使得

$$W(\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(\|\boldsymbol{x}\|)$$

于是有

$$V(t,\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(\|\boldsymbol{x}\|)$$

因$V(t_0,\boldsymbol{x})$对$\boldsymbol{x}$连续,且$V(t_0,\boldsymbol{0})=0$,故对于任意小的$\varepsilon>0(\varepsilon<H)$,存在$\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$,当$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$时,有

$$V(t_0,\boldsymbol{x}_0) < \varphi(\varepsilon)$$

又因$\dot{V}$常负,故

$$\begin{aligned} V(t,\boldsymbol{x}(t)) &= \int_{t_0}^{t} \dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t + V(t_0,\boldsymbol{x}_0) \\ &\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0) < \varphi(\varepsilon) \qquad (t \geqslant t_0) \end{aligned}$$

于是有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t)) < \varphi(\varepsilon) \qquad (t \geqslant t_0)$$

因φ属于K类函数,故有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \qquad (t \geqslant t_0)$$

即无扰运动是稳定的。证毕。