计算数学丛书

曲线曲面的数值表示和逼近

黄友谦编著　上海科学技术出版社

计算数学丛书

曲线曲面的数值表示和逼近

黄友谦 编著

上海科学技术出版社

计算数学丛书

曲线曲面的数值表示和逼近

黄友谦　编著

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 6.125　字数 133,000

1984 年 9 月第 1 版　1984 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—10,200

统一书号：13119·1166　定价：0.71 元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

前　言

本书从几个侧面论述曲线、曲面拟合的数值方法，书中指出了单位算子逼近的应用，探讨了自适应的曲线拟合同常微分方程反解的联系，分析了带不等式约束的样条函数插值法，构造并评述了各种局部逼近的数值方法，讨论了分片伯恩斯坦多项式在保形逼近中的应用，最后，侧重介绍了散乱数据的曲面拟合方法。

作者从李岳生教授领导的讨论班中得到许多有益的启示。陈大正、关履泰、林锐豪同志分别参加了第三、二、四等章一些内容的讨论和协助个别内容的编写工作。作者对潘震泰、陈大正、程诗杰同志表示感谢，他们曾将本书选作高年级的选修课，提出了一些建议和修改意见。

由于水平限制，书中的错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

1981年10月

目　录

第 1 章

引　论

§1　单位算子的逼近及应用

函数线性空间 X 的单位算子 I，是指对于任意 $f\in X$ 恒有 $If=f$。记 $D=\frac{d}{dx}$ 称为微分算子，$\int$ 为积分算子，有 $I=D\int$，用步长 h 的中心差分算子 $\frac{\delta}{h}$ 来代替 D，这里

$$\delta f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right),$$

便得到单位算子的逼近算子 $\frac{\delta}{h}\int$，称为平均算子或磨光算子。为了研究逼近误差，我们借助符号算子。早在十九世纪前半期，一些数学家就曾经运用符号算子去解决一些数学问题。符号算子方法就是通过简捷运算发现一些有用的数值方法。至于这些数值方法的有效性和误差估计等仍按分析学的严格理论去阐明。

将 $f(x+h)$ 在 x 点作泰勒展开

$$f(x+h)=\left(I+hD+\frac{(hD)^2}{2!}+\cdots\right)f(x),$$

注意到 e^x 的泰勒级数形式，记

$$e^{hD}=I+hD+\frac{(hD)^2}{2!}+\cdots,$$

便有 $\delta f(x)=(e^{\frac{hD}{2}}-e^{-\frac{hD}{2}})f(x)=2\left(\operatorname{sh}\frac{hD}{2}\right)f(x)$。再注意

到积分是微分的逆运算，将$\int$记成D^{-1}，我们得到磨光算子逼近单位算子的误差

$$\begin{aligned}I-\frac{\delta}{h}\int&=I-\frac{2D^{-1}\mathrm{sh}\,\frac{h}{2}D}{h}\\&=I-\frac{2D^{-1}}{h}\left(\frac{hD}{2}+\frac{h^3D^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{h^5D^5}{2^5\cdot 5!}+\cdots\right)\\&=-\frac{h^2}{24}D^2-\frac{h^4}{1920}D^4-\cdots.\end{aligned}$$

假定A是定义在线性空间X上的一个线性算子，$M\subset X$是一个线性集合，如果对于任意的$\varphi\in M$都有$A\varphi=\varphi$，我们便称算子A对M有再生性。如果$M=\mathrm{Span}\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$，则称$A$对$n-1$次多项式具有再生性，或称$A$具有$n-1$次代数精度。

由此可知，磨光算子对一次多项式有再生性。磨光算子有许多应用。取磨光算子去逼近单位算子可得到数值微分公式

$$f'(x)=If'(x)\approx\frac{\delta}{h}\int f'(x)dx=\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2},$$

$$\begin{aligned}f''(x)=I^2f''(x)&\approx\left(\frac{\delta}{h}\int\right)^2 f''(x)(dx)^2\\&=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.\end{aligned}$$

利用磨光算子去作用折线函数，便得到用于外形设计的形形式式的B样条曲线。

如果我们想提高磨光算子的精度，例如说，它对高次多项式也有再生性，一个简单办法是将$\delta=2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{hD}{2}$写成

$$\frac{2}{h}\mathrm{sh}^{-1}\frac{\delta}{2}=D$$

有 $I=D\int=\frac{2}{h}\left(\mathrm{sh}^{-1}\frac{\delta}{2}\right)\int$

$$=\frac{1}{h}\left(\delta-\frac{1^2}{2^2\cdot 3!}\delta^3+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 5!}\delta^5-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^6\cdot 7!}\delta^7+\cdots\right)\int,$$

试分别取 $I\approx\frac{\delta}{h}\int,$

$$I\approx\frac{1}{h}\left(\delta-\frac{1}{24}\delta^3\right)\int,$$

$$I\approx\frac{1}{h}\left(\delta-\frac{1}{24}\delta^3+\frac{3}{640}\delta^5\right)\int,$$

便得到对一次、三次、五次代数多项式有再生性的各种形式的磨光算子.

