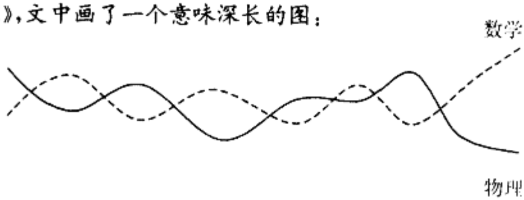
数学物理中的微分几何与拓扑学

汪容 编著

浙江大学出版社

前　言

陈省身先生于1980年春季在北京大学讲授微分几何时，曾谈起数学研究与理论物理研究之间的相互启发和相互促进。在他1982年出版的《理论物理与力学论文集》中有一篇文章，题目是《微分几何与理论物理》，文中画了一个意味深长的图：



这个图很形象地表达了数学和物理的发展既是互相独立的，又是互相启发和互相促进的，陈省身先生的这篇论文使读者们体会到在数学和理论物理的交叉中，蕴含着一种十分深刻的内在联系和推动力。

在这20世纪不久就要结束的时候，还不能预言下一个交叉点将是什么。但人们已经注意到，微分几何与拓扑学在数学物理中所起的作用必定是十分重要的。尤其引人注目的有两件事：

(i) 2维流形的共形变换群具有无穷多个生成元，这与$n>2$维流形的共形变换群只有$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$个生成元截然不同；

(ii) 4维欧氏空间R^4有不可数的无穷种互相不微分同胚的微分结构。这又和$n\neq 4$的R^n只有唯一的一种微分结构大不一样！同微分几何和拓扑学的进展有关的数学与物理新的交叉点将是什么呢？人们正在拭目以待。

作者深深感谢侯伯元教授、沈纯理教授和干丹岩教授的内容丰富的讲课和有益的讨论。

汪　容

1997年春于杭州浙江大学

目　　录

第1部分　微分流形

第 2 部分　整体拓扑性质

第 9 章　纤维丛上的联络与曲率

第 10 章　纤维丛的示性类与曲率张量

第 3 部分　指标定理和四维流形

第 11 章　无边界流形的指标定理

第 12 章　四维流形的一些重要性质

第 1 部分　微分流形

第 1 章　预备知识

§1.1　什么是流形

流形的概念来源于欧氏空间。n 维实流形就可看作是由一块块 R^n（实 n 维欧氏空间）粘起来的结果。因此，n 维实流形的最重要的特性就是在它的每一点的邻近，都有 n 维的局部坐标系。

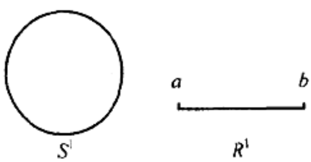


图 1.1.1

图 1.1.1 中，S^1 和 R^1 中的开区间 $a<x<b$ 都是一维实流形。

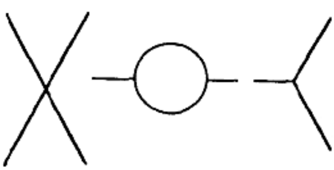
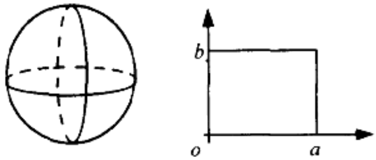


图 1.1.2

图 1.1.2 中各个一维图形都不是一维实流形，因为交点处及其邻近都不与 R^1 同胚。



S^2　　R^2

图 1.1.3

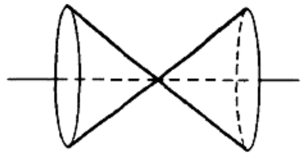


图 1.1.4

图 1.1.3 中 S^2(球面)和 R^2 中的开区间 $0 < x < a, 0 < y < b$ 都是二维实流形。

图 1.1.4 中的二维图形不是二维实流形,因为两锥交点及其邻近不与 R^2 同胚,同胚的意义见以下四个定义。

定义 1.1.1　设有两个空间 X 和 Y,$f(x) = y$ 是从空间 X 到空间 Y 的映射,而且**对于每一个** $y \in Y$ **都存在** $x \in X$(但存在的 x 可以不止一个),**满足** $f(x) = y$,则 $f: X \to Y$ 称为**满射**。

