离散数学

祝颂和　陆诗娣
陈建明　曾　明　编

西安交通大学出版社

离散数学

祝颂和　陆诗娣　陈建明　曾明　编

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了"离散数学"中集合论、代数系统、图论及数理逻辑的基本内容，符合计算机专业后继课程的需要。编写中力求内容精炼，重点突出、深入浅出。为了适应第五代计算机对数理逻辑的特殊要求，书中加强了数理逻辑部分的内容和深度。

本书可作为高等院校计算机专业、自控专业、应用数学与计算数学专业等本科及专科"离散数学"课程的教材或参考书，也可供有关科技人员和自学者参考。

(陕)新登字 007 号

离 散 数 学

祝颂和　陆诗娣　陈建明　曾明　编

责任编辑　王延华

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市咸宁西路 28 号　邮政编码:710049　电话:(029)3268316)

西安电子科技大学印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:850×1168　1/32　印张:12.25　字数: 311 千字

1991 年 12 月第 1 版　　1996 年 5 月第 3 次印刷

印数: 6001—10000

ISBN 7-5605-0435-3 / O·75　　定价: 10.00 元

前　言

本教材是根据原教育部委托吉林大学编写的计算机软件专业《离散数学》的教学大纲和对我校计算机专业、自控专业、应数及计数专业、教改班等的教学实践，在自编讲义的基础上进行修改编写而成的。

本教材由集合论、代数系统、图论、数理逻辑四部分组成。适用于理工科大学计算机专业，也可供其他专业使用。

在教材内容的安排上，力求做到选材既能满足计算机专业后继课程的需要，又比较精炼。同时，考虑到第五代计算机对数理逻辑的要求，在教材中加强了数理逻辑部分，而且在形式推理部分采用了比较严格的符号规则，避开了 P 规则和 T 规则。我们认为这样的处理便于读者清楚地理解和掌握数理逻辑的形式推理过程。讲授本教材约需课内 80—108 学时，其中集合论中的基数部分、群中陪集的概念及有关内容、布尔代数中原子及布尔表达式概念，Euler 图中的中国邮路问题、Hamilton 图中的货郎担问题及谓词演算部分可根据学时数多少及教学要求进行取舍。

本书中集合论（一、二、三章）由祝颂和编写，代数系统（四、五章）由陈建明编写，图论（六、七章）由陆诗娣编写，数理逻辑（八、九章）由曾明编写。

西北工业大学张遵濂教授审阅了全部书稿并提出了宝贵的意见。在此，我们向他致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者提出批评意见。

编　者　1991 年 5 月

目　录

第一章 集 合

§1 基本概念

集合,简称集。数学和计算机科学中大量的概念都是直接或间接地用集合来定义的,但是集合本身却很难用自然语言说清楚。

先看看几位名家对集合这个概念的描述。

莫斯科大学 II. Hamancon 教授说:凡具有某种特殊性质的对象的汇集、总合,称之为集。

陈建功教授说:凡可供吾人思维的,不论它有形或无形,都叫做物。具有某种条件的物,称它们的全部,谓之一集。

杨宗磐教授说:集就是“ 乌合之众 ”;不考虑怎样“乌合”起来的,“众”可以具体,可以抽象。

被尊为集合论之父的 G. Cantor 说:集是由总括某些个体成一个整体而产生的;对于每个个体,只设其可为思考对象,辨别它的异同,个体之间并不需要有任何关系。

以上各种说法并没有说清楚什么是集合。事实上,用来界定集合概念的概念,如“汇集”、“总合”、“全部”、“乌合之众”、“整体”等概念,它们和集合概念一样说不清楚,或者说集合概念和它们一样清楚。

集合,在本书中将作为一个自明的元概念出现,它不被别的概念界定,而是用来定义其它概念的概念。如果我们要描写一下对集合的认识,那末集合是这样的一个“东西”:一个集合把世间万物(一切客体、个体)分成两类,一些客体属于该集,是组成这个集合的成员,另一些客体不属于该集(这里对客体并没有什么限制,甚

至客体也可以是一个集合)。

这样,在谈论集合时,我们先天地接受了两件事:一件是集合概念,即集合的存在;另一件是集合由一些客体组成,这些客体被称作该集合的成员。也就是说,由于一个集合的存在,世上的客体可分辨地分成两类:世上任一个客体或者属于该集,或者不属于该集,二者必居其一,也只居其一。

设 A 为一集合,a 为某一客体,那么有且只有下述两种情况之一发生:

