

高等工科院校自学函授教材

GAODENG GONGKE YUANXIAO ZIXUE HANSHOU JIAOCAI

# 工程数学

下册

概率统计与复变函数

同济大学函授数学教研室

蔡杰儿 潘承毅 郭景德 编

中国

建筑工业出版社



TB11

C08

348415

高等工科院校自学函授教材

# 工 程 数 学

下 册

概率统计与复变函数

同济大学函授数学教研室  
蔡杰儿 潘承毅 郭景德 编

中国建筑工业出版社

本书是按照全国工科函授数学研究组讨论制定的“全国工科函授《工程数学》教学基本要求”（初稿）编写的。全书分上、下两册。上册包括“线性代数”及“数理方程”，下册包括“概率统计”及“复变函数”。

本书为下册，其中概率统计包括：随机事件与概率、随机变量及其概率分布与数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计、假设检验等；复变函数包括：复变函数的基本概念、解析函数、保角映射、复变函数的积分、级数、留数等。

全书内容考虑了自学和函授的特点，编写时尽量将内容安排得由浅入深，循序渐进。对较难理解的问题作了详细的阐述，并增加较多的例题，以便自学，每章后均有内容小结和复习思考题，分阶段有测验作业题；书后还附有习题及复习思考题答案等，可供读者参考。

本书可供高等工科院校工业与民用建筑及其他各类成人教育专业作为工程数学课程自学、函授教材，也可供全日制工科大学生或工程技术人员作为参考书。

高等工科院校自学函授教材

工 程 数 学

下 册

概率统计与复变函数

同济大学函授数学教研室

蔡杰儿 潘承毅 郭景德 编

\*

中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）

新华书店经销

中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

\*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：23 字数：560 千字

1991年6月第一版 1991年6月第一次印刷

印数：1—3,700册 定价14.05元

ISBN7-112-01093-4/TU·794

(6165)

0042/10  
前言

《工程数学》是高等工科院校，继《高等数学》后开设的又一门重要的数学基础课。它结合工程技术和专业的需要，也是一门应用性较强的课程。在我校多年来从事《工程数学》课程的函授教学基础上，参考全国理工科函授数学研究组讨论制定的“全国工科函授《工程数学》教学基本要求”（初稿），我们组织编写了这套《工程数学》函授自学教材。

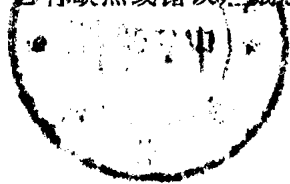
本书分上、下两册，包括“线性代数”、“数理方程”、“概率统计”和“复变函数”等四篇内容。各专业可以根据不同的要求而选学其中的某些部分，而其余部分可供读者自学或查阅。每篇内容的教学（包括自学）时数均为120小时左右。书中打△的章节已超出教学基本要求，可以不作为必读的内容，仅供有关专业选用。

考虑到本书主要是供函授生自学用的教材，在编写时尽量注意做到：由浅入深，文字通顺，条理清楚，叙述详尽，例题较多，便于自学。在每章末均有内容小结，并附有适量的习题及复习思考题；按阶段配备有测验作业题；书后还附有习题及复习思考题答案或少量的题解，可供读者参考。

本书上册中“线性代数”由周忆行和郭景德编写，经骆承钦副教授审阅；“数理方程”由刘浩荣编写，在我校原有函授教材基础上，为了使函授与日校教学相接近，故部分材料选用于本校桂子鹏和康盛亮编著的《数学物理方程》，经黄烈德教授审阅。

下册中“概率统计”由蔡杰儿和潘承毅编写，曾得到了何迎晖同志的热情帮助，并由潘承毅副教授审阅；“复变函数”由郭景德编写，经谈祝多副教授审阅。组织审查出版过程中还得到了我校函授学院副院长叶书麟教授等领导同志的关怀与重视。在此，我们谨对所有给予本书出版工作支持与帮助的同志们表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中必有缺点或错误，诚恳地欢迎读者批评指正。



