

空间结构论文选集

(二)

中国土木工程学会桥梁及结构工程学会
空间结构委员会

中国建筑工业出版社



空间结构论文选集

(二)

中国土木工程学会桥梁及结构
工程学会空间结构委员会

中国建筑工业出版社

(京)新登字 035 号

图书在版编目(CIP)数据

空间结构论文选集 (2) / 中国土木工程学会桥梁及
结构工程学会空间结构委员会编. —北京: 中国建筑工业
出版社, 1997

ISBN 7-112-03293-8

I. 空… I. 中… III. 空间结构-文集 N. TU399-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 08481 号

本文集选自 1984 年至 1990 年历届空间结构会议交流的重要论文, 计 32 篇, 包括壳体、网壳、网架、悬索几个方面。这些论文在发表时或提出了新的研究成果、新的技术探索, 或概括了当时某方面理论与实践的总体情况, 或实录介绍了某项重要工程。其中对空间结构的动力和抗震分析, 以及多层网架、网架与拱结合的杂交结构、预应力双层索系等中国特有的结构内容占有相当的篇幅。这些论文都具有一定的学术水平和应用价值, 对科研、设计、施工及教学都有实际意义和参考价值。

本书可供土木建筑专业科研、设计、施工及教学人员参考。

空间结构论文选集

中国土木工程学会桥梁及结构
工程学会空间结构委员会

中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)

新华书店经销

北京市兴顺印刷厂印刷

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 16 1/4 字数: 402 千字

1997 年 10 月第一版 1997 年 10 月第一次印刷

印数: 1—1000 册 定价: 20.00 元

ISBN7-112-03293-8

TU·2535(8436)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

前 言

中国土木工程学会桥梁及结构工程学会空间结构委员会自从1982年成立以來,每两年举行一次空间结构学术交流会,每次会上都要交流不少有价值的论文。第一届空间结构学术交流会举行之后,在会议论文集的基础上,空间结构委员会曾组织编选并由科学出版社于1985年出版了一本《空间结构论文选集》。这本文集收集了包括薄壳、折板、网架、网壳、悬索和充气结构等方面的20篇文章,基本上反映了那几年中国空间结构的设计、施工与科研的成果,至今被认为是空间结构领域的一本珍贵文献。

自1984年至今,又召开了六次空间结构学术会议,除了第七届外,每届都在内部出版了厚厚的论文集,但由于种种原因,论文选集的工作却没有进行下去,以至于这几届论文集中,尤其是早期会议所发表的论文现在已不易找到了。为了促进空间结构领域内的学术交流与发展,保存有价值的文献,空间结构委员会决定将第二届会议以来历次空间结构学术会议的论文集编印为选集公开出版,这一工作得到了中国建筑工业出版社的大力支持。由于篇幅所限,本论文选集仅选取了自第二届(1984)至第五届(1990)会议上所发表的论文。第六届会议以后的论文也将陆续编印出版。

这本论文选集中的32篇文章是由空间结构委员会委员推荐并经过审查选用的,其中既包括具有一定学术水平的理论与试验研究,也有一些重要工程的实录,反映了80年代中国空间结构的发展情况。在这期间,网架结构继续着发展的势头,在理论上对一些如动力、抗震等特殊问题作了有价值的探索,在实践上除了传统的形式外,还出现了高低跨、三层、组合网架以及与拱相结合的杂交结构。与此同时,网壳结构的理论分析与工程实践也有了新的进展,为以后的急剧发展打下了基础。值得注意的是:悬索结构在这一时期的空间结构中占有重要的地位,出现了预应力双层索系、横向加劲悬索体系等中国所特有的结构体系,并在一些工程中得到应用。此外,壳体理论也在不断发展,在球形水塔的工程中说明壳体仍有用武之地。所有这些文章都说明80年代是中国空间结构发展壮大的一个关键阶段。

在1988年前后,有关建筑结构的标准规范曾进行过一次全面的修订,但本文集中有一些早期发表的论文是按70年代的规范、规程研讨的,为反映当时的实际情况,文集中仍基本按原样刊载,有些只对计算中的计量单位作了修改,有些规定的的数据计量单位也保持未变。

文集中有一部分论文曾在下列期刊上公开发表过,经征得有关期刊编辑部的同意,允许刊载在本论文选集中。这些期刊分别是:土木工程学报、建筑结构学报、建筑结构、工程力学、太原工业大学学报、有色冶金设计与研究、煤矿设计。除在每篇论文篇首注明外,特在此一并表示谢意。

空间结构委员会

1997年3月

目 录

壳 体

1. 分析负高斯曲率壳体的一种新方法 何广乾、林春哲、张 凯(1)
2. 扁壳分区混合能量原理及其应用 龙志飞、须寅、龙驭球(9)
3. 大跨球形扁壳屋盖开孔的屈曲问题 陈学潮、郑瑞芬(16)
4. 圆柱壳结构的样条积分方程比拟法 完海鹰(22)
5. 2500 立方米预应力钢筋混凝土球形水塔球壳的设计与计算
..... 王 俊、郝成新、樊晓红、郭 璐(27)

