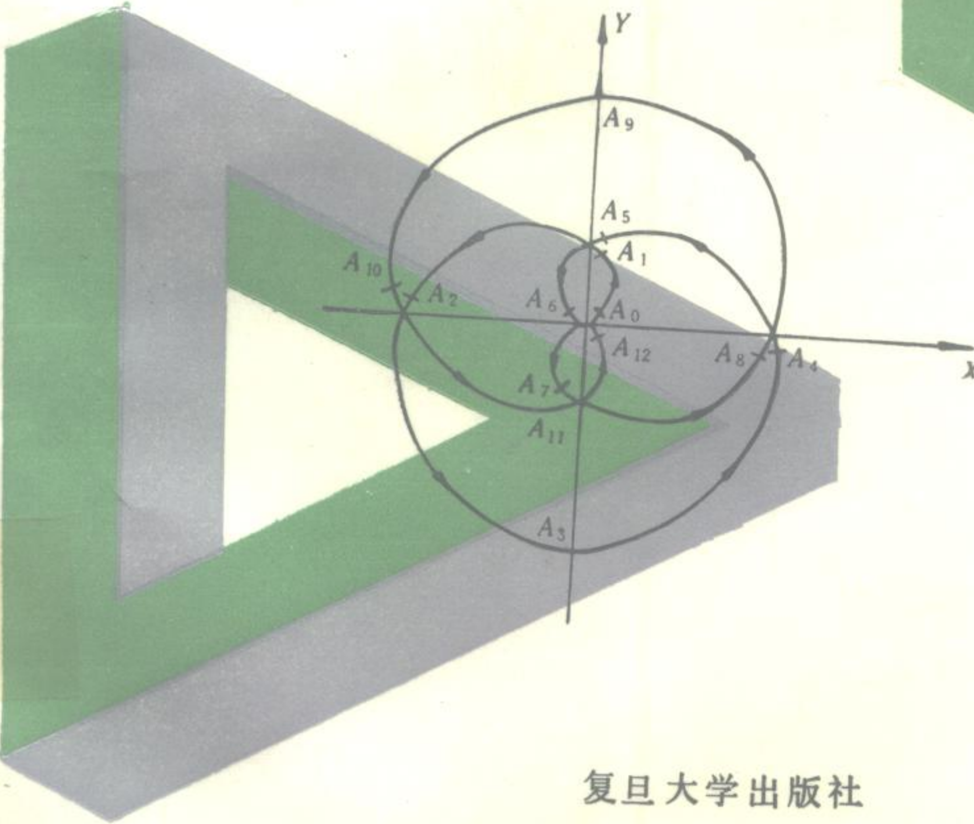
SHUXUE FENXI

数学分析

上册

欧阳光中 姚允龙/编著



复旦大学出版社

数 学 分 析

（上 册）

欧阳光中
姚允龙 编著

复旦大学出版社

数学分析

（下册）

欧阳光中
姚允龙　编著

复旦大学出版社

（沪）新登字 202 号

数 学 分 析

（上、下册）

欧阳光中　姚允龙　编著

复旦大学出版社出版
（上海国权路 579 号）
新华书店上海发行所发行　复旦大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 26.25　字数 772,000
1993 年 3 月第 1 版　　1993 年 3 月第 1 次印刷
印数 1— 5000
ISBN7-309-00826-X/O·104
定价：21.50 元

内 容 提 要

本书是在复旦大学数学系60年代和80年代初出版的教材的基础上，总结该校多年来的教学实践经验，并参阅了国内外新近出版的教材，为90年代数学分析的教学编写而成的。全书在不少地方作了有益的改革，并增加了现代数学分析的某些内容和方法。为了帮助学生深入理解有关的概念和方法，行文中不时地穿插了许多启发读者思考的练习，每章后还附有精选的习题。主要内容有：极限论、一元微积分、级数论、多元微积分、Lebesgue积分等。