定义 1.1.2　设在 X 中任意取**两个不同的点** x_1, x_2,Y 中的 $y_1 = f(x_1)$ 与 $y_2 = f(x_2)$ **也都各不相同**,则 f **是一个一一对应的映射,简称一一映射**。

定义 1.1.3　如果 f **既是一一映射,又是满射,则称** f **为双射**。

定义 1.1.4　如果 X **与** Y **之间存在双射关系**,而且 f **和** f^{-1} 都是**连续函数**,则称 X **与** Y **之间存在**一个**同胚映射**。简称 X **与** Y **同胚**。

在**同胚映射下不变的性质称为拓扑性质**。如紧致性、分离性、连通性、开集维数 ……。拓扑性质又称拓扑不变性质。

根据"同胚"的定义,以及实流形是可分(由一块块 R^n 粘成)的,可以写出实 n 维流形的定义如下。

定义 1.1.5　实 n 维流形 M 是一个 Hausdorff 空间，它的每一个点有一个含有该点的开集与 R^n 的开集同胚。

Hausdorff 空间和开集都是拓扑学的重要概念。

定义 1.1.6　Hausdorff 空间是一个可分空间，其中任意两个分开的点各自具有互不相交的开邻域。

定义 1.1.7　开集 A 是给定空间（例如 Hausdorff 空间）中的点的子集合，开集 A 中的每一点的邻域都完全在 A 之中①。

§1.2　在流形中引入坐标与微分结构

令 f_U 代表定义 1.1.4 中的同胚映射，U 是流形 M 中的某个开集，则有

$$f_U: U \to f_U(U) \tag{1.2.1}$$

$f_U(U)$ 是 R^n 中的一个开集，(U, f_U) 称为流形 M 的一个**坐标卡**。

由于 f_U 是同胚映射，所以可以把 $f_U(z) \in R^n$ 在 R^n 上的坐标定义成为 M 上的 z 点的坐标：

$$u^i = (f_U(z))^i \qquad z \in U \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.2.2}$$

并且称 $u^i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 $z (z \in U)$ 的局部坐标。

又设 V 是流形 M 中的另一个开集，则又有同胚映射 f_V，

$$f_V: V \to f_V(V) \tag{1.2.3}$$

$f_V(V)$ 是 R^n 中另一个开集。(U, f_U) 和 (V, f_V) 都是流形 M 的**坐标卡**。一般来说，不能整个流形 M 与 R^n 同胚，所以 M 需要用若干个开集 $\{U_a\}$ 来覆盖它，写成

$$\bigcup_a U_a = M \tag{1.2.4}$$

---

① 开集 A 的定义与“邻域”的形状无关，与所选的距离函数也无关。

于是就有一系列的坐标卡$(U_1,f_{U_1}),(U_2,f_{U_2}),\cdots$，所有坐标卡的集合叫做坐标卡集$\mathscr{A}$：

$$\mathscr{A}=\{(U_1,f_{U_1}),(U_2,f_{U_2}),\cdots\} \tag{1.2.5}$$

设$U\cap V\neq\varnothing$，则$f_U(U\cap V)$和$f_V(U\cap V)$，必定是R^n中的两个非空开集，而且它们之间有如下关系：

$$\begin{aligned} &f_V\cdot f_U^{-1}:f_U(U\cap V)\rightarrow f_V(U\cap V)\\ &f_U\cdot f_V^{-1}:f_V(U\cap V)\rightarrow f_U(U\cap V)\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

仿照(1.2.2)式，同样可以把$f_V(z)\in R^n$上的坐标定义成为M上的z点的坐标

$$v^j=(f_V(z))^j \quad z\in V \quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.2.2$_2$}$$

于是(1.2.6)式就是M上开集$U\cap V$中的两种坐标u^i和v^j之间的坐标变换。$f_U\cdot f_V^{-1}$与$f_V\cdot f_U^{-1}$互为逆变换。

(1.2.6)式中的$f_U(U\cap V)$和$f_V(U\cap V)$都是R^n上的点，所以其坐标都是实连续函数，从而坐标变换$f_U\cdot f_V^{-1}$和$f_V\cdot f_U^{-1}$的矩阵元也应该是实连续函数，如图1.2.1所示。

