高等学校专科教材

高等数学

（修订版）

滕桂兰 杨万禄 编

上册

天津大学出版社

高等学校专科教材

高等数学

（修订版）

（上册）

滕桂兰
杨[illegible]

天津大学出版社

内容提要

本书参照全日制大学专科高等数学教学大纲和全国普通高等理工院校成人教育研究会数学学科委员会、制定的专科“高等数学”课程的基本要求编写的.

该书分上、下两册共十三章.上册内容为函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用.

本书每节后配有一定数量的习题,书末附有习题答案.每章后有总结,指出本章的基本要求、重点与难点、学习中应注意的几个问题.每章后配有综合性测验作业题,用来检查学生对本章基本内容掌握的程度.

本书可作为大学专科及高等函授大学、夜大学、电视大学、职工业大、高等教育自学考试等专科生的教材,亦可供工程技术人员自学用书.

高等学校专科教材
高等数学
(修订版)
上册
滕桂兰
杨万禄 编

天津大学出版社出版
(天津大学内)
邮编:300072
河北省永清县第一印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本:850×1168 毫米 1/32 印张:11 字数:286 千
1996 年 10 月第二版　　1996 年 10 月第一次印刷
印数:1—6000
ISBN 7-5618-0904-2
O·82　定价:14.50 元

前　言

高等数学(上、下册)是根据全日制大学专科教学大纲和“全国普遍高等理工院校成人教育研究会数学研究组”制定的专科高等数学课程的基本要求编写的.

本书可作为大学专科、高等专科学校及高等函授大学、夜大学、电视大学、职工业大等专科生学习高等数学的教材.

在编写本书时,我们力求做到:概念清楚,重点突出;条理清晰,文字准确,通俗易懂,便于自学;注重基本运算能力的培养.为此在教材中配有适量的例题,通过这些例题的讲解和分析,帮助学员加深对基本内容的理解,提高他们解决问题的能力;贯彻少而精的原则,力求基本内容写清楚,写透彻,写详细,对一些枝节问题避免冗长的述叙,以专业和后继课程够用为度.

本书各节都配有适量的习题,并在书末附有答案,在各章内容之后安排本章综合性的测验作业题,用来检查和考核学生对本章基本内容掌握的程度.

书中标有 * 号的章节,可供有关专业选用.标有 * 号的例题和习题不做一般要求,可供学员选读.

考虑到成人学习高等数学,往往感到比较抽象难懂,不易抓住要领,缺少解题思路,为此,配合高等数学(上、下册)的学习,我们已出版了《高等数学自学辅导》,它可作为学习本书的一个辅助性的参考书,希望能起到一个无声辅导教师的作用.

全书分上、下两册,共十三章.第一、二、三、八、九、十、十一章由杨万禄编写.第四、五、六、七、十二、十三章由滕桂兰编写.

本书在编写过程中得到天津大学成人教育学院和天津大学出版社的热情支持,在此表示深切的感谢.

由于我们教学经验和水平所限，错误和不妥之处恳切希望读者批评指正.

编者

1991 年 10 月于天津大学.

再版前言

本书自 1992 年出版以来，经历了四年的教学实践，此次再版是根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学学科委员会 1993 年第五届年会制定的成人专科高等数学教学基本要求，结合我们四年来教学实践的经验，并吸取了使用本书教师提出的宝贵意见，对第一版进行了修改.

这次修改在内容的深广度及体系上没有大的变化. 但在个别章节的内容顺序的安排上，做了些调整；在文字叙述上作了一些修改，改正了叙述不确切或不妥之处；适当增加了少量的例题和习题；每章的最后增加了"本章总结"，内容包括：本章的基本要求、重点与难点、学习中应注意的几个问题等. 使学生，特别是函授生，能更顺利地进行自学，自学后明确本章的基本要求、重点与难点，做到"心中有数". 根据各章的基本要求和学生在学习中容易出现的问题，在"学习中应注意的几个问题"作了进一步的阐述和解释，使学生加深对这些内容的理解，并有针对性地解答学生自学中的一些疑难问题，减少自学中的困难.

再版后的教材不再配有"高等数学自学辅导". 我们希望再版后的这套教材对"教"和"学"都会感到更加方便.