# 目 录

## 前 言

## 第三篇 概 率 统 计

|                   |    |
|-------------------|----|
| 第十一章 随机事件与概率      | 3  |
| 第一节 随机试验和随机现象     | 3  |
| 第二节 随机事件          | 4  |
| 一、样本空间            | 4  |
| 二、随机事件            | 4  |
| 三、事件之间的关系及运算      | 5  |
| 第三节 概率与频率         | 8  |
| 一、古典型概率           | 8  |
| 二、几何型概率           | 11 |
| 三、频率与概率的统计定义      | 13 |
| 第四节 概率的定义及性质      | 14 |
| 第五节 条件概率          | 16 |
| 一、条件概率            | 16 |
| 二、全概率公式           | 18 |
| 三、贝叶斯公式           | 20 |
| 第六节 独立性与二项概率公式    | 21 |
| 一、独立性             | 21 |
| 二、二项概率公式          | 23 |
| 习题十一              | 26 |
| 内容摘要              | 28 |
| 复习思考题十一           | 31 |
| 测验作业题七            | 32 |
| 第十二章 随机变量及其概率分布   | 33 |
| 第一节 随机变量          | 33 |
| 第二节 离散型随机变量的概率分布  | 34 |
| 第三节 随机变量的分布函数     | 38 |
| 第四节 连续型随机变量及其分布密度 | 40 |
| 第五节 随机变量的函数的分布    | 48 |
| 一、离散型随机变量的函数的分布律  | 49 |
| 二、连续型随机变量的函数的分布   | 49 |
| 习题十二              | 51 |
| 内容摘要              | 53 |
| 复习思考题十二           | 56 |

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 第十三章 二维随机变量及其概率分布 .....               | 57  |
| 第一节 二维随机变量及其分布 .....                  | 57  |
| 一、二维离散型随机变量及其分布律 .....                | 58  |
| 二、二维连续型随机变量及其分布密度 .....               | 59  |
| 第二节 边缘分布 .....                        | 60  |
| 一、离散型的边缘分布律 .....                     | 61  |
| 二、连续型的边缘分布密度 .....                    | 62  |
| 第三节 随机变量的独立性 .....                    | 64  |
| 第四节 二维随机变量的函数的分布 .....                | 67  |
| 一、离散型随机变量的函数的分布 .....                 | 67  |
| 二、连续型随机变量的函数的分布 .....                 | 68  |
| 习题十三 .....                            | 75  |
| 内容摘要 .....                            | 76  |
| 复习思考题十三 .....                         | 79  |
| 测验作业题八 .....                          | 79  |
| 第十四章 随机变量的数字特征 .....                  | 81  |
| 第一节 数学期望 .....                        | 81  |
| 一、数学期望的概念 .....                       | 81  |
| 二、随机变量的函数的数学期望 .....                  | 83  |
| 三、数学期望的性质 .....                       | 86  |
| 第二节 方差 .....                          | 87  |
| 一、方差的概念 .....                         | 87  |
| 二、方差的性质 .....                         | 89  |
| 第三节 协方差和相关系数 .....                    | 91  |
| 一、协方差 .....                           | 91  |
| 二、相关系数 .....                          | 93  |
| 习题十四 .....                            | 96  |
| 内容摘要 .....                            | 98  |
| 复习思考题十四 .....                         | 100 |
| 第十五章 大数定律和中心极限定理 .....                | 101 |
| 第一节 大数定律 .....                        | 101 |
| 第二节 中心极限定理 .....                      | 105 |
| 习题十五 .....                            | 107 |
| 内容摘要 .....                            | 107 |
| 复习思考题十五 .....                         | 108 |
| 测验作业题九 .....                          | 109 |
| 第十六章 数理统计的基本概念 .....                  | 110 |
| 第一节 总体与样本 .....                       | 110 |
| 第二节 经验分布函数与直方图 .....                  | 112 |
| 第三节 $\chi^2$ 分布, $t$ 分布及 $F$ 分布 ..... | 115 |
| 一、 $\chi^2$ 分布 .....                  | 115 |
| 二、 $t$ 分布 .....                       | 117 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 三、 $F$ 分布 .....            | 118 |
| 第四节 统计量及其分布 .....          | 119 |
| 习题十六 .....                 | 123 |
| 内容摘要 .....                 | 124 |
| 复习思考题十六 .....              | 125 |
| 第十七章 参数估计 .....            | 126 |
| 第一节 参数估计问题 .....           | 126 |
| 第二节 矩法与极大似然法 .....         | 127 |
| 一、矩法 .....                 | 127 |
| 二、极大似然法 .....              | 128 |
| 第三节 估计量的评选标准 .....         | 133 |
| 一、无偏性 .....                | 133 |
| 二、一致性 .....                | 134 |
| 第四节 正态总体中均值与方差的置信区间 .....  | 135 |
| 一、一个正态总体的情形 .....          | 136 |
| 二、两个正态总体的情形 .....          | 140 |
| 第五节* 0-1分布参数的置信区间 .....    | 142 |
| 习题十七 .....                 | 143 |
| 内容摘要 .....                 | 144 |
| 复习思考题十七 .....              | 148 |
| 第十八章 假设检验 .....            | 149 |
| 第一节 假设检验问题 .....           | 149 |
| 第二节 一个正态总体的假设检验 .....      | 151 |
| 第三节 两个正态总体的假设检验 .....      | 154 |
| 第四节* 单边假设检验 .....          | 156 |
| 第五节* $\chi^2$ 拟合优度检验 ..... | 160 |
| 习题十八 .....                 | 163 |
| 内容摘要 .....                 | 164 |
| 复习思考题十八 .....              | 167 |
| 测验作业题十 .....               | 168 |