前　言

复旦大学的数学分析教材，从60年代初期由上海科学技术出版社出版的《数学分析》（陈传璋等编著）算起，已有30年了。在这期间，随着高等教育的改革和发展，复旦大学的数学分析教材也几经修改和重编，先后由高等教育出版社、上海科学技术出版社、复旦大学出版社出版过几种不同的版本，其中3本作为数学类各专业教材，分别出版于60年代初和80年代初。虽然数学分析的基本内容相对来说已比较稳定，但从复旦教材的演变和更新来看，现代数学的观点和方法不可避免地会渗透进来，使之面貌或多或少地有所更新。另一方面，从教学角度来讲，概念的引进、定理的论证、公式的推演、原理的运用等等也必须在教学实践的基础上不断改进和提高。复旦大学数学系在80年代中期就开始酝酿编写下一轮针对90年代使用的教材。本书就是在这一环境中产生的。

从总体的要求和体系上看，数学分析的基本内容已相当成熟。但本书在许多地方作了改革，在观点、方法和处理上，使得不少基本内容更新颖、更简捷、更紧凑，更便于教学。

本书注意运用集合的语言和方法，使之在定理的论述和证明中发挥更大的作用。例如将闭区间上连续函数的三条性质合并为一条，即闭区间的连续像仍为闭区间。在下册中进一步将连续的概念与开集的逆像联系起来，并将闭区间的连续像定理提高为紧集的连续像定理。本书还引进了可列集和零测度集以及几乎处处连续等概念。多年来在我们的实际教学中。这些内容往往会引起学生较大的兴趣。

传统证明重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 时，用到尚未严格证明过的圆周长和圆面积公式，至少有循环论证之嫌，本书放弃传统的做法，在给出 π 的严格定义的基础上，重新证明了这一极限，而不涉及圆周

长和圆面积。

在积分论中，不论是定积分还是重积分，我们不加证明地引进(R)积分中最深刻的结果：有界函数(R)可积的充要条件是几乎处处连续。这是一个极其深刻而又极其有用的结果，在教学上也很容易讲明白，而它的证明却远非基本的，因此我们大胆地引进这个定理而删去其证明。利用这一定理避免了许多乏味的可积性的讨论，例如两个可积函数的乘积也一定可积就成为一个非常简单明了的事。本书对定积分和广义积分的运算进行了统一处理，克服了许多教材中对广义积分的运算不够重视的现象。

外积和外微分已成为现代数学中的重要工具，如果要严格地建立这些概念并加以运用，例如引进和证明高维空间内统一的 Stokes 公式，那将大大超出通常数学分析范围，而且也不是一般学校低年级学生能接受的。但如果一点也不涉及这方面的内容又似乎如同丢掉一件有力的武器一样而感到惋惜。因此，我们采取直观的方法，并根据推演的需要逐步引进外积和外微分，把它和积分论的几个重要的内容结合起来，这些内容有重积分的变量代换、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式以及这几个公式的内在的统一和形式上的统一，使得这些内容更直观更自然也更具有启发性。由于外积和外微分的引进是直观的，不可避免地使得上述内容带有直观性，虽然便于教学，但作为数学分析这还不够，我们仍旧按传统方式对二重积分的变量代换以及 Green 公式、Gauss 公式进行了证明。

曲线积分和曲面积分实质上都是某些特殊的流形上的积分。如果引进微分流形和流形上的积分，观点虽高但内容也很深，颇难在低年级开讲。本书采用流形上积分的观点，但不出现流形的概念，结合传统的做法从物理实例出发，将第一类曲线积分直接定义为某个定积分，将第一类曲面积分直接定义为某个二重积分，而第二类的积分很容易由第一类来定义，避免了传统教材中冗长的叙述和论证，显得简捷明了。

考虑到一个高中毕业生初学数学分析，对许多重要概念的逻辑表达和对概念的理解以及正确运用，确有一段适应过程，本书在一开始

就建立了某些重要概念的否定命题的逻辑表达，并充分展开其运用，一方面可使学生加深对这些重要概念的理解，另一方面又给出运用概念进行分析问题的一种手段，扩大学生的思考面。此外，在若干小节之后紧接着给出一些富于启发性和针对性的练习，帮助学生及时消化加深理解有关的概念和方法。每一章的结尾仍按传统方式给出了一系列精选的习题。