假定 A、B 都是定义在 X 上的线性算子, 且对一切的 $\varphi\in X$ 都有 $A\varphi\in X$, $B\varphi\in X$. 定义算子 A、B 的布尔(Boole)和

$$A\oplus B=A+B-AB. \tag{1.1}$$

我们将 A、B 看成单位算子的逼近算子, 注意到 $I^2=I$, $IA=A$, $IB=B$, 将单位算子 I^2 看成是单位长度 1 的正方形面积, A、B 分别看成是单位长度的逼近值, 算子 A、B 及 $A\oplus B$ 逼近单位算子的误差, 分别由图 1(a)、(b)、(c)的斜线部分给出.

图 1(c)表明, 算子的布尔和 $A\oplus B$ 能更精确地逼近单位算子. 由单位算子的逼近, 可得到各种曲线、曲面的表示方法. 事实上, 设 $y=f(x)$ 是被逼近的曲线, 注意到 $y=f(x)=If(x)$, 将单位算子代换成逼近算子 A, 便得到 $f(x)$ 的近似曲线 $y=\psi(x)=Af(x)$. 利用单位算子 I 的任意次幂都等于 I 的事实, 可将算子 A 的再生函数类增大. 例如磨光算子 $\frac{\delta}{h}\int$

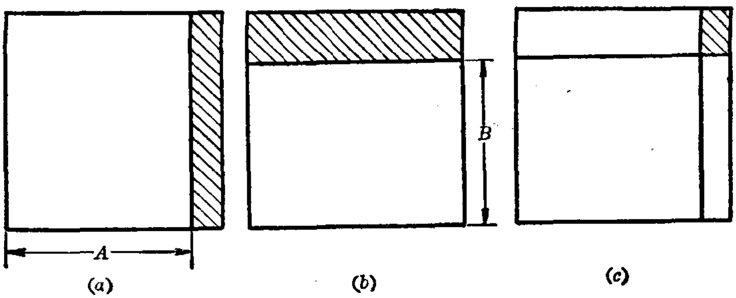

图 1

对一次多项式有再生性，利用 $\frac{\delta}{h}\int = I\frac{\delta}{h}\int$，将 I 分解为近似算子 $c_0+c_1\delta^2+c_2\delta^4$，决定常数 c_0，c_1，c_2 使算子

$$(c_0+c_1\delta^2+c_2\delta^4)\frac{\delta}{h}\int$$

对高次多项式有再生性．由待定系数法有

$$(c_0\delta+c_1\delta^3+c_2\delta^5)\int x^k dx = hx^k,$$

取 $k=0$ 解得 $c_0=1$．$k=1$ 时两端成为恒等式．$k=2$ 时求得 $c_2=-\frac{1}{24}$．当 $k=3$ 时对于取定的 $c_0=1$，$c_2=-\frac{1}{24}$，上式两端也成为恒等式．令 $k=4$ 解得 $c_2=\frac{3}{640}$，不难验明 $k=5$ 时上式两端仍成为恒等式，这即是说算子

$$\left(\delta-\frac{\delta^3}{24}+\frac{3\delta^5}{640}\right)\int$$

对五次多项式具有再生性．

算子的布尔和不但是构造康斯曲面的一个依据，而且在数值方法中能对近似解进行校正．仅举例说明如下．给定 n 个未知数的代数方程组

$$Ax=b,\quad A=(a_{ij})_{n\times n}\quad \text{且非奇异}.$$

由于舍入误差影响，实际上，我们只能求得逆矩阵 A^{-1} 的近似矩阵 $\tilde{A}^{-1}$，从而获得 x 的近似解

$$\tilde{x}=\tilde{A}^{-1}b.$$

将 $x-\tilde{x}$ 记成 εx，ε 是 n 阶矩阵，称为误差阵，有

$$x=Ix=\tilde{A}^{-1}Ax+\varepsilon x.$$

因此，近似求解的过程，可看成单位矩阵 I 作 $\tilde{A}^{-1}A$ 逼近，然后令 $\tilde{A}^{-1}Ax=\tilde{A}^{-1}b$ 作为近似解. 现在，我们运用布尔和作解的校正，作 $\tilde{A}^{-1}A$ 的自身布尔和

$$G_1=\tilde{A}^{-1}A\oplus\tilde{A}^{-1}A=\tilde{A}^{-1}A(2I-\tilde{A}^{-1}A)$$

并令 G_1x 为 $\tilde{x}$ 的校正解，即

$$x^{(1)}=G_1x=G_1A^{-1}b=2\tilde{x}-\tilde{A}^{-1}A\tilde{x},$$

可以预料 $x^{(1)}$ 比 $\tilde{x}$ 更精确地逼近方程组的准确解 x. 用数值例子加以说明，假定

$$A=\begin{pmatrix}7.000 & 6.990\\ 4.000 & 4.000\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}34.97\\ 20.00\end{pmatrix}.$$