## 第四篇 复 变 函 数

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 第十九章 复数 .....       | 173 |
| 第一节 复数和它的表示方法 ..... | 173 |
| 一、复数的概念及其几何表示 ..... | 173 |
| 二、复数的三角和指数表示式 ..... | 175 |
| 第二节 复数的运算 .....     | 176 |
| 一、复数的四则运算 .....     | 176 |
| 二、复数的乘幂和方根 .....    | 178 |
| 三、共轭复数 .....        | 180 |
| 第三节 复平面上的曲线方程 ..... | 181 |
| 习题十九 .....          | 183 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 内容摘要 .....                 | 183 |
| 复习思考题十九 .....              | 185 |
| 第二十章 复变函数 .....            | 186 |
| 第一节 复变函数的概念 .....          | 186 |
| 一、区域的概念 .....              | 186 |
| 二、复变函数的定义 .....            | 188 |
| 第二节 复变函数的极限和连续性 .....      | 189 |
| 一、复变函数的极限 .....            | 189 |
| 二、复变函数的连续性 .....           | 192 |
| 第三节 初等函数 .....             | 193 |
| 一、指数函数 $e^z$ .....         | 193 |
| 二、对数函数 $\text{Ln} z$ ..... | 194 |
| 三、幂函数 $z^\alpha$ .....     | 197 |
| 四、三角函数和反三角函数 .....         | 199 |
| 五、双曲函数和反双曲函数 .....         | 201 |
| 习题二十 .....                 | 202 |
| 内容摘要 .....                 | 202 |
| 复习思考题二十 .....              | 204 |
| 第二十一章 解析函数 .....           | 205 |
| 第一节 复变函数的导数和解析函数 .....     | 205 |
| 一、复变函数的导数 .....            | 205 |
| 二、解析函数的概念 .....            | 208 |
| 第二节 解析函数的充要条件 .....        | 209 |
| 一、函数在区域内解析的充要条件 .....      | 209 |
| 二、某些初等函数的解析性和求导公式 .....    | 214 |
| 第三节 解析函数和调和函数的关系 .....     | 215 |
| 第四节 导数的模和幅角的几何意义 .....     | 218 |
| 习题二十一 .....                | 220 |
| 内容摘要 .....                 | 221 |
| 复习思考题二十一 .....             | 223 |
| 测验作业题十一 .....              | 223 |
| 第二十二章 初等函数构成的保角映射 .....    | 225 |
| 第一节 保角映射 .....             | 225 |
| 一、保角映射的定义 .....            | 225 |
| 二、几类简单的保角映射 .....          | 225 |
| 第二节 分式线性映射 .....           | 230 |
| 一、分式线性映射的保角性 .....         | 230 |
| 二、保圆性和保对称性 .....           | 230 |
| 三、映射区域的确定方法 .....          | 233 |
| 四、唯一确定分式线性映射的条件 .....      | 235 |
| 五、两个基本分式线性映射 .....         | 237 |
| 第三节 幂函数和指数函数所构成的映射 .....   | 240 |