最后一章是 Lebesgue 积分。复旦大学数学系从 80 年代后期开始在数学分析中讲授 Lebesgue 积分。具体有两种做法，一种是将(*L*)积分放在最后，即在前三学期讲数学分析，第四学期讲 (*L*) 积分；另一种做法是将(*L*)积分糅合到传统的数学分析中去，例如讲重积分时便讲(*L*)积分，在广义积分中用(*L*)积分等等。不论哪种做法至少都是可行的。本书采取稳健方案，将(*L*) 积分放在最后一章。这样安排比较灵活，可根据教学计划的安排决定取舍。

本书的总体结构和编写大纲是编写者两人共同讨论的。执笔是分头进行的，上册和(*L*)积分由姚允龙执笔，下册除 (*L*) 积分外由欧阳光中执笔。

在本书出版过程中得到数学系的同仁和复旦大学出版社的大力支持和帮助，编者在此表示深切的谢意。并欢迎广大读者对本书提出批评和意见。

欧阳光中
姚 允 龙
1991 年 10 月于复旦大学

目　录

目　录

第一章 集 合

§1 集合

一、集合和元素

当我们在考察自然数时，遇到1,2,3,…等一个个对象；当我们考察天体时，遇到了一个个星球。这一个个对象就称为元素。Cantor认为元素是指“感觉或思维中确定的各别对象”。某些对象（即元素）的汇总称为集合，这些被汇总的元素称为该集合的元素，其余元素则称为不是该集合的元素。集合简称为集。

设 A 是一个集合，x 是一个元素。如果 x 是 A 的元素，则又说 x 属于 A，并记作

$$x\in A;$$

如果 x 不是 A 的元素，则又说 x 不属于 A，并记作

$$x\notin A \text{ 或 } x\bar{\in} A.$$

例如，由 a,b,c,d 这四个字母组成的集合 A 可表示为

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

这种将集合的元素列举以尽来表示集合的办法称为枚举法。根据集 A 的定义，我们知道 $b\in A$, $d\in A$, 但 $x\notin A$, $1\notin A$ 等等。但并不是每个集合都可用枚举法来表示的。在用枚举法行不通或用枚举法不方便时可采用条件法，即指出集合中元素的特性来表示该集合。例如，集

$$B=\{\underset{\text{(一般元素)}}{x}\mid \underset{\text{(元素的特性)}}{x\text{ 是应届中学毕业生}}\}$$

表示了应届中学毕业生所组成的集合。于是，张三 $\in B$ 表示张三是应届中学毕业生；李四 $\notin B$ 表示李四不是应届中学毕业生。

我们再来看一些例子。

例 1 $A=\{x|x^2+x=0\}$ 表示由方程 $x^2+x=0$ 的根所组成的集

合。

如果集合 A 和集合 B 有完全相同的元素，则称集合 A 与集合 B 相等，并记作 $A=B$。

回到例 1. 方程 $x^2+x=0$ 有 $x=0,-1$ 两个根。因此

$$A=\{0,1\}.$$

例 2 集$\{1,2\}$,集$\{2,1\}$和集$\{1,1,2\}$的元素都是 1 与 2 两个，故

$$\{1,2\}=\{2,1\}=\{1,1,2\}.$$

例 3 集$\{1,2,\{1,2\}\}$有三个元素：1,2 及$\{1,2\}$,故

$$\{1,2,\{1,2\}\}\neq\{1,2\}.$$

下面是一些常见的集合：

$$\begin{aligned}
N&=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}\\
&=\{n\,|\,n\text{ 是自然数}\},\\
R&=\{x\,|\,x\text{ 是实数}\},\\
Q&=\{x\,|\,x\text{ 是有理数}\}\\
&=\{x=q/p\,|\,p,q\text{ 是整数且 }p>0\},\\
R_+&=\{x\,|\,x>0\},\\
R_2&=\{(x,y)\,|\,x,y\in R\},
\end{aligned}$$

最末一个集合 R_2是 XY 平面上点(x,y)的全体。更一般地，

$$R_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\},$$

称为 n 维空间。

二、有限集和无限集

若集 A 由 n 个元素组成，这里 n 是一个确定的自然数，则称集 A 是有限集。不是有限集的集称为无限集。

例如，$\{a,b,c,d\}$,$\{x\,|\,x$ 是中国的市或县$\}$，$\{1,2,3,4,5\}$ 都是有限集。而集 N,R,Q,R_+ 及 R_2 都是无限集。