网 架 结 构

6. 网架的最优网格与高度及其选型 蓝侗恩、钱若军(32)
7. 正交正放类三层网架的结构形式及拟夹层板分析法 董石麟(39)
8. 三层网架的优化设计与试验研究 赵红华、李海旺、尹德钰(48)
9. 网架结构在竖向地震作用下的实用分析方法 张毅刚、蓝侗恩(57)
10. 大跨度立体桁架的动力特性及其竖向地震内力计算 张毅刚(70)
11. 新疆乌恰影剧院网架屋盖震害分析 蓝侗恩、钱若军(78)
12. 网架结构在工业厂房应用的发展与问题 张运田、郑长兴、张希铭(86)
13. 上海游泳馆三向变高度空间网架模型试验 王孔藩、朱享绂(93)
14. 河北省体育馆网架结构设计 王永祯、吕一心(101)
15. 广州白云机场飞机库 80 米跨高低整体式折线形网架 刘树屯(112)
16. 秦俑博物馆二号坑展馆网架结构的设计 陈 禹、高明辉、陈 涛(119)
17. 72×68 米螺栓球节点三层网架设计与顶升 何家炎、高永辉(124)
18. 江西省体育馆屋盖网架结构与施工 吴 东(129)
19. 多楼层组合网架结构与试验分析 苗春芳(135)

网 壳 结 构

20. 网状球壳的连续化分析方法 董石麟(143)
21. 穹顶网壳的稳定计算 胡学仁(156)
22. 大跨度空间网壳结构静力和屈曲数值分析 邓可顺(167)
23. 正放四角锥网格双层筒状网壳的优化研究 刘锡良、王 军(172)
24. 秸山洗煤厂 52 米直径单层球面网壳设计 刘善维、石彦卿(176)
25. 大型双层双曲扭网壳结构吊装 路克宽、张 伟(182)

悬索结构

26. 索网及索—桁架屋盖结构的静力分析及程序…………… 钱若军、季天健、蓝侗恩(187)
27. 预应力双层索系的静力和动力性能…………… 沈世钊、徐崇宝、郭 骅(196)
28. 大跨索网结构地震反应及参数影响的分析…………… 王 丰、曹 资、陶世诚(208)
29. 横向加劲单曲悬索屋盖模型的试验研究…………… 蓝侗恩、赵基达、季天健(215)
30. 索—桁(梁)结构动力特性和地震反应试验研究
…………… 曹 资、罗·凯特、贾子和、陶世诚(225)
31. 四川省体育馆钢筋混凝土拱与索网组合的大跨度轻型屋盖…………… 朱思荣(233)
32. 吉林滑冰馆悬索屋盖设计…………… 徐崇宝、沈世钊(244)
33. 青岛体育馆索网结构屋盖及其施工…………… 周润珍、胡立斌、郝成新、潘云龙等(255)

1. 分析负高斯曲率壳体的一种新方法^①

何广乾 林春哲 张 凯

(中国建筑科学研究院)

提要 本文首先从薄壳结构的最小势能原理出发,利用拉氏乘子法把强制的边界约束条件,变成无条件约束的泛函驻值问题。然后对广义的势能变分原理进行变分计算,应用平面波分解法寻找到一种满足扁壳三个平衡方程的位移函数 φ ,使得广义势能变分原理中的所有区域型积分项消失,只剩下区域边界的线积分项,采用通常的离散方法求解,离散后的线性方程组的阶数大大低于有限单元法。

用本文的方法,节省计算机的存贮,提高利用计算机的利用效率。本文提供的位移函数 φ ,求解负高斯曲率壳体,获得比较满意的数值结果,与级数解相当接近。

一、 引 言

利用有限单元法对薄壳结构进行应力分析时,目前常见有两种主要方法:一种是利用势能变分原理,以位移为节点未知数,对位移的微分得到内力,因此内力的精度就差一些;另一种是利用混合型变分原理,以位移和内力为节点未知数^[1],当两种方法采用相同的插值函数时,后一种方法内力的精度较高些,但整体刚度矩阵的性质不如前一种的好,有的文章提出一些改进办法^[2]。有限单元法的整体刚度矩阵的阶数,一般来说,往往较高,而且沿着相邻单位之间的位移,需要保持协调性,当插值多项式函数的阶数较低时,相邻单元之间位移的协调性不易满足,常常需特别注意。

O. C. Zienkiewicz(1977)曾指出^[3],如果在区域的内部寻找某函数满足问题的控制微分方程,这时求此问题的泛函驻值问题,仅利用区域的边界线积分即可;这种办法使得求解问题的维数降低一维,大大简化了输入的数据,缩短了计算的时间,提高了计算机的利用率,但没有说明如何寻求满足问题控制微分方程某函数的途径。如果采用配点法求解薄壳结构,得到的线性方程组,当计算机的字长较短时,利用高斯消去法求解有时精度不够令人满意。