|                                           |            |
|-------------------------------------------|------------|
| 一、幂函数 $w = z^n$ 和 $w = \sqrt[n]{z}$ ..... | 240        |
| 二、指数函数 $w = e^z$ .....                    | 244        |
| 三、综合举例 .....                              | 247        |
| 习题二十二 .....                               | 252        |
| 内容摘要 .....                                | 253        |
| 复习思考题二十二 .....                            | 254        |
| <b>第二十三章 复变函数的积分</b> .....                | <b>256</b> |
| 第一节 复变函数积分的概念与计算 .....                    | 256        |
| 一、积分的定义和性质 .....                          | 256        |
| 二、积分的计算方法 .....                           | 257        |
| 第二节 积分基本定理及其推广 .....                      | 261        |
| 一、柯西—古萨 (Cauchy—Coursat) 定理 .....         | 261        |
| 二、解析函数积分的计算方法 .....                       | 262        |
| 三、复合闭路定理 .....                            | 266        |
| 第三节 柯西积分公式及高阶导数公式 .....                   | 269        |
| 一、柯西积分公式 .....                            | 269        |
| 二、解析函数的高阶导数 .....                         | 273        |
| 习题二十三 .....                               | 276        |
| 内容摘要 .....                                | 277        |
| 复习思考题二十三 .....                            | 279        |
| 测验作业题十二 .....                             | 280        |
| <b>第二十四章 级数</b> .....                     | <b>282</b> |
| 第一节 复数项级数 .....                           | 282        |
| 一、级数的概念 .....                             | 282        |
| 二、级数收敛的充要条件 .....                         | 283        |
| 第二节 幂级数 .....                             | 285        |
| 一、幂级数的收敛圆与收敛半径 .....                      | 285        |
| 二、收敛半径的求法 .....                           | 286        |
| 三、幂级数的运算和性质 .....                         | 289        |
| 第三节 函数展开成幂级数 .....                        | 290        |
| 一、解析函数的泰勒 (Taylor) 级数 .....               | 290        |
| 二、函数展开成幂级数的方法 .....                       | 293        |
| 第四节 罗伦 (Laurent) 级数 .....                 | 295        |
| 一、罗伦级数 .....                              | 295        |
| 二、函数展开成罗伦级数 .....                         | 296        |
| 习题二十四 .....                               | 303        |
| 内容摘要 .....                                | 303        |
| 复习思考题二十四 .....                            | 305        |
| <b>第二十五章 留数及其应用</b> .....                 | <b>307</b> |
| 第一节 孤立奇点及其分类 .....                        | 307        |
| 一、零点与孤立奇点 .....                           | 307        |
| 二、可去奇点 .....                              | 308        |

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 三、极点 .....                                                      | 310 |
| 四、本性奇点 .....                                                    | 312 |
| 第二节 留数和留数定理 .....                                               | 313 |
| 第三节 留数在计算实积分上的应用 .....                                          | 317 |
| 一、 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 型积分 .....                  | 317 |
| 二、 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta)d\theta$ 型积分 ..... | 319 |
| 三、 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$ 型积分 .....     | 323 |
| 习题二十五 .....                                                     | 325 |
| 内容摘要 .....                                                      | 326 |
| 复习思考题二十五 .....                                                  | 328 |
| 测验作业题十三 .....                                                   | 329 |
| 附录 I 集合初步 .....                                                 | 330 |
| 附录 II 计数方法 .....                                                | 334 |
| 附表 I 标准正态分布 .....                                               | 339 |
| 附表 II 泊松分布 .....                                                | 340 |
| 附表 III $\chi^2$ 分布的分位数 $\chi^2_p(n)$ 表 .....                    | 341 |
| 附表 IV $t$ 分布的分位数 $t_p(n)$ 表 .....                               | 342 |
| 附表 V $F$ 分布的分位数 $F_p(m, n)$ 表 .....                             | 343 |
| 习题答案 .....                                                      | 346 |

# 第 三 篇

## 概 率 统 计

## 摘 要

“概率论与数理统计”是从数量上研究随机现象规律(即统计规律性)的一门数学学科。随着现代科学技术的迅速发展,这门数学学科不仅已形成了较完整的数学理论,而且在自然科学、工程技术与经济管理的各个领域里都有着愈来愈广泛的应用。本篇作为工科专业(本科)“工程数学——概率论与数理统计”课程的函授、自学教材,只着重于讲解一些基本的理论和方法,并不拘泥于严密的数学证明。

全篇共分两大部分:第一部分(第十一章至第十五章)主要介绍“概率论”的一些基本知识,内容包括随机事件与概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,以及大数定律和中心极限定理;第二部分(第十六章至第十八章)主要介绍“数理统计”的一些基本思想和方法,内容包括数理统计的基本概念,参数估计与假设检验。前后两部分的内容是互相渗透、互相联系的。

本篇是根据函授、自学教材的要求和特点而编写的,内容安排上由浅入深,重点突出,难点适当分散;文字叙述上通俗易懂,便于自学,凡是学过“微积分”的读者,均能顺利地自学本教材。通过本篇内容的学习,读者不仅可以把所学内容直接应用到某些工农业生产和科学研究的具体工作中去,而且为今后进一步深入学习“概率统计”知识打下良好的基础。

## 第十一章 随机事件与概率

在自然界和社会上大量存在着一类不确定性的现象，即在试验或观察前无法确切地预知试验或观察的结果。这类现象在个别试验中呈现不确定性，但在大量重复试验中，又有一定的统计规律性，我们称这一类现象为随机现象。概率论正是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支。