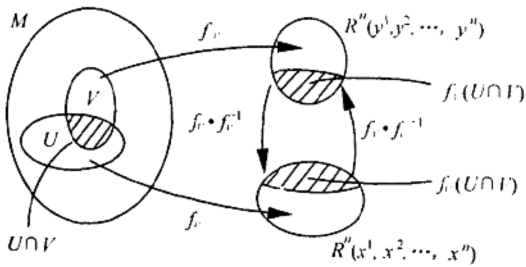


图1.2.1

图1.2.1中的x^i和y^j之间的连续变换可写成

$$\begin{aligned} y^j&=(f_V\cdot f_U^{-1}(x^1,\cdots,x^n))^j=\varphi^j(x^1,\cdots,x^n)\\ x^i&=(f_U\cdot f_V^{-1}(y^1,\cdots,y^n))^i=\psi^i(y^1,\cdots,y^n)\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

其中 φ^i 和 ψ^j 都是连续函数，并满足：

$$\begin{aligned}\varphi^i(\psi^1(y^1,\cdots,y^m)\cdots\psi^m(y^1,\cdots,y^m)) &= y^i \\ \psi^j(\varphi^1(x^1,\cdots,x^m)\cdots\varphi^m(x^1,\cdots,x^n)) &= x^i\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

如果 $U\cap V=\varnothing$，或者 $U\cap V\neq\varnothing$ 时，坐标变换(1.2.7)式中的坐标变换函数 $\varphi^i(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $\psi^j(y^1,\cdots,y^n)$ 都是 C^r 的，则称两个坐标卡 (U,f_U) 和 (V,f_V) 是 C^r-相容的。"C^r-"的含义是：微分一直到 r 次都是保持连续的。

定义 1.2.1 设 n 维流形 M 上给定的坐标卡集 $\mathscr{A}=\{(U_1,f_{U_1}),(U_2,f_{U_2},\cdots\}$ **满足下列三个条件，则** $\mathscr{A}$ **是** M **的一个** C^r **微分结构。**

(i) $(U_1,U_2,\cdots)$ 是 M 的一个开覆盖(开覆盖是指 $\bigcup U_i=M$)

(ii) $\mathscr{A}$ 中的任意两个坐标卡是 C^r-相容的。

(iii) $\mathscr{A}$ 是最大的坐标卡集，就是说，M 上任意一个坐标卡 $(\widetilde{U},f_{\widetilde{U}})$ 如果与属于 $\mathscr{A}$ 的每一个坐标卡都 C^r-相容，则 $(\widetilde{U},f_{\widetilde{U}})$ 必也属于 $\mathscr{A}$。于是，$\mathscr{A}$ 就是 M 的一个 C^r 微分结构。

定义 1.2.2 M 上如果有一个 C^r 微分结构，则 M 就是一个 **C^r-微分流形。**

定义 1.2.3 若流形 M 上有一个 C^∞ 微分结构，则 M 就是一个**光滑流形**，或者称为**微分流形**(differential manifold)。

定义 1.2.4 若流形 X 和 Y 不但同胚(Homeomorphic)，而且它们之间的同胚映射是 C^∞ 可微的，则称 X 与 Y 为微分同胚(diffeomorphic)。两个微分同胚的流形必定同胚，但两个同胚的流形不一定微分同胚。

1956 年，Milnor 证明：存在若干种 7 维流形，它们都与 7 维球 S^7（拓扑）同胚，但微分结构都各不相同（不微分同胚）。

20 世纪 80 年代，Donaldson，Freedman，Kirby 和 Taubes 通过一系列的研究，发现 4 维欧氏空间 R^4 除通常的微分结构外，还有不可数的无穷多种不寻常的微分结构。换句话说，就是存在不可数的无穷多种 R^4，它们互相不微分同胚，但是互相拓扑同胚。

以下是微分流形的几个有代表性的例子。

例 1 n 维球面：

$$S^n = \{(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$$

用两个开集 U_+, U_- 就可以覆盖。

北多半球 $U_+ = S^n - (0,0,\cdots,-1)$，相应的映射 f_+ 是：

$$f_+ : (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \to \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \frac{x^2}{1+x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right)$$

南多半球 $U_- = S^n - (0,0,\cdots,1)$，相应的映射 f_- 是：

$$f_- : (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \to \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \frac{x^2}{1-x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right)$$

可证明它们是 C^∞ 相容的，所以 S^n 是光滑流形。目前，已知除上述微分结构外，对于 S^7, S^9, S^{11} 还有其他的微分结构，所以存在不止一种（拓扑）同胚而又不微分同胚的 S^7, S^9, S^{11}。

