平稳时間序列的統計分析

U. 格列南特
M. 罗孙勃勒特 著
郑紹濂等 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是利用現代随机过程理論的成就来处理平稳时間序列統計分析問題的第一本著作。在本书中，除对平稳随机过程的基本理論及綫性預測与过濾理論作了扼要的介紹外，着重是討論平稳时間序列的譜估計与参数估計；对这方面在1957年前的成就作了系統而全面的介紹。同时，作者引用与列举了大量的物理学的例子，并且专列一章来介紹平稳时間序列的分析方法在海洋波，湍流及噪声理論上的应用。

本书可供数学、力学、地球物理、无綫电物理与无綫电技术等方面的工作者参考。

本书由复旦大学郑紹濂、陶宗英、汪嘉岡、何声武同志翻譯。

平稳时間序列的統計分析

STATISTICAL ANALYSIS OF STATIONARY TIME SERIES

原 著 者 〔美〕Ulf Grenander Murray Rosenblatt

原出版者 John Wiley & Sons·1957 版

譯 者 郑 紹 濂 等

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
大东集成联合印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印張 9 4/32 字数 232,000
1962年7月第1版 1962年7月第1次印刷
印数 1—3,000

統一书号：13119·465
定 价：(十四) 1.55 元

目　录

序

本书的目的有两个方面。其一是想引起理論統計学家注意一个研究时間序列分析的新技巧，它本质上不同于时間序列分析学者已往所使用的一般方法，因此本书是用理論統計学家的术語写成的。其二是对在物理学和技术科学中应用日益广泛的方法作一个統一的处理。我們希望本书将引起这些領域中的研究工作者的巨大兴趣。考虑到第一个目的，我們对时間序列分析中的这些新材料进行了严格的数学討論。現有的时間序列分析的文献，除少数例外，它們的特点是在概念和对所討論的問題的数学处理两方面都缺乏精确性。为了避免这种不精确性，我們以較多的篇幅用于作严格的証明，这对某些讀者来說可能是不必要的，但我們相信，这样的証明将为許多結果提供实际应用的重要綫索，而且还有助于直觉的思考。在形式証明中，我們尽可能作直观的解釋，而在实际应用方面，我們也将尽力作出一些評注。我們要求的正則性假設在許多場合看起来好象是一种不方便的限制，但經适当解釋以后就可看出，这些假設正是所用方法确实符合实际的一种指标。这在形式証明的注解中将附带予以說明。

我們假定讀者已具备了相当于H. Cramér«統計的数学方法»一书中的統計与概率論的基本知識。本书所提出的統計技巧使用了随机过程理論的概念和关系。我們将在前两章中列出我們所需要的結果。不熟悉本书所用数学技巧的讀者在初讀时可跳过某些較困难的証明，特别是第二、四、六和七章中的某些証明，等讀完以后再回过来看这些証明，就可对那些結果(及它們的适用范圍)得到較深入的了解。

在时間序列統計分析理論的早期工作中，使用了一个很簡单的模型。将被观察的过程 y_t 看作是非随机分量 m_t 和随机扰动 x_t

的和，而假定 x_t 是独立同分布的。作为一个例子，令

$$m_t=\sum_{\nu=1}^{p}A_\nu\cos(t\lambda_\nu+\varphi_\nu),$$

其中的常数是未知的，而設 x_t 的分布是均値为 m，方差为 σ^2 的正态分布。这时一个典型的問題是估計这些参数中的一个或几个。对于这个問題的更一般的处理是将所考慮的过程，明显或不明显地假設成一个所謂有限参数模型。这包括滑动和

$$x_t=a_0\xi_t+a_1\xi_{t-1}+\cdots+a_p\xi_{t-p}$$

以及由差分方程

$$b_0x_{t+p}+b_1x_{t+p-1}+\cdots+b_px_t=\xi_t$$

所定义的自回归模型。上面的 $\{\xi_t\}$ 是一列独立同分布的随机变量，$\{a_\nu\}$ 和 $\{b_\nu\}$ 是常数。非負整数 p 称为这模型的阶数。有时也考慮迭加上一个非随机的三角和或多項式的回归 m_t 的这种經过修正的过程 $y_t=x_t+m_t$。