本文直接利用薄壳结构的变分方程,选取初等函数的线性组合满足薄壳的控制微分方程,使得变分方程的区域积分项为零,求解此变分方程。

本文的方法,既有配点法的简单性,其整体刚度矩阵的阶数大大降低,而且内力的精度能有所提高,便于利用微机来实现。

① 本文原刊于第二届空间结构学术交流会论文集(1984)。

二、薄壳结构的边界积分方程

薄壳结构的坐标系及主要符号如下： x, y, z ：扁壳中面的流动坐标， z 轴垂直于中面（见图1）。

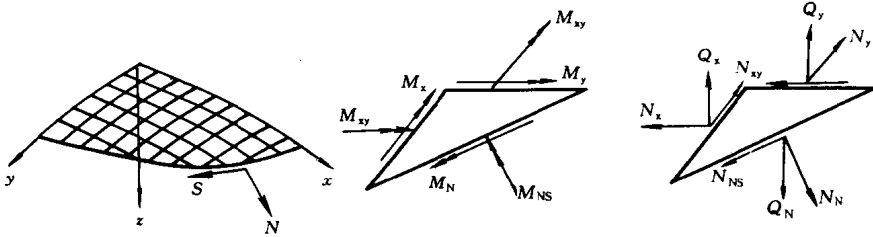


图 1

n, s ：扁壳边界法向及切向坐标；

δ ：扁壳厚度；

$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ：扁壳中面的曲率及扭率；

E ：弹性模量；

ν ：泊松比；

$D = E\delta^3/12(1-\nu^2)$ ：抗弯刚度；

u, v, w ： x, y, z 方向的位移；

$u_n = ul + vm$ ：边界法线 n 方向的位移；

$u_s = -um + vl$ ：边界切线 s 方向的位移；

N_x, N_y, N_{xy} ：薄膜内力；

M_x, M_y, M_{xy} ：弯矩及扭矩；

$l = \cos(n, x), m = \cos(n, y)$ ；

$N_n = N_x l^2 + 2N_{xy} l m + N_y m^2$ ；

$N_{ns} = (N_y - N_x) l m + N_{xy} (l^2 - m^2)$ ；

$M_n = M_x l^2 + 2M_{xy} l m + M_y m^2$ ；

$M_{ns} = (M_y - M_x) l m + M_{xy} (l^2 - m^2)$ ；

$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ ；

$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$ ；

$Q_n = Q_x l + Q_y m$ ；

$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m$ ；

$R_n = Q_n$ ；

$\bar{w}, \bar{R}_n, \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}, \bar{M}_n, \bar{N}_n, \bar{u}_n, \bar{N}_{ns}, \bar{u}_s$ ：边界上给定的 $w, R_n, \frac{\partial w}{\partial n}, M_n, N_n, u_n, N_{ns}, u_s$ ；

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ；

$$\Delta k = \kappa_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\kappa_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$

扁壳结构的最小势能变分原理可以写作:

$$\begin{aligned} \Pi_P(x, y, z) = & \iint_{\Omega} \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa_x w \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \kappa_y w \right)^2 \right. \\ & + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa_x w \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \kappa_y w \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ & \left. \left. - 2R_{xy} w \right)^2 \right] dx dy + \iint_{\Omega} \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ & - \int_{C_{N_n}} \bar{N}_n u_n ds - \int_{C_{N_{ns}}} \bar{N}_{ns} u_s ds - \int_{C_R} \bar{R}_n w ds + \int_{C_{M_n}} \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds \\ & - \iint_{\Omega} (P_x u + P_y v + P_z w) dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)必须满足下面的强制的位移边界条件,即:

$$\begin{aligned} w &= \bar{w}, \text{ 在 } C_w \text{ 上;} \\ u_n &= \bar{u}_n, \text{ 在 } C_{u_n} \text{ 上;} \\ u_s &= \bar{u}_s, \text{ 在 } C_{u_s} \text{ 上;} \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= \bar{\frac{\partial w}{\partial n}}, \text{ 在 } C_{\frac{\partial w}{\partial n}} \text{ 上.} \end{aligned} \quad (2)$$

如果把式(1)有条件的变分,利用拉格朗日乘子法可以变成无条件的变分,构成新的泛函为:

$$\begin{aligned} n^* = & n_P(u, v, w) + \int_{C_w} (w - \bar{w}) \lambda_1 ds + \int_{C_{u_n}} (u_n - \bar{u}_n) \lambda_2 ds \\ & + \int_{C_{u_s}} (u_s - \bar{u}_s) \lambda_3 ds + \int_{C_{\frac{\partial w}{\partial n}}} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\frac{\partial w}{\partial n}} \right) \lambda_4 ds \end{aligned} \quad (3)$$

只要通过变分计算,可以验证:

$$\lambda_1 = -R_n, \quad \lambda_2 = -N_n, \quad \lambda_3 = -N_{ns}, \quad \lambda_4 = -M_n \quad (4)$$

如果把式(4)代入式(3),然后对式(3)进行变分计算,此时式(3)可以化为:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (\kappa_x + \nu\kappa_y) \frac{\partial w}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-\nu)\kappa_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + P_x \right\} \delta u dx dy + \iint_{\Omega} \left\{ \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (\kappa_y + \nu\kappa_x) \frac{\partial w}{\partial y} - (1-\nu)\kappa_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + P_y \right\} \\ & \times \delta v dx dy + \iint_{\Omega} \left[(\kappa_x + \nu\kappa_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu)\kappa_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + (\kappa_y + \nu\kappa_x) \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ & \left. + (1-\nu)\kappa_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2(1-\nu)\kappa_{xy}^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y) w \right] \delta w dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\delta}{12}\Delta^2\Delta^2w + P_z] \delta w dx dy + \int_{C_{N_n}} (N_n - \bar{N}_n) \delta u_n ds \\
& + \int_{C_{N_{ns}}} (N_{ns} - \bar{N}_{ns}) \delta u_s ds + \int_{C_{R_n}} (R_n - \bar{R}_n) \delta w ds - \int_{C_{M_n}} (M_n - \bar{M}_n) \delta \frac{\partial w}{\partial n} ds \\
& - \int_{C_w} (w - \bar{w}) \delta R_n ds + \int_{C_{\frac{\partial w}{\partial n}}} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\frac{\partial w}{\partial n}} \right) \delta M_n ds \\
& - \int_{C_{u_n}} (u_n - \bar{u}_n) \delta N_n ds - \int_{C_{u_s}} (u_s - \bar{u}_s) \delta N_{ns} ds = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

