数学分析习题课教程

下册

华东师范大学数学系　　郑英元　毛羽辉　宋国栋　　编

数学分析习题课教程

下　册

华东师范大学数学系
郑英元　毛羽辉　宋国栋　编

高等教育出版社

（京）112 号

内 容 提 要

本书是编者经多年教学实践，积累了丰富教学经验编写而成．

全书按华东师范大学数学系编《数学分析》下册（第二版）（第一版于 1987 年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中荣获全国优秀奖）的十一章目录顺序编排．各章分成若干单元，每单元编有“本单元习题课要求”、“复习与思考”、“例题”、“补充练习题”等四部分内容，书末还附有补充练习题答案与提示．

本书对复习与思考、例题等作了精心的安排与选择，并对一些例题给出了分析与总结，以加深读者对《数学分析》内容的理解和提高解题能力．

本书可作为高等院校数学分析习题课教材，也可作为《数学分析》课程的辅助读物．

数学分析习题课教程
下　册
华东师范大学数学系
郑英元　毛羽辉　宋国栋　编
·
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市顺新印刷厂印装
·
开本 850×1168 1/32 印张 8.25 字数 210 000
1993 年 4 月 第 1 版 1993 年 4 月 第 1 次印刷
印数 0001—6 205
ISBN 7-04-004148-0/O·1192
定价 3.60 元

目　录

第十二章 数 项 级 数

第一单元 级数的收敛性·正项级数

一 本单元习题课要求

1. 进一步理解数项级数的收敛、和与发散等概念；

2. 掌握级数收敛的柯西准则；

3. 能较熟练地运用正项级数的比较原则、比式判别法、根式判别法与积分判别法。

二 复习与思考

1. 什么是无穷级数？能不能简单地说“无穷级数就是无穷多个实数相加”？

2. 级数 $\sum u_n$ 的收敛与发散是怎样定义的？如何使级数的敛散问题与数列的敛散问题相互转化？

3. 什么是级数收敛的柯西准则？它是怎样证明的？

4. 设 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都是发散的级数。对下列级数

$$\sum(u_n+v_n),\ \sum(u_n-v_n),\ \sum u_n v_n,\ \sum\frac{u_n}{v_n}\quad (v_n\neq 0)$$

的敛散性能否得出肯定的结论？

5. 叙述正项级数的比较原则、比式判别法、根式判别法与积分判别法。

6. 以下结论对不对：

1） 若级数 $\sum u_n$ 发散，则通项 u_n 必不趋于 0；

2） 若级数 $\sum u_n$ 的部分和序列有界，则 $\sum u_n$ 收敛；

3） 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 的通项满足 $u_n\leqslant v_n$，且 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 也收敛；

4） 若正项级数 Σu_n 满足

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\ n=1,\ 2,\ \cdots \text{ 或 } \sqrt[n]{u_n}<1,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

则 Σu_n 收敛；

5） 若对级数 Σu_n 的项加括号后所得级数发散，则原级数 Σu_n 也发散。

7． 按下列要求举出数项级数的例子：

1） 级数 Σa_n 收敛，Σb_n 发散，且 $a_n \geqslant b_n$；

2） 级数 Σa_n 的部分和数列有界，但 Σa_n 是发散的；

3） 级数 Σa_n 的部分和数列有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，但级数 Σa_n 发散。

三 例题

例1 证明下列级数收敛，并求和：

1） $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$；　　2） $\sum\frac{1}{n(n+2)}$。

［分析］ 先求级数的第 n 个部分和 S_n，然后再求 $n\to\infty$ 时，S_n 的极限。

［证］ 1） 这是公比为 $-\frac{1}{3}$ 的几何级数，所以第 n 个部分和的极限为

$$S_n=\frac{1-(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\to\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\quad(n\to\infty),$$

即 $\sum(-1)^n\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{4}$。

2） 采用如下方法求级数的部分和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4},$$

即 $\sum\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}$.

［说明］　1°　为求收敛级数的和，一般必须先求其部分和，然后再求极限.

2°　对于2）题若只单纯讨论其收敛性，则可用正项级数的比较判别法. 由不等式$\frac{1}{n(n+2)}<\frac{1}{n^2}$及级数$\sum\frac{1}{n^2}$的收敛性，即可知级数$\sum\frac{1}{n(n+2)}$是收敛的.

3°　应用2）题的证明技巧，请读者作为练习证明：对任何自然数 p，有

$$\sum\frac{1}{n(n+p)}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right).$$

例2　设 $a_n\neq0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ (\neq0)$. 证明：级数 $\sum|a_{n+1}-a_n|$与$\sum\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$具有相同的敛散性.

［分析］　所讨论的两个级数都是正项级数. 若它们对应项比的极限大于0，则由比较原则知它们具有相同的敛散性.