例 2 实 Grassmann 流形 $Gr(N,k)$ 是 N 维向量空间中通过原点的 k 维线性子空间的集合。k 维线性子空间的维数就是 k，k 维线性子空间在 N 维向量空间中各种取向的自由度为 $(N-k)$，所以 $Gr(N,k)$ 的总维数应该是 $k(N-k)$。

$Gr(N,k)$ 有 C^∞ 微分结构，从而是 $k(N-k)$ 维微分流形。

例 3 实 n 维射影空间 $RP(n)$ 是 $Gr(N,k)$ 取 $N=n+1, k=1$ 的实 Grassmann 流形，所以它的维数是 $k(N-k)=n$。

$RP(n)$ 有 C^∞ 微分结构，是实 n 维微分流形。

例 4 复 Grassmann 流形 $Gr(N,k,c)$ 是复 C^N 向量空间（C 代表复数）中通过原点的复 k 维线性子空间的集合。复 k 维线性子空间的

维数是 k，复 k 维线性子空间在复 N 维向量空间中取向的自由度为 $(N-k)$，所以 $Gr(N,k,c)$ 的维数是 $k(N-k)$（复数的维数）。

例 5 复 n 维射影空间 $CP(n)$ 是 $Gr(N,k,c)$ 中取 $N=n+1$，$k=1$ 的复 Grassmann 流形。它的维数也是 $k(N-k)=n$。

$CP(n)$ 有 C^{∞} 微分结构，是复 n 维微分流形。以下考察一下 $CP(1)$ 的性质：

$CP(1)$ 就是 $Gr(N=2,k=1,c)$，有两个复坐标，记作 $z=(z_1,z_2)$，z_1,z_2 不能同时为 0，可取两个开集覆盖：

(1) $U_{z_1\neq 0}$：取坐标， $\zeta=\dfrac{z_2}{z_1}$；

(2) $U_{z_2\neq 0}$：取坐标， $\zeta'=\dfrac{z_1}{z_2}$。

在交叠区（z_1,z_2 都 $\neq 0$），可取

$$\zeta=\frac{z_2}{z_1}=u+\mathrm{i}v,\quad \zeta'=\zeta^{-1}=\frac{z_1}{z_2}=\frac{u-\mathrm{i}v}{u^2+v^2},\quad \zeta\zeta'=1$$

存在映射：

$$f:U_{z_1}\to U_{z_2},\quad f:\zeta\to\zeta'$$

从而可见：

$$f:(u,v)\to\left(\frac{u}{u^2+v^2},-\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

这是一个复解析映射，故 $CP(1)$ 是一个复解析流形。如果换变数：

$$u=\frac{x}{1+z},v=\frac{-y}{1+z}$$

（因 $x^2+y^2+z^2=1$，仍只有两个自变数）

则

$$\frac{u}{u^2+v^2}=\frac{x/(1+z)}{(1-z^2)/(1+z)^2}=\frac{x}{1-z}$$

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{y/(1+z)}{(1-z^2)/(1+z)^2}=\frac{y}{1-z}$$

可见映射（ * ）的 $f:U_{z_1}\to U_{z_2}$ 就是

$$f:\left(\frac{x}{1+z},\frac{-y}{1+z}\right)\to\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$$

对照例 1 的 2 维球面 S^2 的情况($n=2$),U_+ 到 U_- 的映射为

$$f': U_+ \to U_-,$$

$$f': \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \to \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

由此可见,$CP(1)$ 的两个开覆盖 U_{z_1}, U_{z_2} 之间的映射关系与 S^2 的两个开覆盖之间的映射关系只相差一个镜象反射(前者是 $\frac{-y}{1+z} \to \frac{y}{1-z}$,后者是 $\frac{y}{1+z} \to \frac{y}{1-z}$),所以 $CP(1)$ 和 S^2 两个流形不但同胚,而且微分同胚(镜象反射不改变同胚和微分同胚关系)。

定义 1.2.5 若 n 维流形 M 的一组开集 $U_1, U_2, \cdots$(每一个 U_i 都具有有限的 n 维体积)的集合 $\mathscr{A} = \{U_i\}$ 满足

$$\bigcup_i U_i = M$$

则称 $\mathscr{A} = \{U_i\}$ 为流形 M 的开覆盖。

定义 1.2.6 若 $\mathscr{A}'$ 是开覆盖 $\mathscr{A}$ 的一个子集合,而且 $\mathscr{A}'$ 本身仍是 M 的开覆盖,$\mathscr{A}'$ 就称为开覆盖 $\mathscr{A}$ 的一个子覆盖。