本章主要引进概率论中一些最基本的概念。

### 第一节 随机试验和随机现象

自然界和人们的社会活动中经常会出现各种各样的现象，人们对于各种现象的认识，主要来自人们实践。我们把实践活动中的行为概括为试验。具体地说：凡是对现象的观察或为此进行的实验都称之为试验。任何试验都应包括两个方面：试验条件和试验结果。根据因果关系，试验大体上可以分为两类。其中一类，试验条件确定唯一的试验结果，这样的试验称为**确定性试验**。例如，在标准大气压下，把纯水加热到 $100^{\circ}\text{C}$ ，结果水一定沸腾；同性电荷一定排斥；用手向上抛一物体，该物体不可能成为地球卫星，等等。总之，对确定性试验而言一旦试验条件确定，我们就可以预言确切的结果。确定性试验中呈现出来的现象称为**确定性现象**。自然科学揭示确定性现象产生的条件和规律，而人们根据这种规律来预测各种确定性的现象。

本课程研究的是另一类试验，就是所谓**随机试验**。我们先考察一些实例（以下用字母 $E$ 表示试验）。

$E_1$ ：抛掷一枚硬币，并观察出现的面。试验可能出现两种不同的结果，即正面（记为 $H$ ）和反面（记为 $T$ ）。但是究竟出现哪种结果，在抛掷之前是无法确切预言的。

$E_2$ ：抛掷一颗骰子，并观察出现的点数。试验可能出现六种不同的结果：1、2、3、4、5、6，但究竟出现哪种结果，在抛掷之前是无法确切预言的。

$E_3$ ：记录某交换机上午8:00~9:00接到的电话呼叫次数，出现的结果可能是非负整数中的任意一个数，但事先（即试验前）无法预知究竟是哪一个非负整数。

$E_4$ ：从一大批同类型的灯泡中抽取一只，测试它的寿命（即能正常工作的小时数），出现的结果可能是非负实数中的任意一个数。但事先（即试验前）无法预知究竟是哪一个非负实数。

试验 $E_k$ （ $k = 1, 2, 3, 4$ ）就是随机试验的典型例子，这类试验的共同特点是：在一定条件下，试验的可能结果不止一个，并且在试验之前不能预知哪个结果会出现。我们把这种特性称为试验的**随机性**。随机试验呈现出来的现象称为**随机现象**。以后我们提到的试验都是指随机试验，并且限于研究在相同条件下可以重复进行的随机试验（ $E_k, k = 1, 2, 3, 4$  就是这样的例子）。

尽管在个别试验中出现什么结果带有随机性，但是在相同条件下大量重复试验中它的结果却呈现出某种规律性。例如，在  $E_1$  中，多次重复地抛掷一枚硬币出现正面大致有半数；在  $E_2$  中，多次重复抛掷一颗骰子，得到点数 5 的次数大致占  $1/6$ ；同样，电话的呼叫次数、灯泡的寿命，它们的取值在多次重复试验中也存在各自的一定规律。这种在大量重复试验中所呈现出的固有规律性，就是我们以后所说的统计规律性。

概率论和数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科。概率论的特点是先提出数学模型，然后研究它们的性质、特点和规律性；数理统计则是以概率论的理论为基础，利用对随机现象的观测所取得的数据资料来研究数学模型，并进行推断和预测。

目前，概率论的理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事、管理以及科学技术的各个领域。

## 第二节 随 机 事 件

从本节开始，我们将逐步引进概率论的基本概念。样本空间和随机事件是最基本的两个概念。

### 一、样本空间

如前所述，在一次试验中，会出现怎样一个试验结果是无法预言的，但所有可能出现的结果通常是能够知道的。我们将试验  $E$  的一个结果称为试验  $E$  的一个样本点，用  $e$  表示。将试验  $E$  的所有可能结果（即样本点的全体）构成的集合称为试验  $E$  的样本空间，记为  $S$ 。

下面写出了上一节中试验  $E_k (k=1, 2, 3, 4)$  的样本空间  $S_k$ ：

$$E_1: S_1 = \{H, T\};$$

$$E_2: S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$E_3: S_3 = \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$E_4: S_4 = \{t | t \geq 0\}, \text{ 或简写成 } S_4 = \{t \geq 0\}.$$

下面一个例子说明样本空间的元素（即样本点）是由试验内容确定的。

【例 11-1】某袋中装有 4 只白球和 2 只红球，并对球进行编号，4 只白球分别编为 1, 2, 3, 4 号，2 只红球编为 5, 6 号。今从袋中摸出一只。如果试验内容是观察球的颜色，则样本空间为  $S' = \{\text{白}, \text{红}\}$ 。如果试验内容是记录球的号数，则样本空间为  $S'' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