取

$$\tilde{A}^{-1}=\begin{pmatrix}100.0 & -174.8\\ -100.0 & 175.0\end{pmatrix},$$

得 $\tilde{x}=(1,\ 3)^T$. 但准确解 $x=(2,\ 3)^T$. 现作 $\tilde{A}^{-1}A$ 的自身布尔和，并进一步求得 $x^{(1)}=(1.8,\ 3)^T$，这说明 $x^{(1)}$ 比 $\tilde{x}$ 更接近 x. 如果作 $\tilde{A}^{-1}A$ 的二次布尔和，即

$$G_2=\tilde{A}^{-1}A\oplus\tilde{A}^{-1}A\oplus\tilde{A}^{-1}A,$$

并令 $$x^{(2)}=G_2x=(3I-3\tilde{A}^{-1}A+(\tilde{A}^{-1}A)^2)\tilde{x},$$

那末 $$x^{(2)}=(1.96,\ 3)^T,$$

再作 $\tilde{A}^{-1}A$ 的三次布尔和又有 $x^{(3)}=(1.992,\ 3)^T$ 等等.

§2 B样条的数值基础

B 样条是曲线、曲面数值表示的重要工具，其基本理论在文献[1]、[2]中有了详细论证，这里作一概述。为了书写方便，仅叙述非重节点的 B 样条函数。

假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，$\{x_i\}$ 为 $[a, b]$ 中互异节点，称

$$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]f = \frac{[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]f - [x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}]f}{x_i - x_{i+k}}$$

为函数 $f(x)$ 在 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ 处的 k 阶差商。这里 $[x_j]f$ 表示 $f(x)$ 在 x_j 处的函数值。由代数插值的 Newton 形式，容易看出

$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]f = f(x)$ 关于 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ 的 k 次代数插值的最高幂系数。

在寻找 $[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]f$ 与 $f^{(k)}$ 的联系中，利用 Peano 核定理，自然地导致发现 B 样条函数。假定

$$f(x) \in C^k[a, b], \quad x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{i+k}$$

均属于 $[a, b]$，将 $f(x)$ 在 a 处作 Taylor 展开有

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a) + \int_a^b \frac{(x-t)_+^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t)\,dt,$$

两边作关于 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ 的 k 阶差商，有

$$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]f = \int_a^b [x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}dt,$$

这里 $u_+ = \max(0, u)$，注意到

$$[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{(x_j - t)_+^{k-1}}{w_k'(x_j)},$$

$$w_k(x) = \prod_{l=i}^{i+k}(x - x_l),$$

当 $t \geqslant x_{i+k}$ 时 $(x_j - t)_+^{k-1} \equiv 0$; 当 $t \leqslant x_i$ 时

$$(x_j - t)_+^{k-1} \equiv (x_j - t)^{k-1},$$

进而

$$\begin{aligned}&[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1}\\ &\equiv [x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)^{k-1} \equiv 0,\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]f\\ &= \int_{x_i}^{x_{i+k}} [x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} dt.\end{aligned}$$

定义 1 称

$$B_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i)[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-1} \quad (2.1)$$

为具有结点 x_i, x_{i+1}, $\cdots$, x_{i+k} 的 k 阶 B **样条**.

这样, B 样条是将差商和导数联系起来的重要工具, 同一阶的差商、导数对应相同阶的 B 样条, 即有

$$[x_i, \cdots, x_{i+k}]f = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+k}} B_{i,k}(t) \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} dt. \quad (2.2)$$

从分析学看, k 阶 B 样条可看成 k 阶差商的 Peano 核函数, 从几何上看, B 样条是两个多面体的体积比.