［证］　由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}-a_n|}{\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|a_na_{n+1}|=a^2>0,$$

故依比较原则，级数$\sum|a_{n+1}-a_n|$与$\sum\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$同时收敛或同时发散。

［说明］　注意：仅当两个级数都是同号级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\neq0$$

时，级数Σu_n和Σv_n才同时收敛或同时发散。倘若是变号级数就不能保证上述命题成立。如

$$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n},\qquad v_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

虽然　$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1,$$

但Σv_n是收敛的（它的证明在下一单元将容易得到），而Σu_n却是发散的（为什么?）。

例3　研究下列级数的敛散性：

1）$\sum\frac{1}{3^{n+(-1)^n}}$；　　2）$\sum\frac{n!}{n^n}x^n$　$(x>0)$；

*3）$\sum\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$　$(x>0)$。

［分析］　这里都是正项级数，主要的判别法有比式判别法与根式判别法。一般说，比式判别法要比根式判别法简单一些，但由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

而反过来却不一定能成立。因此，能用根式判别法鉴定其收敛性的级数，要比用比式判别法鉴定其收敛性的级数更广泛。

［解］ 1）由于

$$\frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{1}{3}}=\sqrt[n]{\frac{1}{3^{n+1}}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{3^{n+(-1)^n}}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{3^{n-1}}}=\frac{1}{3}\sqrt[n]{3}$$

及
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{1}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt[n]{3}=\frac{1}{3}。$$

故由数列极限的迫敛性定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^{n+(-1)^n}}}=\frac{1}{3}.$$

根据根式判别法，级数 $\sum\frac{1}{3^{n+(-1)^n}}$ 收敛。

2）记 $u_n=\frac{n!}{n^n}x^n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{x}{e}<1(\text{当 } x<e \text{ 时}).$$

根据比式判别法，级数 Σu_n 在 $x<e$ 时收敛．又当 $x\geqslant e$ 时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\frac{x}{e}\geqslant 1.$$

因此，在 $x\geqslant e$ 时，Σu_n 是发散的。

3） 记 $u_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$$

因此，不论 $x\geqslant0$ 为何值，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，因而级数 Σu_n 对

任何正实数 x 都是收敛的。

[说明] 1° 对于第1)题若采用比式判别法来鉴定其收敛性，记 $u_n=\frac{1}{3^{n+(-1)^n}}$，则出现

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{27}, & n\text{ 为奇数，}\\ 3, & n\text{ 为偶数。}\end{cases}$$

因而无法由此判断级数的敛散性。所以本题不适宜用比式判别法来鉴定其收敛性。

2° 第 2）题也可以用根式判别法来讨论，因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}x^n}=x\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{x}{e}.$$

$\left(\text{这里极限}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}\text{，参见课本① 第二章总练习题 4(5)}\right)$.

例 4 设正项级数 Σu_n 发散，S_n 为该级数的第 n 个部分和。证明：级数 $\sum\frac{u_n}{S_n}$ 也是发散的。

[分析] 根据柯西准则，级数 $\sum\frac{u_n}{S_n}$ 发散的充要条件是：存在某正数 ε_0，对任何自然数 N，总存在自然数 $m_0(>N)$ 和 p_0，有

$$\left|\frac{u_{m_0+1}}{S_{m_0+1}}+\frac{u_{m_0+2}}{S_{m_0+2}}+\cdots+\frac{u_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}}\right|\geqslant\varepsilon_0. \qquad (1)$$

因此，本题的证明技巧，主要在于寻求适当的 ε_0 和 p_0。

[证] 由于 $u_n>0$ 且 Σu_n 发散，故对任何自然数 N，只

① 本书"课本"均指华东师范大学数学系编《数学分析》(第二版)，高等教育出版社。

要m足够大，便有$\frac{S_N}{S_m}<\frac{1}{2}$。因而得到

$$\left|\sum_{k=N+1}^{m}\frac{u_k}{S_k}\right|=\frac{u_{N+1}}{S_{N+1}}+\cdots+\frac{u_m}{S_m}$$

$$>\frac{u_{N+1}+\cdots+u_m}{S_m}$$

$$=\frac{S_m-S_N}{S_m}=1-\frac{s_N}{s_m}>\frac{1}{2}。$$

故取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2},m_0=N,p_0=m-m_0$时，便有(1)式成立．由柯西准则，级数 $\sum\frac{u_n}{S_n}$是发散的。

例 5　1）设Σa_n为正项级数，证明：若$a_n\sim\frac{c}{n^p}$　$(n\to\infty)$，$c>0$，则Σa_n与级数$\sum\frac{1}{n^p}$同时收敛或同时发散；

2）应用 1）的结论鉴别下列级数的敛散性：

(i)　$\sum n^a\sin\frac{1}{n}$；　　　　(ii)　$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n-1}$；

*(iii)　$\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+an+b}\right)$，$0\leqslant a\leqslant2$，$0\leqslant b\leqslant1$。

［证］　1）　由　$a_n\sim\frac{c}{n^p}$　$(n\to\infty)$　可推得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}=c>0。$$