另外需要指出的是，象上一节中试验  $E_3$ ，呼叫次数实际上不会超过某个足够大的正整数，但为了处理上方便，对于这类试验，数学上容许取样本空间为  $S_3$ ；又如上节  $E_4$  中的寿命，为了同样的理由，把样本空间  $S_4$  取为  $(0, +\infty)$ ，必要时甚至还可把样本空间扩大为  $(-\infty, +\infty)$ 。

### 二、随机事件

从上段可以看到，样本空间所含有的样本点可以是有限个，也可以是无限个。在每次试验中，这些样本点有一个而且只有一个出现。在实际中，一般，我们关心的不仅是某一样本点在一次试验中是否出现，而且还关心满足某些条件的样本点是否出现。例如，在上节  $E_2$  中，我们关心抛掷一颗骰子出现的点数是否为偶数，或即出现的点数是否属于样本

空间 $S_2$ 的子集 $A = \{2, 4, 6\}$ 。显然，抛掷一颗骰子，出现的点数可能属于 $A$ ，也可能不属于 $A$ ，我们称 $A$ 为试验 $E_2$ 的一个随机事件，当且仅当出现的点数属于 $A$ 时，称 $A$ 或{出现的点数为偶数}这一随机事件出现。又如，规定灯泡的寿命 $t$ 大于等于500小时为正品，那么在上节 $E_4$ 中，我们关心灯泡寿命是否属于样本空间 $S_4$ 的子集 $B = \{t \geq 500\}$ ，类似地，我们称 $B$ 为试验 $E_4$ 的一个随机事件，当且仅当 $B$ 中的一个样本点出现时，就有寿命 $t \geq 500$ （即该灯泡为正品），或即随机事件 $B$ 出现。

一般地，我们称试验 $E$ 的样本空间 $S$ 的子集为 $E$ 的**随机事件**，随机事件简称**事件**。在一次试验中，当且仅当事件（子集）中的一个样本点出现时，称这一**事件出现**或**事件发生**。通常以大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 等表示事件；有时也以 $\{\dots\}$ 表示事件，大括号中指明该事件的内容或列出该事件包含的全部样本点。如前那样，在 $E_2$ 中事件{出现的点数为偶数}也可表示成 $\{2, 4, 6\}$ 。

下面再举一个事件的例子。

**【例 11 2】**  $E$ ：在相同条件下接连进行两次射击，观察击中目标的情况。以 $(+ -)$ 表示第一次击中目标，且第二次未击中目标这一样本点。其它样本点可类似表示。易知， $E$ 的样本空间为

$$S = \{(+ +), (+ -), (- +), (- -)\}$$

以下是 $E$ 的几个事件：

$$A_1 = \{\text{第一次击中目标}\} = \{(+ +), (+ -)\};$$

$$A_2 = \{\text{恰有一次击中目标}\} = \{(+ -), (- +)\};$$

$$A_3 = \{\text{至少有一次击中目标}\} = \{(+ +), (+ -), (- +)\};$$

$$A_4 = \{\text{两次都未击中目标}\} = \{(- -)\};$$

$$A_5 = \{\text{两次都击中目标}\} = \{(+ +)\}.$$

显然，当且仅当样本点 $(+ +), (+ -)$ 之一出现时，事件 $A_1$ 出现；当样本点 $(- +)$ 出现时，事件 $A_2, A_3$ 都出现。

特别，仅由一个样本点构成的事件称为试验的**基本事件**。例如，在上一节中，试验 $E_1$ 有两个基本事件： $\{H\}$ 和 $\{T\}$ ； $E_3$ 有可列个基本事件： $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots$ ； $E_4$ 中有不可列个基本事件： $\{T = t\}, t \in (0, +\infty)$ 。

样本空间 $S$ 是它自身的一个子集，因而也是一个事件。由于每次试验中必然出现 $S$ 的某个样本点，即 $S$ 是一个必然要发生的事件，所以称 $S$ 为**必然事件**。我们把不包含任何样本点的空集 $\emptyset$ 也作为一个事件，它在每次试验中必然不发生，所以称 $\emptyset$ 为**不可能事件**。例如，在例11-2中，{至多击中目标两次}是必然事件，而{击中三次}是不可能事件。显然，任何试验既有必然事件又有不可能事件。必然事件和不可能事件实际上都是确定性事件，引入它们并把它们作为随机事件的特例来处理，完全是为了今后研究的方便。