这些模型在时間序列統計分析方法的发展中起了重要的作用。它們可成功地用来描述在应用中遇到的各种現象。从第一章的討論中就可知道，用这些模型可逼近一大类重要的平稳过程，即所謂綫性过程（見 1.6 节）。但为此却要将 p 取成很大的値，而不是較小数値，且必須适当調整包含在这模型中的参数。

最近十年来的許多工作都致力于作出适用于这些模型的檢驗、估計和置信区間的方法。在第三章中我們介紹了这些工作中較重要的一些結果。尽管这些結果中有某些是通过巧妙的方法而获得的，同时在理論上也有重大的意义，但是它們的实际应用却受到过程是低阶的（常是零阶、一阶或二阶）有限参数模型这一假設的限制。在对实际中遇到的时間序列統計分析的大量应用文献作一番研究之后，我們可以得到下面的結論。

看来，只是对于少数的特殊情形（其中的一部分将在本书中討論）才有理由可先驗地假定过程是低阶的有限参数模型。如上所述，一般地我們可用相当高阶的模型来逼近过程，然后可采用适当

的檢驗法。但这种方法必需要顾及到檢驗的效；一般来說，对常用的子样容量，檢驗的效是相当小的。因此，当我們缺乏关于过程結构的信息时，我們必須研究出更一般地正确的方法。否則，我們只凭借那种看起来似乎是客观的，但却是有漏洞的方法去作出定量的統計推断是不可靠的。

但是，要作出对于我們所考虑的大量平稳过程都正确的推断方法似乎是不可能的。事实上，若离开有限参数模型，我們就必須处理包含有无限多个参数的概率分布类，并要从有限的子样中获得关于这些参数的信息。这与在非参数檢驗的研究中所产生的問題是相同的，在本书中我們将要来解决这方面所遇到的复杂的分析上的困难。

談一談我們认为最有用的思想方法的两个来源可能是有意义的。第一个来源是应用文献，特别是处理自然科学和工程中的統計問題的文献。打算在这些領域中做研究工作的統計学家可从发表在这些領域主要杂志上的統計研究資料中得到益处。在我們的参考书目中列出了一部分这方面的杂志。第二，自然就是近代概率論的知識，特别是随机过程的理論。这方面的一部完整而严格的著作是 J. L. Doob 的《随机过程論》。还可从 Blanc-Lapierre 和 Fortet 的《随机函数論》一书中得到补充，这本书的重点是放在物理的应用方面。

本书中的結果很少写成定理的形式。这是为了强調出这些結果还不能作为立即可用的严格系統的一部分。在实际应用时还需要作一番修正和推广。

最近在物理和技术科学的不同領域中已利用了我們所談到的非参数方法，不过是以略为隐蔽的形式出現的。通过深入的調查可以发現，在这些領域中处理的某些基本問題的确是与时間序列的譜估計、信号的探测和其他在本书中討論的統計問題有关的。这些方法所以在具体情况中能成功地应用，看来似乎是由于在这些領域中对所研究的随机現象的結构已有較多的知識，以致有可

能找出合适的技巧。这与那些拘守于使用相当呆板的方法的理論統計学家形成了一个对比。这些新技巧的成功应归諸于它們的非参数特性。我們从閱讀近代許多有启发性的工程文献中得到了不少教益。在参考书目中可以找到不少这类的文章，我們将向有兴趣的讀者推荐其中的一部分，在这些文章中提出的問題是特别有意义的。

在本书中所考虑的基本的概率模型是随机过程(或随机序列)

$$y_t=x_t+m_t;\ \mathrm{E}y_t=m_t,\ \ t=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,$$

而均値 $m_t=\sum_{\nu=0}^{p} c_\nu\varphi_t^{(\nu)}$ 中的回归向量 $\varphi_t=(\cdots,\ \varphi_t^{(\nu)},\cdots)$ 是已知的，并假設扰动 x_t 是一个平稳随机过程，即概率分布在时間的推移下为不变的过程。这意味着 x_t 是一个稳定的随机动力学系統。由此特别可得到协方差序列

$$\operatorname{cov}(y_t,\ y_\tau)=\mathrm{E}x_tx_\tau=r_{t,\tau}=r_{t-\tau}$$

只依賴于时間的差 $t-\tau$. 在随机噪声、湍流和海洋学的研究中，这样一个模型与在相当长时間内观察到的資料是相符的。协方差 r_n 是一个有界非降函数 $F(\lambda)$ 的富里埃-司梯阶系数