由于我们水平有限，虽然这次修改我们尽了很大的努力，但错误和不妥之处仍会出现，欢迎各位专家和读者予以指正.

编者

1996 年 1 月于天津大学

目　　录

第一章 函 数

函数是高等数学研究的主要对象，也是高等数学中最重要的基本概念之一，是学习微积分的基础. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，并介绍反函数、复合函数以及初等函数的主要性质.

§1 函 数

一、常量与变量

1. 常量与变量

在观察各种自然现象或实验过程中，会遇到很多的量. 这些量一般可分为两种：一种量在某过程中不起变化，保持一定的数值，这种量称为常量；还有一种在某过程中变化的量，即可取不同的数值的量，这种量称为变量.

例如，自由落体的下降速度和下落的距离是不断变化的，它们都是变量；而自由落体的质量在这一过程中则保持不变，因而是常量.

一个量是常量还是变量，要在具体问题中作具体分析. 例如，火车行驶时的速度. 在开始阶段或刹车阶段是变化的，因而在该过程中是变量；在匀速行驶时速度不变，因而是常量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量；用字母 x、y、z 等表示变量. 在数学上把常量与变量又分别叫做常数与变数. 在几何上，如果一个数 a 是常数，则用数轴上的一个定点表示；如果数 x 是变数，则用数轴上的一个动点表示.

2. 变量变化范围的表示方法

任何一变量，总有一定的变化范围. 例如，一天的时间 t 所取的值，总是介于 0 到 24（小时）之间，即变量 t 的变化范围是 0～24. 如果变量的变化是连续的，变量的变化范围常常是用区间来表示. 下面我们列表给出区间的名称、定义和符号.

名　　称	定　　义	符　　号
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$
开区间	$a<x<b$	(a,b)
左半开区间	$a<x\leqslant b$	$(a,b]$
右半开区间	$a\leqslant x<b$	$[a,b)$
无限区间	$a<x$	$(a,+\infty)$
无限区间	$a\leqslant x$	$[a,+\infty)$
无限区间	$x<b$	$(-\infty,b)$
无限区间	$x\leqslant b$	$(-\infty,b]$
无限区间	$-\infty<x<+\infty$	$(-\infty,+\infty)$

注意　$+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，它们不是数，仅仅是个记号. 在数轴上，表示区间的端点时，实圆点“•”表示区间包括端点；空心圆点“。”表示区间不包括端点.

例 1　满足不等式 $-\pi\leqslant x<\pi$ 的全体实数 x，是右半开区间，记作 $[-\pi,\pi)$. 在数轴上可用图 1-1 表示出来.

例 2　满足不等式 $-\infty<x\leqslant 2$ 的全体实数 x，是无限区间，记作 $(-\infty,2]$. 在数轴上可用图 1-2 表示.

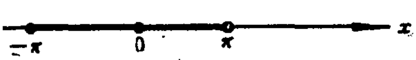

图 1-1

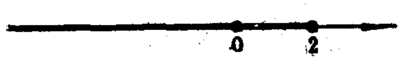

图 1-2

二、绝对值与邻域

1. 绝对值

(1)**定义**　任意实数 a 的绝对值用符号“$|a|$”表示，定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

由定义可知，任何一个实数 a 的绝对值是非负的. 显然有

$$|a|=\sqrt{a^2},\ |-a|=|a|.$$

a 的绝对值 $|a|$，在几何上表示数轴上的点 a 到原点的距离.

由绝对值的定义，还可以得到下列一些论断：

1° $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$. (1)

事实上，如果 $a\geqslant 0$，有 $-|a|\leqslant a=|a|$；如果 $a<0$，有 $-|a|=a<|a|$. 因此，对任何实数 a，(1)式总是成立的.

2° $|x|<r(r>0)$，与 $-r<x<r$ 是等价的. 即，若 $|x|<r$，则有 $-r<x<r$；反之，若 $-r<x<r$，则有 $|x|<r$.