引理 1 (Hermite-Gennochi 公式) 给定区间 $[a, b]$ 的一个分划 π: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 假定 $f(x) \in C^n[a, b]$, 则有

$$[x_0, x_1, \cdots, x_n]f = \int_{S^n} f^{(n)}(t_0 x_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) dt_1 \cdots dt_n. \quad (2.3)$$

其中 s^n 是 n 维单纯形体

$$s^n=\left\{(t_1,\ \cdots,\ t_n)\ \middle|\ t_i\geqslant 0,\sum_{j=1}^{n}t_j\leqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\right\},$$

$$t_0=1-\sum_{j=1}^{n}t_j.$$

证明 $n=1$ 时 $s^1=[0,\ 1]$，(2.3)右端成为

$$\int_0^1 f'(t_0x_0+t_1x_1)dt_1=\int_0^1 f'(x_0+(x_1-x_0)t_1)dt_1=[x_0,x_1]f.$$

假设 $n=k-1$ 时(2.3)成立．按积分的定义(2.3)右端等于

$$\int_0^1 dt_1\int_0^{1-t_1}dt_2\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{k-1}}f^{(k)}(x_0t_0+\cdots+x_kt_k)dt_k$$

$$=\frac{1}{x_k-x_0}\Big[\int_{s^{k-1}}f^{(k-1)}(x_0+t_1(x_1-x_0)+\cdots+t_{k-1}(x_{k-1}-x_0)$$

$$+(x_k-x_0)(1-t_1-\cdots-t_{k-1}))dt_{k-1}\cdots dt_1$$

$$-\int_{s^{k-1}}f^{(k-1)}(x_0+t_1(x_1-x_0)+\cdots$$

$$+t_{k-1}(x_{k-1}-x_0))dt_{k-1}\cdots dt_1\Big],$$

上式右端第一个积分中，记 $t_k=1-\sum\limits_{j=1}^{k-1}t_j$，可写成

$$\int_{s^{k-1}}f^{(k-1)}(x_1t_1+\cdots+x_{k-1}t_{k-1}+x_kt_k)dt_{k-1}\cdots dt_1,$$

即等于 $[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k]f$．同理在第二个积分中，记

$$t_0=1-\sum_{j=1}^{k-1}t_j.$$

它等于 $\displaystyle\int_{s^{k-1}}f^{(k-1)}(x_0t_0+\cdots+x_{k-1}t_{k-1})dt_{k-1}\cdots dt_1$，

即 $[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k]f$，整理之，上面等式右端便等于 $[x_0,\ \cdots,\ x_k]f$．证毕．

由公式(2.2)，记 $f^{(k)}(t)=g(t)$，则有

$$\frac{1}{(x_{i+n}-x_i)(n-1)!}\int_{x_i}^{x_{i+n}} B_{i,n}(t)g(t)dt$$
$$=\int_{s^n} g(x_i t_0+\cdots+x_{i+n}t_n)dt_n\cdots dt_1,$$

其中 $t_0=1-\sum_{j=1}^{n}t_j$. 作变换

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x_i+(x_{i+1}-x_i)t_1+\cdots+(x_{i+n}-x_i)t_n,\\ y_2&=b_2+a_{21}t_1+\cdots+a_{2n}t_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n&=b_n+a_{n1}t_1+\cdots+a_{nn}t_n, \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

其中 a_{ij} 可以这样选取，使得关于 $t_1, \cdots, t_n$ 的系数行列式不等于 0. 线性变换(2.4)将 s^n 映成闭域 σ^n，即

$$\int_{s^n} g(x_i+(x_{i+1}-x_i)t_1+\cdots+(x_{i+n}-x_i)t_n)dt_1\cdots dt_n$$
$$=\int_{\sigma^n} g(y_1)\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\right|^{-1}dy_1\cdots dy_n,$$

上式令 $g\equiv1$，注意到 s^n 的体积 $\mathrm{Vol}(s^n)$ 等于 $\frac{1}{n!}$，便有

$$\frac{1}{(x_{i+n}-x_i)(n-1)!}\int_{x_i}^{x_{i+n}} B_{i,n}(t)g(t)dt$$
$$=\int_{\sigma^n} g(y_1)\frac{1}{n!\,\mathrm{Vol}(\sigma^n)}dy_1\cdots dy_n$$
$$=\int_{x_i}^{x_{i+n}}\frac{\mathrm{Vol}((y_1,\cdots,y_n)\in\sigma^n|y_1=t)}{n!\,\mathrm{Vol}(\sigma^n)}g(t)dt,$$

注意到 $g(t)$ 的任意性，便有

$$B_{i,n}(t)=\frac{(x_{i+n}-x_i)}{n}\cdot\frac{\mathrm{Vol}((y_1,\cdots,y_n)\in\sigma^n|y_1=t)}{\mathrm{Vol}(\sigma^n)}, \quad (2.5)$$

其中 σ^n 是由(2.4)所定义的多面体. 公式(2.5)称为 Curry-Schoenberg 关系式. 这个关系式被 de Boor 作了推广(1976年)，将它作为多元 B 样条的一种定义.