$$r_n=\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}dF(\lambda),$$

函数 $F(\lambda)$ 称为过程的譜函数，譜为已知等价于协方差序列为已知，而在統計上处理譜要比处理协方差序列更为方便。

我們所考虑的問題的輪廓大致如下。观察了过程 $\{y_t\}$ 的一部分现实：一个时間序列 $y_1,\ \cdots,\ y_N$，我們希望从观察到的資料中作出关于过程 $\{y_t\}$ 的結构的推断。考虑了对回归系数的估計和檢驗問題。綫性回归是一个典型的例子。这时有两个回归向量

$$\varphi^{(1)}=(\cdots,\ 1,\ 1,\ \cdots),$$
$$\varphi^{(2)}=(\cdots,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ t,\ \cdots)$$

对应于回归 $m_t=c_1+c_2t$ 的回归系数为 $c_1,\ c_2$. 討論了对譜函数和譜密度(譜函数的导数)的估計和檢驗問題。建立了对于譜函数和譜密度的置信限。許多結果具有漸近的非参数特性，即所得到的

許多极限定理(漸近分布理論等等)不依賴于譜。所使用的方法与大多数时間序列分析的早期工作有显著的不同，且在应用范圍上更为一般。

在第一章中介紹了所需要的概率論的基本知識。討論了平稳性和譜的概念，并用大部分取自物理方面的例子加以解释。

在第二章中，在假設譜为已知的条件下討論了綫性預測、內插和过滤問題。一般說来，譜是未知的，除非在处理同样的試驗情况下发生的問題时已有了許多先驗的經驗。本书其余的大部分內容是討論譜未知时譜的統計估計問題。

在第三章中概述了时間序列的統計分析的早期工作。这些工作只限于处理非常特殊的有限参数模型的統計問題。本书所用新技巧的显著不同在于它們处理的是无限維的模型，包括了全部以前所考虑的特殊模型，因此它提供了一个統一的处理方法。新技巧之所以有效是由于它的巨大的概括性。前三章只是起引論的作用。余下的几章討論新的技巧以及它們的应用。

在第四章中考虑的是譜密度的估計。詳細地討論了两种类型的估計。第一类估計在本书中称为譜图估計，它們非常适宜于在数字計算机上进行計算，而第二类估計对于建造模拟計算机来說更为相宜。考虑了这些估計的偏度和漸近方差。說明了任何譜密度的良好的估計都是有偏的。一个估計的均方誤差是这估計好坏程度的一个方便的測度。对某些特殊的估計，詳細地討論了它的均方誤差。

关于应用的一章，即第五章，我們考虑了在几个应用領域中所产生的平稳过程模型。在这些領域中，平稳过程已得到广泛的应用。討論了有关研究随机噪声、湍流以及风暴造成的海洋波浪中的一些問題。

第六章研究了一类譜函数的估計的漸近分布。对譜函数建立了置信限，并討論了单子样和双子样檢驗。这些結果具有漸近的非参数特性。給出了关于譜密度估計的分布理論的注記。在这一

章中包含了用人工作出的时間序列的譜分析的例子。

第七章处理了回归分析。討論了回归系数的綫性无偏估計。比較了最小二乘方估計(在扰动是独立的假設下計算的)和馬尔柯夫(最小方差的无偏估計)估計。給出了最小二乘方估計漸近地与馬尔柯夫估計同样好的条件。例如多項式或三角回归是滿足这些条件的。看来这些关于回归系数估計的漸近結果对常用的甚至很小的子样也是比較正确的。

最后一章討論了关于时間序列的最大点和零点，以及譜为未知而是从时間序列中估計得到的这种情形下关于預測等各种問題。

讀者可能会注意到，本书中所討論的例子几乎全都选自物理学。其原因是很簡单的，因为平稳随机过程的一些最自然和最成功的应用是属于这些領域的。

应該談一談本书中所提出的方法的应用范圍。如讀者将会看到的，我們只研究了具有平稳扰动的过程。大家知道，分析平衡的条件比分析变动的条件簡单得多，因此所提出的方法若不經过本质上的改变或許不能推广到非平稳的情形。此外，我們只处理了离散的时間，虽然这在我們討論的許多問題中是非常不自然的。在有些情形，結果可推广到連續时間参数的場合(关于这样做的一般方法可参閱 Grenander [1])。但在其他的情形(例如对第七章研究的問題)，問題还未解决，其中有一些問題有很大的分析上的意义。对于这些問題須作进一步的研究。书中很少注意向量过程，虽然它們在許多重要的应用中会遇到。作这方面的推广似乎是可能的(参見 Grenander 和 Rosenblatt [6] 及 Rosenblatt [1], [2])。

