数学物理中的偏微分方程

Tyn Myint·U著　徐元钟译

上海科学技术出版社

数学物理中的偏微分方程

Tyn Myint-U 著
徐 元 钟 译

上海科学技术出版社

EN100/09

数学物理中的偏微分方程

Tyn Myint-U 著

徐 元 钟 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 11.375 字数 297,000

1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷

印数 1—15,000

书号: 13119·1103 定价: (科五) 1.80 元

序　言

偏微分方程理论已成为数学分析中最重要的研究领域之一，这主要是因为偏微分方程经常出现在物理学、工程技术和其它科学的许多分支之中。人们对这些偏微分方程已经作了广泛而且深入的研究，并出版了不少关于这方面的书籍。尽管有很多极好的教科书可供讲授之用，但我还是写了这本入门书，主要是想根据各种定解问题及其有关解法来展开讨论，并为所有学数学学科的学生提供一门适用的课程。因此，本书主要涉及的不是一般理论，而是教给学生有关偏微分方程的基本概念、基本原理和解偏微分方程的各种方法与技巧。

作者试图对分析各种问题中用到的数学知识作出清晰而简明的阐述。根据这种想法，作者对本书各章进行了仔细的安排，使得学生能够有条理地正确理解所学的内容。例如，对傅里叶级数和本征值问题两章中的那些定理，只要有可能就明确地直接提出，以免学生把这些定理与这些定理在偏微分方程原理的讨论中的运用混淆起来。为了加深学生的理解，本书包含了范围广泛的具有各种边界条件的数学物理问题。

本书的一部分内容是以作者在纽约曼哈顿学院的讲课内容为基础的。本书可作为应用数学、物理学、工程技术和其它学科的高年级学生或低年级研究生的教材。学习本书所需的预备知识是一般的微积分内容和常微分方程的基本知识。

第一章主要是关于偏微分方程的绪论。第二章讨论相应于一些物理现象的数学模型，而正是这些物理现象产生了三类基本的偏微分方程。第三章详细地叙述了两个自变量的二阶方程的分类，另外，说明了一类比较简单的方程的通解的求法。

在获得了一些关于偏微分方程的特征的知识以后，学生可以继续学习在第四章中介绍的柯西问题、阿达玛的例子和初值问题

的黎曼方法。第五章包含了关于傅里叶级数的简要但详尽的讨论，这对进一步学习偏微分方程是必不可少的。

分离变量法是求解偏微分方程的最简单而应用最广的方法之一。在第六章中叙述了分离变量法的基本概念以及应用这个方法时所必须的可分离性条件，然后逐个详细地分析了一些熟知的数学物理问题。第七章深入地论述了在前面一章中引进的本征值问题，另外对格林函数及其在本征值问题中的应用予以简单的介绍。

在第八章中介绍了边值问题和极值原理，而在第九章中论述更复杂的高维问题和本征函数法。第十章论述格林函数的基本概念、构造及其在边值问题中的应用。最后一章介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换的基本性质及技巧。

关于数学模型、傅里叶级数和本征值问题这三章都是独立的，因此对于已具备这些知识的学生来说，学习时可略去这几章。每章后的习题也是这本教材的组成部分，而且其中难易不等。大部分习题的答案在书末给出。想对本书内容作进一步了解的读者，可参阅本书末尾参考文献中开列的详尽书目。

（下为致谢部分，译略。）

Tyn Myint-U

哈里逊，纽约市

目　　录

第一章 绪　论

1.1 基本概念和定义

当一个微分方程除了含有几个自变量和未知函数外，还含有未知函数的一个或多个偏导数时，称为偏微分方程。一般说来，它可以写成包含几个自变量 $x, y, \cdots$ 和这些变量的未知函数 u 及其偏导数[注] $u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$的方程的形式

$$f(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{xy}, \cdots)=0。\qquad (1.1.1)$$

这里，方程(1.1.1)是在自变量 $x, y, \cdots$的 n 维空间 R^n 中的一个适当的区域 D 内进行考察的。我们要求能找出在 D 内恒满足方程(1.1.1)的那些函数 $u=u(x, y, \cdots)$。如果这种函数存在，那末称它们为方程(1.1.1)的解。从这些可能的解中，我们要选出一个满足某些合适的附加条件的特解来。

例如，

$$\begin{aligned}
&u u_{xy}+u_x=y,\\
&u_{xx}+2y u_{xy}+3x u_{yy}=4\sin x,\\
&(u_x)^2+(u_y)^2=1,\\
&u_{xx}-u_{yy}=0
\end{aligned}\qquad (1.1.2)$$

都是偏微分方程。容易验证下列两个函数

$$u(x, y)=(x+y)^3,$$
$$u(x, y)=\sin(x-y)$$

都是(1.1.2)的最后一个方程的解。

出现在方程中的未知函数的偏导数的最高阶数称为偏微分方程的阶。例如，方程

$$u_{xx}+2x u_{xy}+u_{yy}=e^y$$

[注] 未知函数的下标表示求偏导数运算，例如

$$u_x=(\partial u/\partial x),\quad u_{xy}=(\partial^2 u/\partial y\partial x)。$$