1) a 是 A 的成员。记作

$$a \in A$$

读成"a 属于 A",或"a 在集合 A 中",或"a 是集合 A 的成员",或"a 是集合 A 的元素"。其中符号 $\in$ 是希腊字 εστι(是)的第一个字母,用 $\in$ 表示个体与集合之间的隶属关系,意大利数学家 G. Peano 首先这样做。

2) a 不是 A 的成员。记作

$$a \overline{\in} A$$

读成"a 不属于集合 A"或"a 不在集合 A 中",或"a 不是集合 A 的成员",或"a 不是集合 A 的元素"。

关于集合的几点注记:

1. **集合的表示** 无论用什么方式表示一个集合,总是以界定其成员为准,以能明确地分辨世上个体与该集合的隶属关系为准。这里常用花括号描述集合。

1) 文字描述 例如:

{奇数}

{闭区间[0,1]上的连续函数}

{PC 机上的 BASIC 程序}

2) 罗列 把集合的全体成员都在花括号内罗列出来,例如:

$\{-3,0,16,9\}$

{风,马,牛}

$$\{5,6,7,8,9,10,11,\cdots\}$$

其中第二个例子是杨宗磐先生在他的著作《数学分析入门》中举出的，它指出集合的元素还可以是一个集合，它指出一个集合的元素之间可以毫无关系，它诙谐地为我们认识集合概念提供了有益的启发。第三个例子在花括号弧中使用了省略号"…"，其含义是明确的。也只有在含义明确的时候可以在花括号里使用省略号。比方说

$$\{3,\sqrt{2},\text{眼镜},\cdots\}$$

它虽有花括号的形式，而省略号所示则不知所云，人们无法分辨世上的个体与它的从属关系，因而它没有表示出一个集合来。

3） 谓词表示　其一般形式为

$$\{x \mid P(x)\}$$

它表示具有属性 P 的 x 的全体所成之集。$P(\quad)$是谓词，也叫入集条件，不同于函数。例如

$$\{x \mid x^2-4x+3=0\}$$

$$\{P \mid P\text{ 是 0530 机上用汇编语言写的程序}\}$$

$$\{n \mid n\text{ 是 14 的倍数且不大于 100}\}$$

下一节引入集合的运算之后，集合还常常通过表达式的形式出现。

2.　可以给集合起名字　集合的名字往往用拉丁文的字母或字母再添加下标，一个集合也可以取几个不同的名字。

两个集合 A 和 B 相等，记作

$$A=B$$

是指它们有完全相同的元素。或者说，凡是集合 A 的元素都是集合 B 的元素，而且凡是集合 B 的元素也都是集合 A 的元素。或者说，二集合 A 与 B 相等，实际上 A 与 B 是同一集合，A 和 B 是同一集合但起了两个名字。

下面的两个集合等式成立：

$$\{a,b,c\}=\{b,a,c\}$$

$$\{a,a,b\} = \{a,b\}$$

这是因为等号两边的集合有完全相同的元素。这两个等式提醒我们：用花括号罗列集合元素，并不意味着集合元素有序位的关系，也没有元素序位的暗示；一个元素在花括号中重复出现，与一个元素仅出现一次等效。

3. 空集 即没有成员的集合，记作$\varnothing$。采用逻辑符号语言，空集可描述如下：

$$\forall x(x \overline{\in} \varnothing)$$

当然，空集是唯一的。因为若有两个空集，则它们有完全相同的元素（即它们都没有元素），所以它们是同一个集合。

4. 全集 即我们研究的全部客体所成的集合。一般地说，我们所需的研究对象并不是“世间万物”，而仅仅是其中的一部分，甚至是很少的一部分。例如高等数学里所说的数是指实数，复变函数的数是指复数。在具体的技术科学中，研究对象常常是具体的，研究对象的全体是自然形成的。

指出全集，是给个体（研究对象）划定适当的范围。这样，通常不会出现{风，马，牛}这样的集合。

5. 单元素集合 是指只有一个元素的集合。例如，张三攻关小组是一个集合（集体），当时组内只有张三一个人。于是这个小组可写成{张三}，而张三是小组的成员，

$$\text{张三} \in \{\text{张三}\}$$

这是个体与集合之间的关系，绝不因为单元素集合只有一个成员而失去集合的身份。

又例如，集合$\{\varnothing\}$是一单元素集，它的唯一成员是空集$\varnothing$，

$$\varnothing \in \{\varnothing\}$$

从属关系符号$\in$的左右两边都是集合，左边是空集，它没有成员，右边是以空集为唯一成员的单元素集合。

设A及B为二集合，则A、B间有且只有下列四种情况发生：

1) $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

2) $\forall x(x\in B\Rightarrow x\in A)$

3) $\forall x(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$

4) $\exists x(x\in A\wedge x\overline{\in}B)\wedge\exists y(y\overline{\in}A\wedge y\in B)$