最后，本书只考慮了大子样方法。因为时間序列分析处理的是非独立的观察(这減少了获得的信息量)和类型非常广泛的概率分布，为了使漸近結果能給出眞正有用的近似，子样容量可能需要很大。当然，重要的是找出在怎样的子样容量时这些結果給出合

乎实际的近似。要进一步解决这一問題，或許要从数値方法着手。

假若讀者对本书中加在分析方法上的限制感到不满意，那么本书就达到了它的一个主要目的：刺激讀者去寻找实际上有用的并且在理論上也是完美的时間序列分析方法。

本书的每一章划分成編号的节。6.2 节表示第六章的第二节。公式的編号是从每节的起首开始的。在 6.2 节中出現的公式(2)表示这一节中的公式(2)。在 6.2 节中提到的公式(6.1.2)表示 6.1 节的公式(2)。

本书給出了一些問題，目的之一是供讀者作练习之用，另一目的是为了引导讀者去补充和推广本书中給出的結果。

第一章　平稳随机过程及其表示

1.0. 引　　言

在本章中引入了平稳随机过程的基本結果。

1.1. 什么是随机过程？

我們首先来給出随机过程的一般的且較抽象的定义。这一定义的具体意义与重要性，可借助于本节及下节中所举出的簡单例子而得到說明。一个**随机过程** $x_t(w)$ 是随机变量的一个加标集合。我們并不須只限于討論实值随机变量，它可以是取复值的与取向量值的。这里的 t 是尙待具体規定的指标集合 T 中的元素。集合 T 可以是数直綫或是自然数所成的集合，或是高維欧氏空間中的点集。它也可以是数直綫或高維欧氏空間上的波雷耳 (Borel) 集合的全体，在这种情形，$x_t(w)$ 就是一个**随机集合函数**。这种指标集合被采用的机会是不多的，但在本书中有时却需要采用这样的指标集合。

对每一固定的 t，$x_t(w)$ 为一測度空間 Ω 上的函数。在 Ω 的子集所成的 σ-代数上，定义了一个概率測度 P。对 T 中每一元素 t，过程 $x_t(w)$ 关于測度 P 为可測。(見 Halmos[1]。)

若 w 为固定，則 $x_t(w)$ 为 t 的一个函数，称为过程的**样本函数或现实**，令 w 取遍 Ω 中所有的值，便可得到这种函数的一个集合。

在一个給定的場合，可以有多种不同的方法来选择 Ω 与定义 P，下面是一种常用的方法。将 Ω 取为定义在 T 上的函数的全体所成的集合。令 A 表示过程的值所成的集合。在本书中，恒将 A 取为有限維的复值或实值的向量空間。对于任一由有限个 t 的值 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 所成的集合，我們来考虑下列的事件

$$\{x_{t_j}(w)\in A_j;\ j=1,2,\cdots,n\}\subset\Omega, \tag{1}$$

此处的 A_j 为 A 中的波雷耳集合。若所有这种事件的概率均已給定，則由此可定义一个在这些事件上的有限可加測度。如果所有这种事件的概率具有相容性，則可証明这一測度能扩張成为一个定义在由这些事件所張成的波雷耳域上的完全可加的概率測度。这样一来，便可給出在可列个 t 值上的 $x_t(w)$ 的值所成的集合的概率了。关于这一問題的詳細討論与証明，可参閱柯莫哥洛夫(Колмогоров)的著作[1]。

在很多情形中，我們往往对过程在不可列的 t 值的集合上的性质感到兴趣。要处理这样的一种問題是較困难的。但在多数常見的情形中，这一困难是可以克服的。在进行正式的討論之前，我們来討論一些特殊的过程，由此来看一看这一困难是如何被克服的。我們設想去观察一个质点在直綫上的布朗运动。这种运动是非常不規則的，可以将它看成一个随机模型。以 $x_t(w)$ 表示在时間 t 质点所处的位置，假定质点在 $t=0$ 时处于位置 0，即 $x_0(w)=0$。并假定在不相交的时間区間內质点所处位置的机会是独立的。这就是說质点位置的改变与过去的情况无关。最后，假定在时間区間 (a, b) 內位移的分布是一均值为零、方差为 $\sigma^2(b-a)$ 的正态分布。显然，这些条件完全决定了具有形式 (1) 的集合的概率，因而也就可以应用柯莫哥洛夫的方法了。