是一个二阶偏微分方程，而方程

$$u_{xxy}+x\,u_{yy}+8\,u=7\,y$$

是一个三阶偏微分方程。

如果一个偏微分方程对于未知函数及它的所有偏导数来说都是线性的，且方程中的系数都仅依赖于自变量，那末这样的偏微分方程就称为线性偏微分方程。如果一个偏微分方程对未知函数的最高阶导数来说是线性的，那末就称为拟线性偏微分方程。例如，方程

$$y\,u_{xx}+2\,xy\,u_{yy}+u=1$$

是一个二阶线性偏微分方程，而方程

$$u_x\,u_{xx}+xu\,u_y=\sin y$$

是一个二阶拟线性偏微分方程。一个偏微分方程不是线性方程，就称为非线性偏微分方程。

在本书中，我们将主要研究二阶线性偏微分方程，因为它们在数学物理问题中经常出现。最一般的 n 个自变量的二阶线性偏微分方程的形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i u_{x_i}+F\,u=G, \tag{1.1.3}$$

其中不失一般性，可假设 $A_{ij}=A_{ji}$，且可假设 A_{ij}，B_i，F 和 G 都是 n 个自变量 x_i 的函数。

如果 G 恒等于零，方程称为齐次方程；否则方程就称为非齐次方程。

n 阶常微分方程的通解是依赖于 n 个任意常数的一族函数。就偏微分方程来说，它的通解将依赖于任意函数而不是任意常数。为了说明这件事，我们考察二阶方程

$$u_{xy}=0。$$

如果我们把这个方程对 y 积分，而把 x 认为是固定的，就得到

$$u_x(x,\ y)=f(x)。$$

再把 y 认为是固定的，对 x 求第二次积分，得

$$u(x,\ y)=g(x)+h(y),$$

其中 $g(x)$ 和 $h(y)$ 都是任意函数。

假定 u 是三个变量 x, y 和 z 的函数，那末对于方程

$$u_{yy}=2,$$

我们可以得到通解

$$u(x, y, z)=y^2+yf(x, z)+g(x, z),$$

其中 f 和 g 都是两个变量 x 与 z 的任意函数。

我们回想在常微分方程情况下，首先的任务是确定一个通解，然后根据给定的条件求出任意常数的值来确定特解。但是，对偏微分方程来说，从偏微分方程的通解中选出满足附加条件的一个特解，可能和求通解一样困难，甚至比求通解更困难。这是因为在偏微分方程的通解中含有任意函数；我们要从通解中确定满足附加条件的特解，不是仅仅要确定任意常数，而是要确定这些任意函数。

对于 n 阶线性齐次常微分方程来说，n 个线性无关的解的线性组合仍是一个解。不幸的是就偏微分方程来说，这样的结论一般是不成立的。这是由于每一个线性齐次偏微分方程的解空间是无限维的函数空间。例如，偏微分方程

$$u_x-u_y=0 \tag{1.1.4}$$

经过变量变换

$$\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x-y,\end{cases}$$

能化成方程

$$2u_\eta=0。$$

它的通解是

$$u(x, y)=f(x+y),$$

其中 f 是处处可微的任意函数。由此可见下列函数

$$\left.\begin{array}{l}(x+y)^n,\\ \sin n(x+y),\\ \cos n(x+y),\\ \exp n(x+y)\end{array}\right. \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

中的每一个函数都是方程(1.1.4)的一个解，而且这些函数显然是线性无关的。象方程(1.1.4)这样一个简单的方程就有无限多个

解，它们的线性组合是否为解是要进一步加以讨论的。因此在研究偏微分方程时，必须克服这种困难。于是，我们一般宁愿直接来确定满足给定的附加条件的特解。

1.2 线性算子

本节将简单地讨论在偏微分方程的理论中经常遇到的线性算子。

算子是一种数学法则，把它作用在一个函数上时，便产生另外一个函数。例如，在下列表达式中：

$$L[u]=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

$$M[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$L=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3}{\partial y^3}$ 与 $M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 都称为微分算子。也有一些其他类型的算子，例如