如果选取位移函数 u, v, w 为:

$$\begin{aligned}
u &= (\kappa_x + \nu\kappa_y) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + [(2 + \nu)\kappa_x - \kappa_y] \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \\
v &= (\kappa_y + \nu\kappa_x) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + [(2 + \nu)\kappa_y - \kappa_x] \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \\
w &= \Delta^2 \varphi
\end{aligned} \tag{6}$$

且假定 $p_x = p_y = 0, \kappa_{xy} = 0$, 则可以验证:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(1 + \nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (\kappa_x + \nu\kappa_y) \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{(1 - \nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (\kappa_y + \nu\kappa_x) \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\
(\kappa_x + \nu\kappa_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\kappa_y + \nu\kappa_x) \frac{\partial v}{\partial y} - (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y) w \\
- \frac{\delta}{12} \Delta^2 w + P_z &= -D \left(\Delta^4 \varphi + \frac{E\delta}{D} \Delta^2 \kappa \varphi - P_z/D \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

由于式(7)的前两个方程等于零, 因此式(5)的前二项在薄壳区域上的积分等于零, 如果能选取某函数 φ 使得:

$$\Delta^4 \varphi + \frac{E\delta}{D} \Delta^2 \kappa \varphi = P_z/D \tag{8}$$

那么, 式(5)的第三项在薄壳结构区域上的积分也等于零, 下节将详细说明函数 φ 的选取法。

此时, 式(5)可以写作:

$$\begin{aligned}
& \int_{C_{N_n}} (N_n - \bar{N}_n) \delta u_n ds + \int_{C_{N_{ns}}} (N_{ns} - \bar{N}_{ns}) \delta u_s ds + \int_{C_{R_n}} (R_n - \bar{R}_n) \delta w ds \\
& - \int_{C_{M_n}} (M_n - \bar{M}_n) \delta \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{C_w} (w - \bar{w}) \delta R_n ds + \int_{C_{\frac{\partial w}{\partial n}}} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\frac{\partial w}{\partial n}} \right) \delta M_n ds \\
& - \int_{C_{u_n}} (u_n - \bar{u}_n) \delta N_n ds - \int_{C_{u_s}} (u_s - \bar{u}_s) \delta N_{ns} ds = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

式(9)用矩阵形式, 可以简写作:

$$\int_{C_F} (F - \bar{F}) \delta U ds - \int_{C_U} (U - \bar{U}) \delta F ds = 0 \tag{10}$$

式中

$$F = [R_n N_n N_{ns} - M_n]^T; \quad \bar{F} = [\bar{R}_n \bar{N}_n \bar{N}_{ns} - \bar{M}_n]^T;$$

$$U = [w u_n u_s \frac{\partial w}{\partial n}]^T \quad \bar{U} = [\bar{w} \bar{u}_n \bar{u}_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}]^T \quad (11)$$

$$C_F = C_{R_n} U C_{N_n} U C_{N_{ns}} V C_{M_n} \quad C_u = C_w U C_{u_n} U C_{u_s} U C_{\frac{\partial w}{\partial n}} \quad (12)$$

当薄膜内力 and 弯曲内力用函数 φ 表达时,其表达式为:

$$N_x = -E\delta\Delta_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad N_y = -E\delta\Delta_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = E\delta\Delta_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

$$M_x = -D\Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D\Delta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)$$

$$Q_x = -D\Delta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad Q_y = -D\Delta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

三、边界积分方程的数值解法

在利用式(10)求解实际工程问题时,仅需选择适当的 φ 函数,使得 φ 满足式(8),当选取 $\varphi = \varphi^0 + \varphi^*$ 的形式满足式(8), φ^0 是式(8)的齐次控制微分方程的通解, φ^* 是式(8)的特解。这时壳体相应的位移和内力 $u_n, u_s, w, \frac{\partial w}{\partial n}, N_n, N_{ns}, M_n, R_n$ 也可以相应写作:

$$u_n = u_n^0 + u_n^*; \quad u_s = u_s^0 + u_s^*$$

$$w = w^0 + w^* \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w^0}{\partial n} + \frac{\partial w^*}{\partial n}$$

$$N_n = N_n^0 + N_n^* \quad N_{ns} = N_{ns}^0 + N_{ns}^*$$

$$M_n = M_n^0 + M_n^* \quad R_n = R_n^0 + R_n^* \quad (13)$$

式(13)中,右上角有“0”的表示相应量的齐次解,有“*”的表示相应量的特解。

现以四边固支的薄壳结构为例,说明边界积分方程的数值解法。在固支的条件下,薄壳结构只是强制的位移边界条件,没有力的边界条件,因此:

$$C_{R_n} = C_{N_n} = C_{N_{ns}} = C_{M_n} = 0$$

$$\bar{W} = \bar{u}_n = \bar{u}_s = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0 \quad (14)$$