設在点 $x=1$ 上置有一吸收壁，我們自然会对在时間区間 $(0, \tau)$ 內质点未到达吸收壁的概率感到兴趣，即下述事件的概率

$$\{x_t(w)<1;\ \text{对所有的}\ t\in(0,\tau)\}\subset\Omega, \tag{2}$$

但这一集合却不属于我們所考虑的波雷耳域的。

怎样来給出这种事件的概率呢？如果我們代之以下述的属于波雷耳域的集合

$$\{x_t(w)<1;\ \text{对}\ (0,\tau)\ \text{中的所有的有理数}\ t\}\subset\Omega, \tag{3}$$

那末它就有概率可言了。从直观上看来，"吸收壁"的概率应該等于最后这一集合的概率。因此，如果我們能根据某些理由而假定

质点运动的可能途徑仅由在一可数稠密的集合上的值所完全决定，則集合(2)与(3)就没有差别了，于是就可毫无困难地給出集合(2)的概率。当我們只限于考虑质点运动的連續途徑时，显然可采用上述的假定。而对于布朗运动而言，可以証明它的样本函数的集合是一个連續函数的集合。(見 Doob[2]。)

下面是綫性布朗运动的另一种模型。令

$$x_t(w)=z_0(w)t+\sum_{\nu=1}^{\infty}z_\nu(w)\frac{\sin\nu t\pi}{\nu}\frac{\sqrt{2}}{\pi},\quad 0<t<1, \tag{4}$$

此处的 z_ν 为相互独立，且具有均值为零、方差为 σ 的正态分布的随机变量。巴瑞与維納 (見 Paley-Wiener [1]) 曾証明上述級数以概率一对 t 为一致收斂。由 (4) 的一致收斂性即知几乎全部的样本函数均为連續。正如相互独立的正态随机变量的綫性組合仍为一正态随机变量一样，$x_t(w)$ 是一个正态过程，即它的全部有穷維分布函数均为多維正态。容易驗証 $\mathrm{E}x_t(w)=0$ 及

$$\mathrm{E}x_s(w)x_t(w)=\sigma^2 st+\frac{2\sigma^2}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu\pi s\sin\nu\pi t}{\nu^2}=\sigma^2\min(s,t).$$

这就意味着所有的有穷維分布正如上面所断言的一样。但要注意，虽然这与我們原先所考虑的那个模型是不一样的，但它的样本函数所成的空間仍然是連續函数的一个子集。而由这一模型所导入的概率測度，从本质上来看，与我們原先所考虑的那个模型的修正所导入的概率測度是一样的。

作为另外一个例子，让我們来考虑电話网中的一条单綫路这样一个經过大大簡化了的模型。我們所感兴趣的是从时間 a 到时間 $b>a$ 在这条綫路上发生的呼喚次数。假定呼喚所占的时間是非常的短，以致于可以看做是零。令 $n(b)-n(a)$ 为在时間区間 (a,b) 內发生的呼喚次数。不妨設 $n(0)=0$。这样一来，就可将 $n(t)$ 在不相交的时間区間上的增量看成是独立的。在这些条件下，$n(b)-n(a)$ 就是一个具有均值 $\lambda(b-a)$ 的波阿松 (Poisson)

分布[1]。通常称这一过程为波阿松过程。我們自然会对下述形状的集合的概率感到兴趣

$$\{n(t)-n(a)<1;\ a<t<b\}.$$

从直观上看来，这个集合的概率应該与下述集合的概率相等，

$$\{n(t)-n(a)<1;\ a<t<b,\ t \text{ 为有理数}\},$$

而它的概率是有定义的。由这一过程在一可数且处处稠密的集合上的值所决定的样本函数集合，是一較連續函数集合更大的非降阶梯函数集合。

与剛才所討論的同样困难的一个問題是随机过程的积分的定义。但若能将样本空間 Ω 取得使 $x_t(w)$ 在 $T\times\Omega$ 上关于乘积測度 $dt\times dP$ 为可測，此处 dt 为 T 上的測度，則这一困难就不会产生了。此时对于几乎所有的 w，$x_t(w)$ 为 t 的可測函数。設