定义 1.2.7 若开覆盖 $\mathscr{A} = \{U_i\}$ 中的 U_i 个数有限,则这个覆盖称为有限覆盖。

定义 1.2.8 若流形 M 的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖,则流形 M 是紧致的,反之是非紧致的。

根据以上定义可以推论 R^n 是非紧致的,因为不可能用任何有限子覆盖把 R^n 的无限的 n 维空间都覆盖起来。反之,S^n,$RP(n)$,$CP(n)$ 以及 $S^1 \times S^1 = T^2$(二维环面)都是紧致流形。

紧致性也是一种拓扑不变性,在同胚映射下是不变的。

定义 1.2.9 两个微分流形 M 和 N 的乘积流形 $M\times N$ 仍是微分流形。若 $\{U_i,f_i\}$ 和 $\{V_j,g_j\}$ 分别为 M 和 N 的坐标卡集，且存在光滑的投影

$$\Pi_1: M\times N\to M,\qquad \Pi_2: M\times N\to N$$

则 $M\times N$ 流形上的坐标卡集就是 $\{U_i\times V_j; f_i\cdot\Pi_1\otimes g_j\cdot\Pi_2\}$。

由此可决定乘积流形的微分结构：

M 维数 $+$ N 维数 $=$ $M\times N$ 维数

§1.3 切空间和余切空间

设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，$x=x(t)$ 是 t 的函数，则 x 在 $x_P=x(t_P)$ 的邻近可建立如下的线性近似关系：

$$\begin{aligned} y &= f(x_P)+(t-t_P)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=x_P} \\ &= f(x_P)+(t-t_P)v_P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_P \end{aligned} \tag{1.3.1$_1$}$$

推广到 n 维流形 M，设 $y=f(x^1,\cdots,x^n)$ 是 $x^1,\cdots,x^n$ 的函数。$x^i=x^i(t)$ 是 t 的函数，则在 $x^i=x^i_P=x^i(t_P)$ 的邻近，可建立如下的线性近似关系：

$$\begin{aligned} y &= f(x^1_P,x^2_P,\cdots,x^n_P)+(t-t_P)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \\ &= f(x^1_P,x^2_P,\cdots,x^n_P)+(t-t_P)v^i_P\frac{\partial}{\partial x^i}f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \end{aligned} \tag{1.3.2$_1$}$$

其中 $v^i_P=\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_P$ 是 x^i 方向的“速度”。

(1.3.1)$_1$ 式和 (1.3.2)$_1$ 式分别给出了 $f(x)$ 和 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 在 P 点随 t 的变化，从而又可定义 X_P 如下 $\left(\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_P=v^i_P\right)$：

$$X_P f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x)\Big|_P = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_P \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\Big|_P = v_P \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\Big|_P \tag{1.3.1$_2$}$$

$$\begin{aligned} X_P f(x^1,\cdots,x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \\ &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_P \frac{\partial}{\partial x^i} f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \\ &= v^i_P \frac{\partial}{\partial x^i} f(x^1,\cdots,x^n)\Big|_P \end{aligned} \tag{1.3.2$_2$}$$

$(1.3.1)_2$ 和 $(1.3.2)_2$ 式中的 $f(x)$ 和 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 是任意的函数，唯有 $(1.3.1)_2$ 中的

$$X_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = v_P \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_P \tag{1.3.1$_3$}$$

及 $(1.3.2)_2$ 中的

$$X_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = v^i_P \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P \tag{1.3.2$_3$}$$

与 $f(x)$ 和 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 无关，与坐标系的选择也无关。所以，就把 $(1.3.1)_3$ 和 $(1.3.2)_3$ 中的 $X_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$ 定义为**切向量**①。举例来说，若是在 n 维流形 M 中有一条在 $t=0$ 时过 P 点的曲线

$$x^i = x^i(P) + \eta^i t + O(t^2)$$

则正好可得到在 $t=0$ 点切于此曲线的切向量

$$Y_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P \tag{1.3.3}$$

与 $(1.3.2)_3$ 一致。

定义 1.3.1 过 P 点的所有切向量的集合形成流形 M 在 P 点的**切空间** $T_P(M)$。如果 $\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ 有 n 个，则 $T_P(M)$ 就是 P 点的 n 维的切空间。