在这种情况下,边界积分方程式(10)可以写作:

$$\int_{C_w} (w^0 + w^*) \delta(R_n^0 + R_n^*) ds + \int_{C_{u_n}} (u_n^0 + u_n^*) \delta(N_n^0 + N_n^*) ds$$

$$+ \int_{C_{u_s}} (u_s^0 + u_s^*) \delta(N_{ns}^0 + N_{ns}^*) ds - \int_{C_{\frac{\partial w}{\partial n}}} \left(\frac{\partial w^0}{\partial n} + \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) \delta(M_n^0 + M_n^*) ds = 0 \quad (15)$$

经过变分计算,式(15)也可以写作:

$$\int_{C_w} w^0 \delta R_n^0 ds + \int_{C_{u_n}} u_n^0 \delta N_n^* ds + \int_{C_{u_s}} u_s^0 \delta N_{ns}^0 ds - \int_{C_{\frac{\partial w}{\partial n}}} \frac{\partial w^0}{\partial n} \delta M_n^0 ds$$

$$= - \int_{C_w} w^* \delta R_n^0 ds - \int_{C_{u_n}} u_n^* \delta N_n^0 ds - \int_{C_{u_s}} u_s^* \delta N_{ns}^0 ds - \int_{C_{\frac{\partial w}{\partial n}}} \frac{\partial w^*}{\partial n} \delta M_n^0 ds \quad (16)$$

对于式(16),可以用矩阵表示为:

$$KX = B \quad (17)$$

式中 K ——已知的系数矩阵;

B ——已知的特解产生的列向量;

X ——未知的待定列向量。

在实际工程计算中, φ^0, φ^* 的表达式可有不同的选取法,文献^[4]叙述了二种选取法,这里按平面波分解法选取 φ^0 的齐次解,当薄壳结构的荷载为常数时,可选取:

$$\begin{aligned} \varphi^0 = & \sum a_i (\text{ch} \lambda_{1i} \rho_{1i} \cos \lambda_{1i} \rho_{1i} + \text{ch} \lambda_{2i} \rho_{2i} \cos \lambda_{2i} \rho_{2i}) \\ & + \sum b_i (\text{sh} \lambda_{1i} \rho_{1i} \sin \lambda_{1i} \rho_{1i} + \text{sh} \lambda_{2i} \rho_{2i} \sin \lambda_{2i} \rho_{2i}) \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \lambda_{1i} = \lambda_{2i} = & \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\delta} (\kappa_y \cos^2 \theta_i + \kappa_x \sin^2 \theta_i)} \\ \rho_{1i} = & x \cos \theta_i + y \sin \theta_i \\ \rho_{2i} = & x \cos \theta_i - y \sin \theta_i \end{aligned} \quad (19)$$

$$\varphi^* = \frac{p_z(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)}{8\kappa_x \kappa_y E \delta} \quad (20)$$

在利用式(18)进行数值计算时,把式(18)写成统一数级形式往往是方便的,令:

$$\varphi^0 = \sum \varphi_i x_i = X^T \phi \quad (21)$$

这时, $u_n^0, u_s^0, N_n^0, N_{ns}^0, M_n^0, \frac{\partial w^0}{\partial n}$ 可以写成:

$$\begin{aligned} u_n^0 = & X^T \{ [\kappa_x \phi_{,x^3} + (2\kappa_x - \kappa_y) \phi_{,xy^2}] l + [\kappa_y \phi_{,y^3} + (2\kappa_y - \kappa_x) \phi_{,x^2y}] m \} \\ u_s^0 = & X^T \{ - [\kappa_x \phi_{,x^3} + (2\kappa_x - \kappa_y) \phi_{,xy^2}] l + [\kappa_y \phi_{,y^3} + (2\kappa_y - \kappa_x) \phi_{,x^2y}] m \} \\ N_n^0 = & E \delta X^T [(-\kappa_y \phi_{,x^2y^2} - \kappa_x \phi_{,y^4}) l^2 + \\ & 2(\kappa_y + \kappa_x) \phi_{,xy^3} l m + (-\kappa_x \phi_{,x^2y^2} - \kappa_y \phi_{,x^4}) m^2] \\ N_{ns}^0 = & E \delta X^T (\kappa_y \phi_{,x^3y} + \kappa_x \phi_{,xy^3}) (l^2 - m^2) \\ \frac{\partial w^0}{\partial n} = & X^T [(\phi_{,x^5} + 2\phi_{,x^3y^2} + \phi_{,xy^4}) l + (\phi_{,x^4y} + 2\phi_{,x^2y^3} + \phi_{,y^5}) m] \\ M_n^0 = & -D X^4 [(\phi_{,x^6} + 2\phi_{,x^4y^2} + \phi_{,x^2y^4}) l^2 + (\phi_{,x^4y^2} + 2\phi_{,x^2y^4} + \phi_{,y^6}) m^2] \\ \theta_n^0 = & -\nu X^4 [(\phi_{,x^7} + 3\phi_{,x^5y^2} + 3\phi_{,x^3y^4} + \phi_{,xy^6}) l \\ & + (\phi_{,x^6y} + 3\phi_{,x^4y^3} + 3\phi_{,x^2y^5} + \phi_{,y^7}) m] \\ \frac{\partial M_s^0}{\partial s} = & -D X^4 [(\phi_{,x^6y} + 2\phi_{,x^4y^3} + \phi_{,x^2y^5}) m^3 + (\phi_{,x^5y^2} + 2\phi_{,x^3y^4} + \phi_{,xy^6}) l^3] \end{aligned} \quad (22)$$