事实上，从几何上看这是非常显然的，因为 $|x|<r$，表示点 x 与原点的距离小于 r，所以点 x 必落在区间 $(-r,r)$ 内，即 $-r<x<r$；反之，若 $-r<x<r$ 成立，则点 x 落在区间 $(-r,r)$ 内，所以点 x 与原点的距离小于 r，因而有 $|x|<r$.

同理还可以得到，绝对值不等式 $|x-a|<r$. 与 $a-r<x<a+r$ 是等价的.

3° $|x|>N(N>0)$，与 $x>N$ 和 $x<-N$ 是等价的，请读者自证.

(2)绝对值的性质

1° $|a+b|\leqslant |a|+|b|$.

2° $|a-b|\geqslant |a|-|b|$.

3° $|ab|=|a||b|$.

4° $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},(b\neq 0)$.

证 1°由公式(1)得

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|,$$

把两式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$$

它与不等式

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|,$$

等价，性质 1°得证.

证 2° 因为 $|a|=|(a-b)+b|$，利用性质 1°得，

$$|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|,$$

于是 $|a|\leqslant |a-b|+|b|,$

即 $|a-b|\geqslant |a|-|b|.$

性质 2°得证.

关于绝对值乘法和除法的性质 3°，4°利用绝对值的定义，即可得证.

2. 邻域

定义 设 a 与 δ 是两个实数，而 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta \tag{2}$$

的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域. 点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 不等式又可写成

$$-\delta<x-a<\delta \text{ 或 } a-\delta<x<a+\delta.$$

因此，a 点的 δ 邻域就是以点 a 为中心，而长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，如图 1-3.

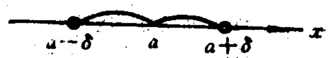

图 1-3

例 3 点 2 的 $\delta=\frac{5}{2}$ 的邻域，可表示为

$$|x-2|<\frac{5}{2},$$

即 $$2-\frac{5}{2}<x<2+\frac{5}{2},$$

即 $$-\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2},$$

该邻域是开区间$\left(-\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$.

三、函数概念

在某一自然现象或实验过程中，往往同时遇到两个或多个变量，这些变量不是孤立地变化，而是互相联系、互相依赖，遵循着一定的规律变化. 下面仅就两个变量的情形举例说明.

例 4 圆的面积 S 与它的半径 r 间的关系，由公式 $S=\pi r^2$ 确定. 当半径 r 取某一正的数值时，圆面积 S 相应地有一个确定的数值.

例 5 在初速度为零的自由落体运动中，路程 S 和时间 t 是两个变量，当时间 t 变化时，所经历的路程也相应地变化，它们之间有下列关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2, 0\leqslant t\leqslant T, g \text{ 是重力加速度(常量)}.$$

例 6 两个质点作相对运动，彼此间的距离 r 与相互作用的引力 f 是两个变量. 根据万有引力定律，它们之间的关系式是：

$$f=G\frac{m_1m_2}{r^2}(G \text{ 是引力常数}, m_1, m_2 \text{ 是两质点的质量}).$$

上述三例都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应规律. 根据这种对应规律，当其中一个变量在某一个范围内取一个数值时，另一个变量就有一个确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数关系.

定义 设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在实数的某一范围 I 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律，总有一个确定数值和它对应，则变量 y 称为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x), x\in I.$$

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 I，称为函数的定义域.

在函数的定义中要着重理解以下几点：

1. 函数的两个要素

函数的定义表明函数是由定义域和对应规律所确定的. 对两个变量只要给出定义域和对应规律就构成了一个函数关系. 因此,又把函数的定义域和对应规律称为函数的两个要素.

2. 函数的定义域

如果自变量取某一数值 x_0 时,函数有一个确定的值和它对应,那末就称函数在 x_0 处有定义. 因此函数的定义域就是使函数有定义的实数的全体. 如何确定函数的定义域呢?通常是按下面两种情况考虑:

(1)对于实际问题,是根据问题的实际意义具体确定. 如例 4 函数的定义域为 $(0,+\infty)$,因为半径不能取负值. 例 5 函数的定义域为 $[0,T]$,其中 T 为自由落体落地的时间.

(2)函数由公式给出时,不考虑函数的实际意义,这时函数的定义域就是使式子有意义的自变量的一切实数值.

例 7 求函数 $y=\frac{1}{x+1}$ 的定义域.