### 三、事件之间的关系及运算

事件是一个集合，根据集合之间的关系和集合的运算就可自然地引入一个随机试验下多个事件之间的关系和运算。以下读者应着重理解这些关系和运算在概率论中的含义，理解的基点是：事件发生当且仅当包含在事件中的一个样本点发生。

设试验 $E$ 的样本空间是 $S$ ，而 $A, B, C, \dots, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 都是 $E$ 的事件（或 $S$ 的子集）。

**1. 事件的包含关系** 若事件 $A$ 发生导致事件 $B$ 发生, 则称事件 $B$ 包含事件 $A$ , 记作 $A \subset B$ , 或 $B \supset A$ , 此时 $A$ 包含的样本点也包含于 $B$ 中。例如, 抛掷一颗骰子,  $\{\text{出现} 2 \text{点}\}$ 必导致 $\{\text{出现偶数点}\}$ , 所以事件 $\{\text{出现偶数点}\}$ 包含 $\{\text{出现} 2 \text{点}\}$ , 又如例11-2中,  $A_2 \subset A_3$ 。

显然, 对于任何事件 $A$ , 有 $A \subset S$ ; 此外, 我们规定 $\emptyset \subset A$ 。

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ , 则称事件 $A$ 与 $B$ 相等或等价, 记为 $A = B$ 。在集合意义上这记号在前面已经引用过。

**2. 和事件**  $\{\text{事件} A \text{与事件} B \text{至少有一发生}\}$ 也是一个事件, 称它为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**和事件**或**并事件**, 简称**和或交**, 记为 $A \cup B$ 。 $A \cup B$ 包含的样本点由 $A$ 的样本点和 $B$ 的样本点合并而成。例如,  $A$ 表示缺少水泥,  $B$ 表示缺少钢筋, 则 $A \cup B$ 表示缺少水泥或缺少钢筋(也可能两者都缺少)。又如例11-2中 $A_2 \cup A_5 = A_3$ 。

类似地, 称 $\bigcup_{k=1}^n A_k \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**和事件**, 称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \dots$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的**和事件**。

显然, 对于任何事件 $A$ , 有 $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cup S = S$ , 此外, 若 $A \subset B$ , 则 $A \cup B = B$ 。

**3. 积事件**  $\{\text{事件} A \text{与事件} B \text{同时发生}\}$ 也是一个事件, 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**积事件**或**交事件**, 简称**积或交**, 记为 $A \cap B$ , 或简记为 $AB$ 。 $A \cap B$ 包含的样本点是 $A$ 和 $B$ 的公共样本点。例如, 某圆柱形产品, 当长度和直径都符合规格时才算合格, 记 $A = \{\text{长度合格}\}$ ,  $B = \{\text{直径合格}\}$ , 则 $A \cap B$ 表示 $\{\text{产品合格}\}$ 。又如, 在例11-2中,  $A_1 \cap A_2 = \{(+-)\}$ 。

类似地, 称 $\bigcap_{k=1}^n A_k \triangleq A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**积事件**; 称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq A_1 \cap A_2 \cap \dots$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的**积事件**。

显然, 对于任何事件 $A$ , 有 $A \cap \emptyset = \emptyset$ ; 此外, 若 $A \subset B$ , 则 $A \cap B = A$ 。

**4. 事件的互不相容关系** 若事件 $A$ 与事件 $B$ 在一次试验中不可能同时发生, 就称事件 $A$ 和事件 $B$ **互不相容**(或**互斥**)。这关系记为 $AB = \emptyset$ , 即事件 $A$ 和事件 $B$ 没有公共样本点。如果一组(有限个或可列个)事件中任意两个都互不相容, 那末称这组事件是**两两互不相容**的。例如, 抛掷一颗骰子,  $\{\text{出现} 2 \text{点}\}$ 与 $\{\text{出现奇数点}\}$ 是互不相容的。又如, 在例11-2中, 事件 $A_3$ 与 $A_4$ 是互不相容的; 事件组 $A_2, A_4, A_5$ 是两两互不相容的。

值得指出的是, 随机试验的任何一组基本事件一定是两两互不相容的。

**5. 差事件**  $\{\text{事件} A \text{发生且事件} B \text{不发生}\}$ 也是一个事件, 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**差事件**, 简称**差**, 记为 $A - B$ , 它是由所有包含于 $A$ 但不包含于 $B$ 的样本点所组成的事件。例如, 在例11-2中,  $A_3 - A_2 = A_5$ 。