四、计算实例

双曲抛物面壳,曲面方程为:

$$z = \frac{\kappa}{2} (x^2 y^2), \kappa_x = -\kappa_y = \kappa = \frac{1}{r}, \kappa_{xy} = 0$$

取 $2a = 2b = 20\text{m}$, 曲率半径 $r = 86\text{m}$, 壳厚 $\delta = 0.2\text{m}$, 四边固支(图2)。

将本文方法与文献^[5]的计算结果进行对比,见图3,图中是四边固支双曲抛物面壳的垂

直挠度、弯曲内力和薄膜内力的计算结果；从图中可以看出，本文的方法在垂直挠度和弯曲内力计算上与级数解几乎相同，比差分的计算结果好。薄膜内力的计算结果与级数解有些不同，但与差分的计算结果相当，弯曲内力在壳体边界附近与级数解相比，有些误差。

五、结 语

本文的方法，基于最小势能广义变分原理，选取适当的 φ 函数满足薄壳的三个平衡方程。在利用最小势能广义变分原理时，只剩下在区域的边界上的积分项。这样推导薄壳结构的边界积分方程的方法与正规的用格林函数的方法推导边界积分方程的方法不相同，这在概念和分析上是相当简单的，也避免了格林函数在边界积分上的奇异性及计算奇异积分的复杂性。由于事先选择 φ 函数能满足壳体区域内的控制微分方程，因此，计算的数值误差仅在区域的边界上，减少了相对误差。

从计算的例题中可以看出，此法具有一定的精度；与区域型解法相比较，例如有限单元

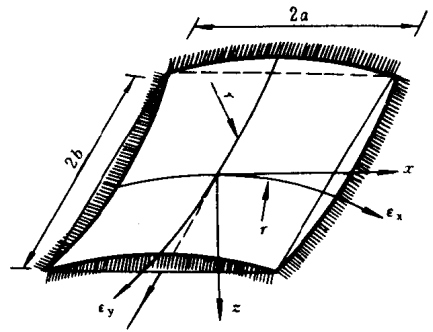


图 2

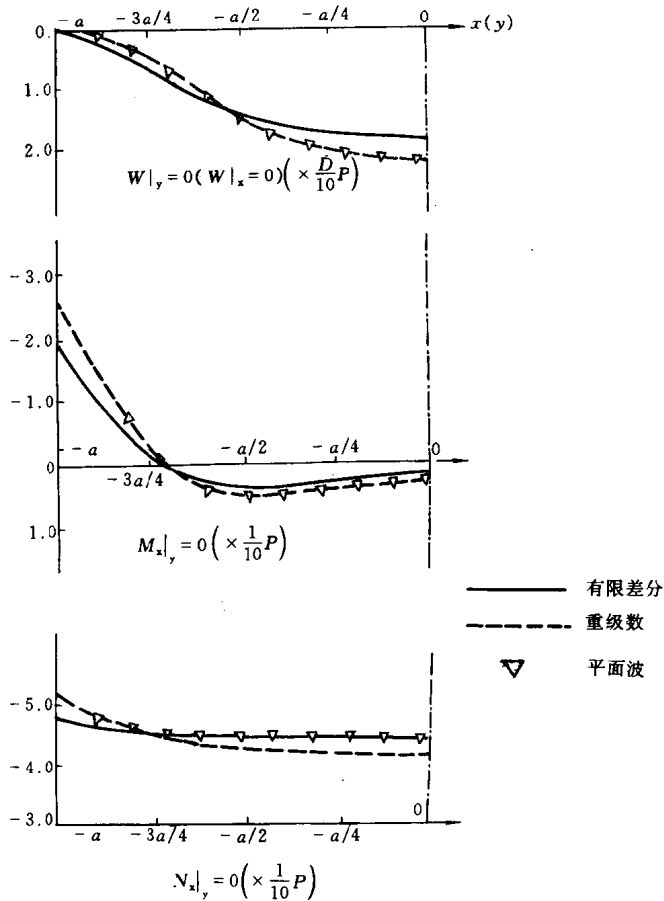


图 3

法,具有一定的优点。

本文只讨论了均布荷载情况,对于非对称形式荷载的齐次解仅需增加非对称函数,解法完全类似。

参 考 文 献

- [1] C. Tanian and L. Luchancé; Linear and Non-linear analysis of thin shallow shells by mixed finite element Computers & Structures Vol. 5(pp. 167~177)1975
- [2] Ji Zhen-yi and Wu chang-chun; Mixed variational principles of shallow shell in discretized analysis and application-a hybrid curved shell element of twelv degrees of freedom, Acta Mechanica Solida Sinica. August, No. 3, 1982
- [3] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly and Bettles; The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. International journal for numerical methods in engineering, Vol. 11(355~375)1977
- [4] 何广乾、林春哲、张凯:求解任意平面形状和任意边界条件的平移扁壳一种新的边界积分方法。中国建筑科学研究院资料。1984. 3
- [5] 坪井善勝:曲面構造シエルの理論とその応用。丸善出版社,东京。1965(pp. 252~258)

2. 扁壳分区混合能量原理及其应用^①

龙志飞 (中国矿业大学)

须寅 龙驭球 (清华大学)