$$\int_T \mathrm{E}|x_t(w)|\,dt<\infty,$$

則积分 $\int_T x_t(w)\,dt$ 为 Ω 上的可測函数，亦即为一随机变量。这就是富比尼(Fubini)定理(例如可参見 Halmos [1])。

在以后的討論中，均假設可这样地来选擇 Ω，使得不致于产生上述的諸問題。关于上述諸問題的詳細討論，可参看杜勃(Doob)的书[2]。

1.2. 均方連續

設 x_t 为一复值随机过程。假定其二阶絕对矩 $\mathrm{E}|x_t|^2<\infty$ (我們常将 w 略而不写)。令

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{E}x_t=m_t,\\&\mathrm{E}(x_s-m_s)\,\overline{(x_t-m_t)}=r_{s,t}.\end{aligned}\right\}$$

在本章中，我們假設均值函数 m_t 恒等于零。$r_{s,t}$ 称为协变(covariance)函数，它是衡量过程在不同的 t 上的值的相依性的一个尺度。

---

1) 其証明可見 A. Я. 辛欽所著《公用事业中的数学方法》。——譯者注

协变函数为一厄米特式 (Hermitian)，即 $r_{s,t}=\bar{r}_{t,s}$，且为非负定的。这由下列关系式立即可知

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_{t_\nu}\right|^2=\sum_{\nu,\mu=1}^{n} c_\nu \bar{c}_\mu r_{t_\nu,t_\mu}\geqslant 0.$$

另一方面，对于每一厄米特式且为非负定的矩陣 $r_{s,t}$（显然，参数 s, t 可以是离散的或是連續的），必有一以 $r_{s,t}$ 为协变函数的过程与之对应。若 $r_{s,t}$ 只取实值，则对任一 t 值的集合 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，矩陣 $\{r_{t_\nu,t_\mu}, \nu, \mu=1, 2, \cdots, n\}$ 为对称且非負定。因此，存在一以此为协变矩陣的正态分布。我們能够据此来定义任何有穷維分布。应用柯莫哥洛夫的方法（見 1.1 节）就可得到具有我們所希望的协变函数的随机过程。若 $r_{s,t}$ 是取复值的，亦可决定一个取复值的过程，这只須用同样的方法来构造它的实部与虛部的联合分布就可以了。

若在某种拓扑之下，当 $t\to t_0$ 时，$\mathrm{E}|x(t)-x(t_0)|^2\to 0$，则称过程在 t_0 为均方連續。若对 T 中的所有元素皆为均方連續，則称过程在 T 上均方連續。当过程的参数 t 为离散时，自然就无所謂連續与否的問題了。

易見下述的恒等式是成立的：

$$\begin{aligned}r_{s,t}-r_{s',t'}&=r_{s,t}-r_{s',t}+r_{s',t}-r_{s',t'}\\&=\mathrm{E}(x_s-x_{s'})\bar{x}_t+\mathrm{E}x_{s'}\overline{(x_t-x_{t'})}.\end{aligned}$$

由許瓦茨 (Schwarz) 不等式可知上式的絕对值小于

$$\sqrt{\mathrm{E}|x_t|^2\mathrm{E}|x_s-x_{s'}|^2}+\sqrt{\mathrm{E}|x_{s'}|^2\mathrm{E}|x_t-x_{t'}|^2},$$

再由 $\sqrt{\mathrm{E}|x_{s'}|^2}\leqslant\sqrt{\mathrm{E}|x_s|^2}+\sqrt{\mathrm{E}|x_s-x_{s'}|^2}$ 便可看出当 (s', t') 趋于 (s, t) 时，$r_{s',t'}$ 趋于 $r_{s,t}$。

另一方面，若协变函数在对角綫 $s=t$ 的所有的点上为連續，則由等式

$$\mathrm{E}|x_s-x_t|^2=r_{s,s}+r_{t,t}-2\mathrm{Re}\,r_{s,t},$$

可知当 $s\to t$ 时，$r_{s,s}\to r_{t,t}$ 及 $r_{s,t}\to r_{t,t}$，因之上式即趋于零。故而均方連續与函数 $r_{s,t}$ 在对角綫 $s=t$ 上連續是等价的。