---

① 本文涉及到的向量均是指任意维流形上的向量，不同于一般欧氏空间的向量，按国际惯例，不用黑体表示。

再把切向量 X_P 推广，即不限于只在 P 点有定义，而且在流形 M 上的每一点都有定义。于是 X_P 就扩充为 $X(x)$，$(1.3.2)_3$ 式就扩充为

$$X(x) = \sum_j \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.3.4}$$

$X(x)$ 是 x 的函数，代表各个 x 点上的切向量，所以在每一个点 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 都有定义。从而 $X(x)$ 具有场的性质，取名为**切向量场**。

若是有任意两个切向量场

$$X(x) = \sum_i \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y(x) = \sum_j \eta^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.3.5}$$

就可定义它们的李括号$[X,Y]$如下：

$$\begin{aligned}[X,Y]f &= X(Yf) - Y(Xf) \\ &= \left(\xi^j(x) \frac{\partial \eta^k(x)}{\partial x^j} - \eta^j(x) \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} f\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

后面在讨论李导数时，还会用到李括号。

接着再引入余切空间：余切空间的基是 $\mathrm{d}x^i (i = 1,2,\cdots,n)$，切空间的基是$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$n$ 是流形 M 的维数。

我们把 n 维流形 M 上 P 点的**切空间** $T_P(M)$ 的**对偶向量空间**定义为 M 上 P 点的**余切空间**，记作 $T_P^*(M)$。

为了说明切空间和余切空间的对偶关系，我们引入符号$\langle , \rangle$，它的使用规则就是

$$\langle \mathrm{d}f, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i} f \tag{1.3.7}$$

由此可见

$$\langle \mathrm{d}x^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j \tag{1.3.8}$$

这就是切向量的基$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$和余切向量的基 $\mathrm{d}x^j$ 的对偶关系。从而以$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 为基的切向量空间 $T_P(M)$ 和以 $\mathrm{d}x^j (j = 1,2,\cdots,n)$ 为基的余切向量空间 $T_P^*(M)$ 也是相互对偶的（P 代表 M 上的任何

一点）。

定义 1.3.2 流形 M 上的所有各点 P 的切向量空间的并集

$$T(M)=\bigcup_P T_P(M) \tag{1.3.9}$$

称为流形 M 的**切丛**。

定义 1.3.3 流形 M 上所有各点的余切向量空间的并集

$$T^*(M)=\bigcup_P T_P^*(M) \tag{1.3.10}$$

称为流形 M 的**余切丛**。

$T(M)$ 和 $T^*(M)$ 都是 $2n$ 维流形，局域都是直积流形（即 n 维的坐标空间与 n 维的向量空间的直积）。

由于 $\mathrm{d}x^j$ 就是余切向量的基，所以 P 点的余切向量应写成

$$\sigma(P)=\sigma_j(P)\mathrm{d}x^j$$

把 P 点推广到 M 上每一个点 $x(x^1,\cdots,x^n)$，则形成**余切向量场**

$$\sigma(x)=\sigma_j(x)\mathrm{d}x^j \tag{1.3.11}$$

进一步再设 $\sigma_j(x)$ 是可微的，则(1.3.11)式的 $\sigma(x)$ 称为可微余切场。可微余切场 $\sigma(x)$ 又称为 1-形式（因为式中含有一个 $\mathrm{d}x^j$）。若取 $\sigma_j(x)=\delta_{ij}$，则 $\sigma(x)=\mathrm{d}x^i$，所以 $\mathrm{d}x^i$ 本身就是一个 1-形式。

§1.4 微分形式与外微分

定义 1.4.1 1-形式 $\mathrm{d}x^i$ 与 1-形式 $\mathrm{d}x^j$ 的 Cartan 外乘 $\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$ 是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j&=(\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j-\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^i)\\&=\delta^{ij}_{kq}\mathrm{d}x^k\otimes\mathrm{d}x^q\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

$$(\delta^{ij}_{kq}=\delta^i_k\delta^j_q-\delta^i_q\delta^j_k)$$

$\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$ 是一个 2-形式（有两个 1-形式相乘），是一组有两个指标 i，