摘要 本文给出扁壳分区混合能量原理的泛函一般形式。这里将扁壳分为多个分区,每个分区可任意定为势能区或余能区,可任意定为单类变量区或多类变量区,相邻分区交界线上的连接条件可部分或全部放松。扁壳的分区势能原理和分区余能原理是它的两种特殊情况。应用此原理可建立分区混合元和广义协调元等新型有限元。

一、扁壳分区混合能量泛函的通式

有限元的发展,促进了分区能量原理的研究。文献[1]~[6]讨论了三维弹性力学问题以及弹性薄板和厚板等情况的分区能量原理。本文进一步讨论扁壳的情况。

我们以扁壳的底面作为 xy 平面, z 轴垂直于底面(图1)。扁壳的中面方程为

$$z = z(x, y)$$

中面的初始曲率和扭率为

$$k_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, k_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, k_{xy} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

再取流动坐标 ξ, η, ζ 。其中 ζ 轴为中面的法线, ξ 和 η 分别为 xz 和 yz 平面内的中面切线。

扁壳中面任一点沿 ξ, η, ζ 方向的荷载分量 P_x, P_y, P_z , 位移分量 u, v, w 。扁壳有三个薄膜内力分量 N_x, N_y, N_{xy} , 相应的应变 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 。扁壳有三个独立的弯曲内力分量,即弯矩 M_x, M_y 和扭矩 M_{xy} , 相应的广义应变为曲率、扭率的变化值 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ 。此外,横向剪力 Q_x, Q_y 为不独立的内力分量,可由 M_x, M_y, M_{xy} 导出。薄壳中横向剪应变 γ_{xz}, γ_{yz} 设为零。

在扁壳边界线 C 上,令 n 和 s 为边界线的向外法线和切线方向。边界线上任一点沿 n, s, ζ 方向的位移分量为 u_n, v_s, w , 相应的边界力为法向拉力 N_n 、切向剪力 N_{ns} , 以及由横剪力 Q_n 和扭矩 M_{ns} 合成的等效横剪力 $V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$ 。边界线上在 $n\zeta$ 平面内的转角为 $\psi_n = \frac{\partial w}{\partial n}$, 相应的边界力为法向弯矩 M_n 。

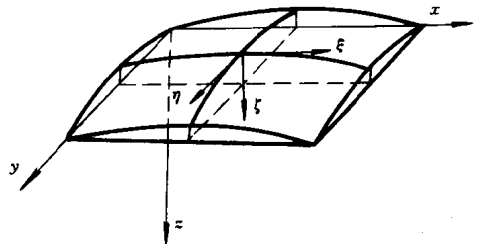


图1

^① 本文原刊于第二届空间结构学术交流会议论文集(1984),原名为“扁壳分区广义变分原理”。在编入本论文集时,作者作了部分修订。

扁壳的边界线 C 包含不同的边界线段:

$$C = C_{u_n} + C_{N_n} = C_{v_s} + C_{N_{ns}} = C_w + C_{v_n} = C_{\phi_n} + C_{M_n}$$

其中 $C_{u_n}, C_{N_n}, C_{v_s}, C_{N_{ns}}, C_w, C_{v_n}, C_{\phi_n}, C_{M_n}$ 分别为 $u_n, N_n, v_t, N_{ns}, w, v_n, \phi_n, M_n$ 为给定值的边界段。

边界线上的角点用 A 表示。 A 一般由两类角点组成:

$$A = A_w + A_R$$

其中 A_w 和 A_R 分别为给定挠度 \bar{w} 和横向集中力 \bar{R} 的角点。角点 A 两侧的扭矩增量为 $(\Delta M_{ns})_A$ 。

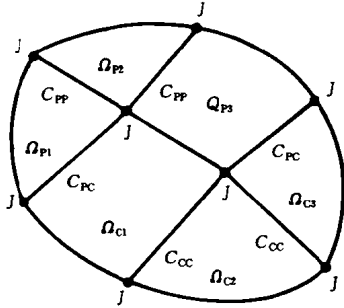


图 2

在扁壳分区广义变分原理中,扁壳中面及其底面被分割为多个分区。各个分区可任意定为势能区(图 2 中的 $\Omega_{p1}, \Omega_{p2}, \Omega_{p3}$)或余能区(图 2 中的 $\Omega_{c1}, \Omega_{c2}, \Omega_{c3}$)。各个分区中独立变分的量可任意定为三类变量(位移、内力和应变),二类变量(位移和内力)或一类变量(位移或内力)。相邻分区的交界线分为 C_{pc}, C_{pp}, C_{cc} 三类(图 2):在 C_{pc} 的一侧是势能区,另一侧是余能区;在 C_{pp} 的两侧都是势能区;在 C_{cc} 的两侧都是余能区。相邻分区的结点 J 一般也由两类结点 J_w 和 J_R 组成, J_w 和 J_R 分别为给定挠度 \bar{w} 和横向集中力 \bar{R} 的结点。用 r_p 和 r_c 分别表示结点 J

周围的势能区单元 e_p 的个数和余能区单元 e_c 的个数。

弹性扁薄壳分区广义变分原理的泛函可写成:

$$\Pi = \sum_{\Omega_p} \Pi_p - \sum_{\Omega_c} \Pi_c + \sum_{C_{pc}} H_{pc} + \sum_{C_{pp}} H_{pp} + \sum_{C_{cc}} H_{cc} + \sum_{J_w} G_w + \sum_{J_R} G_R \quad (1)$$