根据正项级数的比较原则，级数 Σa_n 与 p 级数同时收敛（$p>1$）或同时发散（$p\leqslant 1$）。

2）（i）由

$$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)\Rightarrow n^{\alpha}\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^{1-\alpha}}\qquad(n\to\infty).$$

于是，当$1-\alpha>1$即$\alpha<0$时，级数$\sum n^{\alpha}\sin\frac{1}{n}$收敛；当$1-\alpha\leqslant 1$即$\alpha\geqslant 0$时，级数$\sum n^{\alpha}\sin\frac{1}{n}$发散。

（ii）因为

$$\ln\frac{n+1}{n-1}=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sim\frac{2}{n-1}\qquad(n\to\infty),$$

故由级数$\sum\frac{2}{n-1}$发散推得级数$\sum\frac{n+1}{n-1}$发散。

（iii）设$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+an+b}$，则

$$a_n=\frac{n+1-\sqrt{n^2+an+b}}{\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+an+b}}$$

$$=\frac{(n+1)^2-(n^2+an+b)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+an+b})(n+1+\sqrt{n^2+an+b})}$$

$$=\frac{(2-a)n+(1-b)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+an+b})(n+1+\sqrt{n^2+an+b})}$$

由于

$$\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+an+b})}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(n+1+\sqrt{n^2+an+b})}{n}$$

$$=\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}\right)$$

$$\to 4 \quad (n\to\infty).$$

所以
$$a_n \sim \begin{cases} \dfrac{2-a}{4\sqrt{n}}, & a\neq 2 \text{ 时}, \\ \dfrac{1-b}{4n\sqrt{n}}, & a=2 \text{ 时}. \end{cases}$$

故由$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$发散，$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，得 Σa_n 在 $a\neq 2$ 时发散，在 $a=2$ 时收敛。

*例 6　设 Σa_n 为正项级数．证明如下对数判别法：

1)　若存在 $\varepsilon>0$ 及自然数 N，使得当 $n>N$ 时有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\varepsilon,$$

则 Σa_n 收敛；

2)　若存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1,$$

则 Σa_n 发散．

［证］ 1)　当 $n>N$ 时有

$$\ln\frac{1}{a_n}\geqslant(1+\varepsilon)\ln n \Rightarrow \frac{1}{a_n}\geqslant n^{1+\varepsilon}\Rightarrow a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

由于$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$收敛，所以 Σa_n 也收敛。

2)　当 $n>N$ 时有

$$\ln\frac{1}{a_n}\leqslant\ln n\Rightarrow\frac{1}{a_n}\leqslant n\Rightarrow a_n\geqslant\frac{1}{n}.$$

由于$\sum\frac{1}{n}$发散，所以Σa_n也发散。

四　补充练习题

12.1.1　试作一无穷级数，使其部分和$S_n=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$，

12.1.2　求下列级数的和：

(1)　$\sum\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$；

(2)　$\sum\frac{1}{n^2+6n+5}$。

12.1.3　证明：若级数$\Sigma n(a_n-a_{n-1})$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$存在，则级数$\Sigma a_n$收敛。

12.1.4　设正项级数Σa_n收敛。证明级数$\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$$\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$也收敛。

12.1.5　证明

$$\sum\frac{1}{n(n+p)}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right),$$

p为给定的自然数。

12.1.6　利用例5的结论判别以下级数的敛散性：

(1)　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n+1}{n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)^{a}$.

*12.1.7　利用例 6 中的对数判别法，讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum n^{\ln x}(x>0)$；　　　　(2) $\sum \frac{1}{3^{\ln n}}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

*12.1.8　设Σa_n为正项级数。证明：若 $a_{n+1}\leqslant a_n$ $(n=1,2,\cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=l,$$

则当 $l<\frac{1}{2}$时 Σa_n 收敛；$l>\frac{1}{2}$时 Σa_n 发散；$l=\frac{1}{2}$时不能作出判断。

并用此方法判断级数$\sum\frac{n!}{n^n}e^n$收敛（例3的第2）题在$x=e$之情况）。

*12.1.9　证明恒等式

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

并由此证明

$$\Sigma(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2。$$

*12.1.10　证明：级数 $\sum a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$，当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时收敛，当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时发散。

*12.1.11　证明：若 f 为 $[a,+\infty)$ 上单调递减的正值函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则非正常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ 与极限 $\lim\limits_{h\to 0}h\Sigma f(nh)\,(h>0)$ 同时收敛，且

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{h\to 0}h\Sigma f(nh).$$

12.1.12　研究下列级数 Σa_n 的敛散性：

(1) $\sum\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$；　　(2) $\sum\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$；

(3) $\sum\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$；　　(4) $\sum\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$。

第二单元　一般项级数

一　本单元习题课要求

1. 掌握交错级数的莱布尼兹判别法；

2. 进一步理解级数的绝对收敛与条件收敛概念，掌握绝对收敛级数的有关性质；

3. 学会运用阿贝耳判别法和狄利克雷判别法。