$$P[u]=\int_a^b u(x,\ \tau)F(\tau,\ y)d\tau,\quad a,\ b\ \text{都是常数},$$

$$Q[u]=u(x,\ c)+u_x(x,\ c),\quad c\ \text{是常数},$$

其中算子 P 是一个积分算子，而算子 Q 是一个把两个自变量 x 和 y 的函数 u 变为一个自变量 x 的函数 $Q[u]$ 的算子。

两个微分算子称为是等价的，是指把每一个算子作用在函数 u 上时，会产生同样的结果，记为 $A=B$。此时对函数 u 有

$$A[u]=B[u], \tag{1.2.1}$$

其中 u 必须是充分可微的函数。

两个微分算子的和定义为

$$(A+B)[u]=A[u]+B[u], \tag{1.2.2}$$

其中 u 为函数。

两个算子 A 与 B 的积是这样一个算子，它作用于函数 u 的结果与算子 A 及 B 依次作用在 u 上的结果是相同的，即

$$AB[u]=A(B[u])。 \tag{1.2.3}$$

微分算子满足下列定律：

(1) 加法交换律：

$$A+B=B+A; \tag{1.2.4}$$

(2) 加法结合律：

$$(A+B)+C=A+(B+C); \tag{1.2.5}$$

(3) 乘法结合律：

$$(AB)C=A(BC); \tag{1.2.6}$$

(4) 乘法对加法的分配律：

$$A(B+C)=AB+AC; \tag{1.2.7}$$

(5) 乘法交换律：

$$AB=BA, \tag{1.2.8}$$

但乘法交换律仅对常系数微分算子成立。

【例 2.1】 设 $A=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $B=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-y\dfrac{\partial}{\partial y}$,

因而

$$B[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}AB[u]&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial y},\\BA[u]&=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-y\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\end{aligned}$$

于是，当 $x\neq 0$ 时，$AB[u]\neq BA[u]$。

我们定义具有下列性质的算子为线性算子：

(1) 常数 c 可以从算子中提取出来：

$$L[cu]=cL[u]。$$

(2) 算子作用于两个函数之和所得的结果等于算子分别作用于两个函数所得结果之和：

$$L[u+v]=L[u]+L[v]。$$

性质(1)与(2)可以组合起来表示为

$$L[au+bv]=aL[u]+bL[v], \tag{1.2.9}$$

其中 a 与 b 都是常数。

现在让我们来考察二阶线性偏微分方程。就两个自变量来说，这种方程的形式为

$$A(x, y)u_{xx}+B(x, y)u_{xy}+C(x, y)u_{yy}+D(x, y)u_x$$
$$+E(x, y)u_y+F(x, y)u=G(x, y), \tag{1.2.10}$$

其中系数 A, B, C, D, E, F 都是变量 x 与 y 的函数，$G(x, y)$ 是非齐次项。

如果取线性微分算子 L 为

$$L=A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\frac{\partial}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial y}+F,$$

那末偏微分方程(1.2.10)可以写成下列形式

$$L[u]=G。 \tag{1.2.11}$$

我们经常略去方括号，把上式简写为

$$Lu=G。$$

1.3 定解问题

一个*定解问题*就是求偏微分方程满足适当附加条件的解的问题。这些条件可以是初始条件或是边界条件。例如

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x, 0)=\sin x, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0,\ t\geqslant 0\end{cases}$$

是一个定解问题，它由一个偏微分方程和三个附加条件所组成。这个方程描述一长度为 l 的杆的热传导现象，后面两个条件称为*边界条件*，它们描述了在给定的两个边界点上的函数值。第一个条件称为*初始条件*，它给定了未知函数 $u(x, t)$ 在某一初始时刻 t_0(现在的情形是 $t_0=0$)在已给区域上的值。这个定解问题称为*初边值问题*。从数学上说，时间和空间坐标都可以认为是自变量。但初始条件仅在 t 轴上的一点处给定，而边界条件在这种情形下，却

在 x 轴上的两点处给定。初始条件通常在某一确定的初始时刻 $t=t_0$ 或 $t=0$ 处给出，而不在已给的时间间隔的终点处加以考虑。

在许多情况下，在边界上除了可给出未知函数值外，还可给出其他条件，象未知函数的导数值等。

在考察无界区域的问题时，解能够仅由满足给定的初始条件而唯一确定。这种定解问题称为*初值问题*[注]。这种问题的解在物理上可以看作是在无穷远处的边界条件对它不起影响的解。以后我们还将讨论解在无穷远处的性态要保持有界的那一类问题。

一个定解问题称为是*适定的*，如果它满足下列要求：

(1) 存在性：至少有一个解；

(2) 唯一性：至多有一个解；

(3) 稳定性：解连续依赖于给出的已知数据。

第一个要求是一个显然合乎逻辑的要求。但是我们必须记住，我们不能简单地认为，正因为物理问题有解，所以定解问题也有解。关于唯一性的要求也一样。物理问题可以有唯一解，但定解问题的解可以多于一个。

最后的要求也是一个必需的要求。实际上，在测量的过程中会出现微小的误差。因此对表示一个物理现象的定解问题来说，给定的数据的微小变化最多只能产生解的微小变化。

1.4 迭加原理

设一线性偏微分方程具有下列形式

$$L[u]=G,$$

我们也可用算子的记号来表示附加条件。例如，我们可以定义

$$[u_x]_{x=0}=M_i[u],$$
$$[u]_{x=l}=M_j[u],$$

其中算子 M_i, M_j 是表示附加条件的线性算子。于是初边值问题可以写为

[注] 关于初值问题的严格数学定义将在本书第四章中给出。