上式右边共有七项:第一项表示各势能区 Ω_p 的势能或广义势能 Π_p 之和。如采用三类、二类、一类变量,则 Π_p 分别为 Π_{3p}, Π_{2p} 和 Π_{1p} 。

第二项表示各余能区 Ω_c 的余能或广义余能 Π_c 之和。如采用三类、二类、一类变量,则 Π_c 分别为 Π_{3c}, Π_{2c} 和 Π_{1c} 。

第三、四、五项表示相邻分区交界线 C_{pc}, C_{pp}, C_{cc} 的附加能量 H_{pc}, H_{pp}, H_{cc} 之和。第六、七项表示结点 J_w, J_R 处的附加能量 G_w, G_R 之和。各项的表示式在下面依次给出。

可以证明,式(1)所示泛函的驻值条件 $\delta\Pi=0$ 等价于扁壳多区系统有关的全部场方程、边界条件、交界线的连接条件、角点和结点条件。

二、 各区三类变量广义势能 Π_{3p} 和广义余能 Π_{3c}

如果分区 e 采用三类独立变量,则 Π_p 和 Π_c 分别为下面 Π_{3p} 和 Π_{3c} :

$$\Pi_{3p}^{(e)} = \Pi'_{3p}{}^{(e)} + \Pi''_{3p}{}^{(e)} + I^{(e)} \quad (2)$$

$$\Pi_{3c}^{(e)} = \Pi'_{3c}{}^{(e)} + \Pi''_{3c}{}^{(e)} - I^{(e)} \quad (3)$$

其中

$$\Pi'_{3p}{}^{(e)} = \iint_{\Omega_e} \left[A'(\epsilon) - p_x u - p_y v - \left(\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) N_x - \left(\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} \right) N_y \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) N_{xy} \Big] dx dy - \int_{C_{N_n}^e} \bar{N}_n u_n ds - \int_{C_{N_{ns}}^e} \bar{N}_{ns} v_s ds \\
& - \int_{C_{u_n}^e} (u_n - \bar{u}_n) N_n ds - \int_{C_{v_s}^e} (v_s - \bar{v}_s) N_{ns} ds \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{3p}^{(e)} = & \iint_{\Omega_e} \left[A''(\kappa) - p_z w - \left(\kappa_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) M_x - \left(\kappa_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) M_y - 2 \left(\kappa_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) M_{xy} \right] \\
& \times dx dy - \int_{C_{V_n}^e} \bar{V}_n w ds + \int_{C_{M_n}^e} \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds - \sum_{A_{R_e}} \bar{R} w - \int_{C_{w_e}^e} (w - \bar{w}) V_n ds \\
& + \int_{C_{\psi_n}^e} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\psi}_n \right) M_n ds - \sum_{A_{w_e}} (w - \bar{w}) \Delta M_{ns} \tag{5}
\end{aligned}$$

$$I^{(e)} = \iint_{\Omega_e} (\kappa_x N_x + \kappa_y N_y + 2\kappa_{xy} N_{xy}) w dx dy \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\Pi'_{3c}{}^{(e)} = & \iint_{\Omega_e} \left[-A'(\epsilon) + \epsilon_x N_x + \epsilon_y N_y + r_{xy} N_{xy} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x \right) u \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y \right) v \right] dx dy - \int_{C_{N_n}^e} (N_n - \bar{N}_n) u_n ds \\
& - \int_{C_{N_{ns}}^e} (N_{ns} - \bar{N}_{ns}) v_s ds - \int_{C_{u_n}^e} \bar{u}_n N_n ds - \int_{C_{v_s}^e} \bar{v}_s N_{ns} ds \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{3c}^{(e)} = & \iint_{\Omega_e} \left[-A''(\kappa) + \kappa_x M_x + \kappa_y M_y + 2\kappa_{xy} M_{xy} + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p_z \right) w \right] \\
& \times dx dy - \int_{C_{V_n}^e} (V_n - \bar{V}_n) w ds + \int_{C_{M_n}^e} (M_n - \bar{M}_n) \frac{\partial w}{\partial n} ds - \sum_{A_{R_e}} (\Delta M_{ns} - \bar{R}) w \\
& - \int_{C_{w_e}^e} \bar{w} V_n ds + \int_{C_{\psi_n}^e} \bar{\psi}_n M_n ds - \sum_{A_{w_e}} \bar{w} \Delta M_{ns} \tag{8}
\end{aligned}$$

其中 $A'(\epsilon)$ 和 $A''(\kappa)$ 分别为中面内应变和薄板弯曲的应变能密度:

$$A'(\epsilon) = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\mu\epsilon_x\epsilon_y + \frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) \tag{9}$$

$$A''(\kappa) = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} [\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\mu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\mu)\kappa_{xy}^2] \tag{10}$$

E 和 μ 为材料的弹性模量和泊松比, h 为薄壳厚度。

三、 各区二类变量广义势能 Π_{2p} 和广义余能 Π_{2c}

如果分区 e 采用二类独立变量, 则 Π_p 和 Π_c 分别为下面的 Π_{2p} 和 Π_{2c} :

$$\Pi_{2p}^{(e)} = \Pi'_{2p}{}^{(e)} + \Pi''_{2p}{}^{(e)} + I^{(e)} \tag{11}$$

$$\Pi_{2c}^{(e)} = \Pi'_{2c}{}^{(e)} + \Pi''_{2c}{}^{(e)} - I^{(e)} \tag{12}$$