解 显然只有在分母 $x+1\neq 0$,即 $x\neq -1$ 时,表达式才有意义. 因此,函数的定义域为 $x\neq -1$ 的全体实数,即 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$.

例 8 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域.

解 因为根式 $\sqrt{1-x^2}$ 中的 $1-x^2$ 不能为负,又因为这个根式是分母,不能为零. 因此,必须有 $1-x^2>0$,即 $x^2<1$ 有 $|x|<1$,故函数的定义域为

$$-1<x<1, \qquad \text{或写成}(-1,1).$$

例 9 求 $y=\ln(x-1)$ 的定义域.

解 因为对数的真数必须大于零,故 $x-1>0$,或 $x>1$. 即函数的定义域为 $x>1$,或写成 $(1,+\infty)$.

例 10 求函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)} \quad (b>a>0)$ 的定义域.

解 因为根式内的$(x-a)(b-x)$不能为负，即x满足不等式.

$$(x-a)(b-x)\geqslant 0$$

它可分为两种情况. x适合不等式组：

$$\begin{cases} x-a\geqslant 0 \\ b-x\geqslant 0 \end{cases}; \tag{3}$$

或者适合不等式组：

$$\begin{cases} x-a\leqslant 0 \\ b-x\leqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

由(3)式可以解出：$a\leqslant x\leqslant b$，而(4)式无解. 因此函数的定义域为$a\leqslant x\leqslant b$，或写成$[a,b]$.

例 11 求函数$y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域.

解 此题是求两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域. $\sqrt{x^2-x-6}$的定义域必须满足$x^2-x-6\geqslant 0$，即

$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$

解得 $x\geqslant 3$，或$x\leqslant -2$.

而$\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域是$\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即

$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$.

这两个函数定义域的公共部分是：$-3\leqslant x\leqslant -2$与$3\leqslant x\leqslant 4$，于是，所求函数的定义域是：

$$-3\leqslant x\leqslant -2 \text{ 与 } 3\leqslant x\leqslant 4.$$

3. 函数记号

函数记号$y=f(x)$表示y是x的函数. 如果函数关系由某个式子具体给出时，记号“$f(\quad)$”表示x与y之间的确定的对应规律. 如例5中S是t的函数写成$S=f(t)$，则$f(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$.

再如，$y=f(x)=x^2-2x+3$，

对于这个具体函数，记号 $f(\quad)=(\quad)^2-2(\quad)+3$，表示把 x 代入括号内进行运算而得到 y.

y 是 x 的函数，可以记作 $y=f(x)$，也可以记作 $y=G(x)$ 或 $y=F(x)$ 等. 但同一函数在讨论中应取定一种记法. 同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律. 为方便起见，有时也用记号 $y=y(x)$，$u=u(x)$，$s=s(x)$ 等表示函数.

4. 函数值

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域内取得值 x_0，函数 $f(x)$ 的对应值 y_0，叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作

$$y_0=f(x_0)，或\ y|_{x=x_0}=y_0.$$

注意 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 的区别，前者是一个固定值，后者一般地是变量. 在函数的定义中规定对于自变量 x 的确定值，函数 y 只有一个值与其对应(单值函数). 但有时会遇到变量 y 有一个以上的值与之对应的情形，此时我们称 y 是 x 的多值函数. 对于变量 y 多值的情形，主要是限制 y 的取值范围使之成为单值后，再进行研究，例如反三角函数 $y=\mathrm{Arcsin}x$，它是多值的，当 y 限制在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，就是单值的(这时反正弦函数记为 $y=\arcsin x$). 当我们研究了 $y=\arcsin x$ 之后，对 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 也就不难了解了.

例 12 求函数 $f(x)=x^2-2x+3$，在 $x=3$，$x=x_0+\Delta x$ 处的函数值.

解 $x=3$ 时，$f(3)=(3)^2-2(3)+3=6$.

$x=x_0+\Delta x$ 时，

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x)&=(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)+3\\&=x_0^2+2x_0(\Delta x-1)+\Delta x(\Delta x-2)+3.\end{aligned}$$

例 13 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，求 $f(\frac{2}{\pi})$.