在情况 1)，集合 A 的成员都是 B 的成员，集合 A 是 B 的一部分，这时称 A 为 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B$$

也称集合 A 含于集合 B 中，或 B 含有 A 或 B 包含 A。

这样，每一个集合都是自己的子集，$A\subseteq A$。如果 A 是 B 的子集，且 A 与 B 又不相等，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$。

情况 2)，集合 B 是 A 的一部分，B 是 A 的子集，A 包含 B。

情况 3)，二集合 A 与 B 互为子集，$A\subseteq B\wedge B\subseteq A$，集合 A 是 B 的一部分，集合 B 也是 A 的一部分，即二集合 A 与 B 有完全相同的元素，即

$$A=B$$

情况 4)反映的二集合的关系殊为松散，我们很难为它说些什么。

集合之间的子集包含关系，下列定理明显是成立的。

定理 1 设 A、B、C 为任意的三个集合，那么

1) 自反 $A\subseteq A$

2) 反对称 $A\subseteq B\wedge B\subseteq A\Rightarrow A=B$

3) 传递 $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

定理 2 空集是任一集合的子集。

证 设 A 为任一集合，为了证明空集 $\varnothing$ 是 A 的子集，只要证明"凡是 $\varnothing$ 的成员都是 A 的成员"。既然空集 $\varnothing$ 没有成员，上述断言自然成立。 ▮[注]

如果我们是在全集 X 中考虑问题，设 A 是任一集合，那末有

[注] ▮称为 Halmos 竖记号，表示证明结束。

$A \subseteq X$，连同定理 2，可知有

$$\varnothing \subseteq A \subseteq X$$

定义 1 设 A 为任一集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集**，记作 2^A。

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

幂集是以集合为成员的集合；A 的幂集有两个当然的成员，即空集 $\varnothing$ 及集合 A 本身。

例 1 $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$

空集是没有成员的集合，但空集的幂集不是空集，它是以空集为唯一成员的集合。

例 2 $A = \{1,2,3\}$

$$2^A = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{1,2,3\}\}$$

当 A 的成员只有有穷个时，它的幂集都可以这样写出来。在这个例子中，我们还发现下面的事实：

1） 1 是 A 的成员，1 不是 2^A 的成员；

2） A 是 2^A 的成员，A 不是 2^A 的子集；

3） 1 是 A 的成员，1 不是 A 的子集。

上面的事实指出集合概念与个体概念是有层次差别的，前面谈单元素集合时已有所涉及。在使用从属关系符 $\in$ 和子集包含关系符 $\subseteq$ 时，应审查一下关系符两边的对象是否合适。

定义 2 当集合 A 的元素只有有穷个时，称集合中元素的个数为 A 的**基数**，记作 $|A|$。

基数是一个非负整数，如 $|\varnothing| = 0$，$|2^{\varnothing}| = 1$。当 $A \neq \varnothing$ 时，注意到幂集成员出场的次序，注意到中学代数里的二项式定理，下面的结论是明显的。

定理 3 设集合 A 的元素是有穷个，那末

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

为什么把一切子集所成的集合称为幂集，定理 3 提供了一种解释。

§2 集合代数

集合代数即集合的运算，本节介绍三种主要的集合运算：集合的补运算，二集合的并运算，二集合的交运算；然后介绍由这几个运算派生的宏运算。补运算是单目运算，并运算和交运算是双目运算。

这里的集合运算，都是在一个全集 X 中进行的，即集合运算是指 X 的子集之间的运算，运算的结果仍是 X 的一个子集，这就是所谓运算的封闭性。

定义 1 设 $A\subseteq X$，那末

$$A' = \{x|x \in X \wedge x \overline{\in} A\}$$

称 A' 为 A 的**补集**。

在一个集合的名字的右肩上加撇，是集合的补运算，它是一个单目运算。当我们对全集的印象已经深刻时，可以直接把补集写成

$$A' = \{x|x \overline{\in} A\}$$

A 的补集是一切不属于 A 的个体组成的集合。

定理 1 设 A、B 为任意集合，那末

1） $(A')' = A$

2） $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$

2′） $A=B\Rightarrow A'=B'$

3） $X'=\varnothing$

4） $\varnothing'=X$

证 1） 集合 A 把 X 中的个体分成两种，或属于 A，或不属于 A，二者必居其一，也只居其一。所以不是不属于 A 的个体，必为 A 的成员，因此 $(A')'=A$。