仅有一个元素 a 组成的集 $\{a\}$ 称为单点集。注意，$a\in\{a\}$ 但 $a\neq\{a\}$。

如果一个无限集可表示成

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

则这个集合称为可列集。例如，自然数集 N,偶数集$\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$,

奇数集$\{1,3,\cdots,2n-1,\cdots\}$，$\left\{1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$都是可列集。

下一章将证明实数集R不是可列集。

例 4 证明有理数集Q是可列集。

证 每个有理数可唯一地表示成

$$x=\frac{q}{p},$$

这里，$p>0$，p,q都是整数且互质。满足$p+|q|=1$的有理数仅有一个0，满足$p+|q|=2$的有理数仅有$\frac{1}{1}$和$\frac{-1}{1}$两个，满足$p+|q|=3$的有理数为$\frac{2}{1}$，$\frac{-2}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{-1}{2}$四个，一般地，满足$p+|q|=n$的有理数为

$$\frac{n-1}{1},\ -\frac{n-1}{1},\ \frac{n-2}{2},\ -\frac{n-2}{2},\cdots,\frac{1}{n-1},\ -\frac{1}{n-1},$$

共$2(n-1)$个，$\cdots$。最后Q可表成

$$Q=\Big\{0,\underbrace{\frac{1}{1},\ -\frac{1}{1}}_{p+|q|=2},\ \underbrace{\frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}_{p+|q|=3},\ \cdots$$

$$\underbrace{\frac{n-1}{1},\ -\frac{n-1}{1},\cdots,\frac{1}{n-1},\ -\frac{1}{n-1}}_{p+|q|=n},\ \cdots\Big\}.$$

这就证明了Q是可列集。

三、空集

一个元素也不存在的集称为空集，记作$\varnothing$。例如，方程$x^2+1=0$的实根所组成集

$$\{x\,|\,x^2+1=0,x\in R\}$$

就是个空集。但集$\{x\,|\,x$是外星人$\}$是不是非空集至今还未确认。

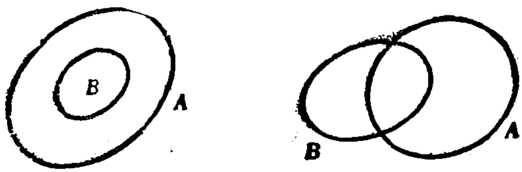
应注意，集$\{\varnothing\}$不是空集，因为该集中有一个元素$\varnothing$！

四、子集

设A,B是两个集合。如果B的元素都是A的元素，则称B是A的子集，并记为

$$B\subset A.$$

若 B 不是 A 的子集，则记为 $B\not\subset A$ 或 $B\overline{\subset}A$（图 1-1）．例如，$N\subset Q\subset R$，$Q\not\subset R_+$．



$B\subset A$　　　　$B\not\subset A$

图1-1

命题　A 是任意一个集，必有

$$A\subset A, \varnothing\subset A.$$

证　$A\subset A$ 是显然的，因为 A 的元素自然是 A 的元素．第二式 $\varnothing\subset A$ 可用反证法．假定 $\varnothing\not\subset A$，则这就意味着存在元素 $\xi\in\varnothing$ 但 $\xi\notin A$．已知 $\varnothing$ 是个空集，故元素 ξ 是不存在的，这个矛盾表明假定 $\varnothing\not\subset A$ 不成立，从而 $\varnothing\subset A$．

上述命题指出 A 的最大子集是 A 本身，最小子集是空集 $\varnothing$．

例 5　写出集 $\{1,2\}$ 的一切子集．

解　$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$．

五、练习

1． 纠正下列错误：

(1) $1\subset\{1,2,3\}$；　　(2) $\{1,2\}\in\{1,2,3\}$；

(3) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$；　　(4) $\{a,\{a\}\}=\{a\}$．

2． 设 A,B 是两个集合．下列对 $A\neq B$ 的三个阐述中，哪些是正确，哪些是错误？说明理由：

(1) A 的一切元素都不属于 B，B 的一切元素也不属于 A．

(2) A 中至少存在一个元素不属于 B，反之亦然．

(3) A 中至少存在一个元素不属于 B，或者 B 中至少存在一个元素不属于 A．

3． 严格阐述 $B\not\subset A$．