**6. 逆事件**  $\{\text{事件} A \text{不发生}\}$ 也是一个事件, 称为事件 $A$ 的**逆事件**或 **$A$ 的对立事件**, 记为 $\bar{A}$ , 它是由所有不包含在 $A$ 中的样本点所组成的事件, 即 $\bar{A} = S - A$ 。例如, 抛掷一颗骰子, 若以 $A$ 表示 $\{\text{出现偶数点}\}$ , 则 $\bar{A}$ 表示 $\{\text{出现奇数点}\}$ ; 又如, 在例11-2中, 事件 $A_4$ 是 $A_3$ 的逆事件, 即 $A_4 = \bar{A}_3$ 。显然,  $\bar{\bar{A}}$ 是 $A$ 的逆事件, 则 $A$ 也是 $\bar{\bar{A}}$ 的逆事件, 即 $\bar{\bar{A}} = A$ 。由此, 常说 $A$ 与 $\bar{A}$ 互为逆事件或互为对立事件。必然事件与不可能事件互为逆事件。

① 记号“ $A \triangleq B$ ”表示 $A(B)$ 定义为 $B(A)$ , 或 $A(B)$ 记为 $B(A)$ 。

根据事件的和与交, 显然  $A, \bar{A}$  还满足:

$$A \cup \bar{A} = S, \text{ 且 } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

它的含义是事件  $A$  与  $\bar{A}$  中必有一个发生, 且仅有一个发生。

需要注意, 与  $A$  互不相容的事件不一定是  $A$  的逆事件。例如, 抛掷一颗骰子, {出现 2 点} 与 {出现奇数点} 是互不相容的事件, 但它们不是互逆的两个事件。

事件之间的关系及运算有时用一种称为文氏 (Venn) 图的图形来直观表示, 如图 11-1 所示。图中以矩形示意样本空间  $S$ , 事件  $A$  和  $B$  分别用两个圆示意。

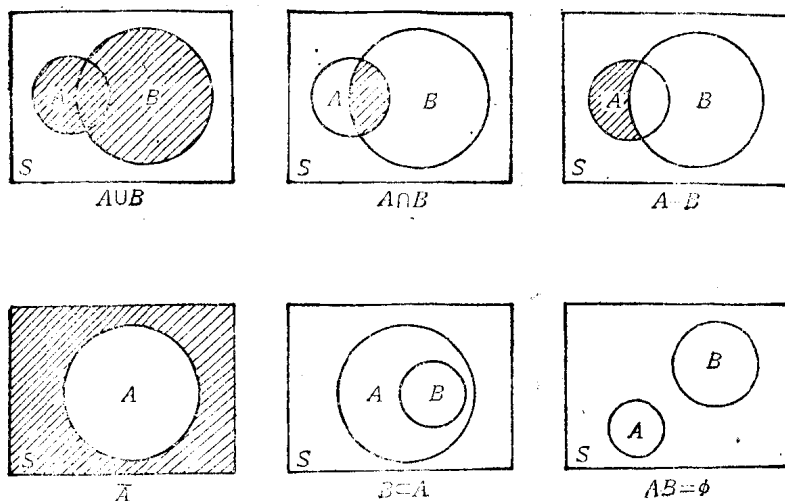


图 11-1

随机事件是样本空间的子集, 把事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算进行比较, 可以看到两者是一致的, 为了便于对照, 我们列出下面表格。

表 11-1

| 记 号              | 概 率 论                  | 集 合 论             |
|------------------|------------------------|-------------------|
| $S$              | 样本空间, 必然事件             | 空 间               |
| $\emptyset$      | 不可能事件                  | 空 集               |
| $e$              | 基本事件                   | 元 素               |
| $A$              | 事 件                    | 子 集               |
| $\bar{A}$        | $A$ 的逆事件               | $A$ 的余集           |
| $A \subset B$    | 事件 $A$ 出现导致事件 $B$ 出现   | $A$ 是 $B$ 的子集     |
| $A = B$          | 事件 $A$ 与事件 $B$ 相等      | $A$ 与 $B$ 相等      |
| $A \cup B$       | 事件 $A$ 、事件 $B$ 至少有一个出现 | $A$ 与 $B$ 的并集     |
| $A \cap B$       | 事件 $A$ 、事件 $B$ 同时出现    | $A$ 与 $B$ 的交集     |
| $A - B$          | 事件 $A$ 出现而事件 $B$ 不出现   | $A$ 与 $B$ 的差集     |
| $AB = \emptyset$ | 事件 $A$ 和事件 $B$ 互不相容    | $A$ 与 $B$ 没有相同的元素 |

关于事件的运算有下列几个基本规律:

(1) 交换律:  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ ;

(2) 结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;