2） 已知 $A\subseteq B$，任取 $x\in B'$，证明 $x\overline{\in} A$。用反证法。假若此 $x\in A$，由于 $A\subseteq B$，则有 $x\in B$，从而有 $x\overline{\in} B'$，这与 x 的来历相冲突。因而只好 $x\overline{\in} A$，所以 $x\in A'$。鉴于 x 的任意性，即有 $B'\subseteq A'$。

2′） 既有$A=B$，即知$A\subseteq B$且$B\subseteq A$。由2）有$B'\subseteq A'$且$A'\subseteq B'$，从而$A'=B'$。

3） 我们是在X中考虑问题，所有个体都是X的成员，故不属于X的个体不存在，即X的补集为空集，即$X'=\varnothing$。

4） 由3），$X'=\varnothing$；由2′），$(X')'=\varnothing'$；由1），$\varnothing'=X$ ∎

集合代数的两个双目运算，并和交是基本的，也是最重要的。

定义2 设A、B为二集合，

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$$

分别称为A与B的**并集**和**交集**。

由上述定义可知：A与B的并集$A\cup B$的成员x，它至少是A和B中一个集合的成员；A与B的交集$A\cap B$的成员x，它必须是A和B中每一个集合的成员。

例1 设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，那末

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$$

$$A\cap B=\{1,3\}$$

定理2 设A,B,C为任意集合，那末

1） 幂等律

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A$$

2） $A\cup A'=X,\quad A\cap A'=\varnothing$

2′） $A\cup X=X,\quad A\cap X=A$

2″） $A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing$

3） $A\subseteq A\cup B,\quad A\cap B\subseteq A$

3′） $A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$

$$C\subseteq A\wedge C\subseteq B\Rightarrow C\subseteq A\cap B$$

4） 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A;$$

5） 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

6) 分配律——第一分配律和第二分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

在集合论的开始阶段，讨论问题的工具极为简单，只有集合及个体概念，集合与个体的从属关系，集合与集合的包含和相等关系，以及集合运算的定义。到现在为止，证明定理仅有上述这些手段，因此证明的方式甚为单调，其情况大体反映在定理 1 的证明中。在证明定理 2 时，方法也大致雷同。

这里只证明 6)的第一个公式，即集合交、并运算的第一分配律。其余命题的证明从略，留作习题。

证 设 $a\in A\cap(B\cup C)$，那末

$$a\in\{x|x\in A\wedge x\in B\cup C\}$$

由并运算的定义知，或者 a 属于 A 同时 a 属于 B，或者 a 属于 A 同时 a 属于 C，即

$$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

从而

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad (*)$$

另一方面，由 3)，有

$$A\cap B\subseteq A$$

$$A\cap B\subseteq B\subseteq B\cup C$$

故由 3′)，有

$$A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)$$

同理，

$$A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C)$$

由 3′)，即知

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C) \qquad (**)$$

比较(*)及(* *)，即得所欲证者。 ▮

本节的定理 1 及定理 2 是集合代数中两个最基本、最重要的

一揽子命题群。在证明它们的正确性时，我们只能使用原始的办法，但当定理 1 及定理 2 被确认后，我们对集合及集合运算的认识深化了，手段也多了。

定理 3(de Morgan 律) 设 A、B 为任意集合，那末

1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

证 先证 2)。由于

$$A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B$$

故由定理 1 的 2)，

$$A'\subseteq(A\cap B)',\quad B'\subseteq(A\cap B)'$$

由定理 2 的 3′)，即有

$$A'\cup B'\subseteq(A\cap B)' \qquad (*)$$

另一方面，任取 $x\in(A\cap B)'$，即 $x\overline{\in}A\cap B$。这就是说 x 不能同时既为 A 的成员又是 B 的成员；也就是说 x 或者不是 A 的成员，或者不是 B 的成员，即 $x\in A'\cup B'$，由 x 的任意性，有

$$(A\cap B)'\subseteq A'\cup B' \qquad (**)$$

比较(*)及(**)，即知

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

下面再证明 1)。既然 2)中的 A 及 B 是任意的，我们取 A 为 B'，取 B 为 A'，即末 2)的公式为

$$(A'\cap B')'=A''\cup B''$$

由定理 1，即得

$$A\cup B=(A'\cap B')'$$

对上述等式的等号两边的集合都取补集，得

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

此即定理 3 的 1)。 ▮

定理 4 下面的三种说法是等价的：

1) $A\subseteq B$

2) $A\cup B=B$