偏微分方程理论

利伯斯坦
H. M. Lieberstein 著
蒋定华 译
林建祥 校

高等教育出版社

本书是根据 H. Melvin Lieberstein 所著的《Theory of Partial Differential Equations》一书英文版译出的. 全书共有十五章, 分为四个部分.

本书作者力图引导读者从偏微分方程的"初等水平进到现代分析研究的水平"; 对于偏微分方程在传输线理论、流体力学、电生理等方面的应用做了比较深入而生动的介绍; 作者在书中还阐述了某些数学概念的实际背景和解决问题的思路, 而不只是给出形式的数学推导.

本书可供理工科各专业大学生、研究生及教师参考.

偏微分方程理论

H. M. Lieberstein 著

蒋定华 译 林建祥 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张10·25 字数 240,000

1983 年 1 月第 1 版 1984 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—13,900

书号 13010·0850 定价 1.60 元

目　录

序言

第Ⅰ部分　概论

第 II 部分 两个自变量的非线性方程的一些古典结果

第 III 部分 高维空间中 Laplace 方程和波动方程的一些古典结果

第 IV 部分　椭圆-抛物型方程的边值问题

第 I 部分

概　　论

第一章　特征理论，分类和 E^2 中的波动方程

1. 对 E^2 中齐次波动方程的 Cauchy 问题的 D'Alembert 解

让我们考虑在什么条件下可能确定方程

$$u_{xx}-u_{yy}=0 \tag{1.1.1}$$

满足条件

$$u(x,0)=f(x) \quad 和 \quad u_y(x,0)=g(x) \tag{1.1.2}$$

的唯一解，其中 $f:(a,b)\to R^1$ 和 $g:(a,b)\to R^1$. 我们知道，作为这个工作的一部分，是要首先正确地解决我们说一个函数 u 是(1.1.1), (1.1.2)的解时，其意思是什么，以及给定的函数 f 和 g 必须具有什么性质才能使得这样的一个解存在而且是唯一的. 为了这个目的，我们把坐标系旋转 45°,

$$\xi=\frac{1}{2}(x+y),\quad \eta=\frac{1}{2}(x-y), \tag{1.1.3}$$

将链式法则用于函数 u 上来改写方程 (1.1.1). 这里我们需要注意，实际上有两个函数关系牵连进来，一个是看成 x 和 y 的函数，另一个是看成 ξ 和 η 的函数，后者是作为由 x 和 y 按照关系式(1.1.3)组合而成的复合函数. 这两个函数在由于关系式(1.1.3)而被看成等同的点(x,y)和(ξ,η)上有同样的函数值. 这一点以后不再重复说明. 因为由复合函数所产生的函数值相同，我们将用同一个符号 u 表示这两个函数. 如果单从上下文看不清楚是用的哪一个函数关系，那么我们就可以把函数写成 $u(x,y)$或 $u(\xi,\eta)$，但对于两个函数将仍用同一个符号 u. 只要我们对所做的有一致

的理解，这就不会引起混淆，而将有助于我们在哪些函数值被看作等同的方面保持表达方式的整齐. 如果我们在广泛的应用范围中经常遇到的一长串一长串的变数替换时，这样理解将特别有用. 就我们所知，所有偏微分方程的教科书都是用这种习惯书写的，然而当函数关系和它们的函数值之间的区别，尤其是在初等训练中的区别需要特别强调时，这似乎还是需要额外声明的. 总之，这将适用于整个这本书而不再作申明，除非是由于论证的性质而特别需要澄清的地方才作别论.

从链式法则我们有

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \frac{1}{2}(u_\xi + u_\eta)$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{2}(u_\xi - u_\eta)$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{2}[(u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_x] \\ &= \frac{1}{4}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \frac{1}{2}u_{\xi\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \frac{1}{2}[(u_\xi - u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi - u_\eta)_\eta \eta_y] \\ &= \frac{1}{4}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - \frac{1}{2}u_{\xi\eta} \end{aligned}$$

从而(1.1.1)变成

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{1.1.4}$$

这里已经假定了 $u_{\xi\eta}$ 和 $u_{\eta\xi}$ 是连续的，因而是相等的；就是说，我们现在只限于寻找具有这个性质的解.

现在来找(1.1.4)的全体解. 方程(1.1.4) 意味着 u_ξ 仅是 ξ 的函数. 如果这个函数是可积的，那么我们可以得出

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) \tag{1.1.5}$$

其中 G 是由最后这次“积分” 引进的 η 的任意函数，而 F，作为 u_ξ

(仅是ξ的函数)的原函数,也是任意的.

这样我们已经证明了,(1.1.4)的使得u_ξ是可积的所有的解就是形如(1.1.5)的函数.现在我们还需要问一问,是否所有形如(1.1.5)的函数都是(1.1.4)的解.这个问题可归结为,我们说一个解是什么意思?这里我们只单纯地要求,列在(1.1.4)中各量的所有的项在某一区域R中存在,R是这个问题将在其中求解的区域,也是(1.1.4)应被满足的区域.但是由于我们要求满足的是一个等式,我们也就要求这个等式中所有的项是连续的——这里就是要求$u_{\xi\eta}$在所考虑的区域中是连续的.显然,如果在ξ和η的充分大的开区间上$F, G\in C^1$,那么(1.1.5)中给出的函数u就是在这样一种具体意义下的一个解.

再回到原来的坐标系,从(1.1.5)我们有

$$u(x, y)=F(x+y)+G(x-y), \qquad (1.1.6)$$

其中F和G的定义已经被改变,因为在自变量中吸收了因子1/2.这里,如果$F, G\in C^2$,在所考虑的区域内,在所有的项存在并且连续这个意义下,u是(1.1.1)的解;此外,如果$F, G\in C^2(a, b)$,那么可以看出$u\in C^2(T)$,其中T是在底边(a, b)上的一个等腰三角形.最后一点将过一会儿解释;现在,我们要注意的是,为了使(1.1.5)中的u是在(ξ, η)坐标系下的解所要求于F和G的性质比为了使(1.1.6)是在(x, y)坐标系下的解所要求于它们的性质要稍微弱一些.当在这个非常直接而具体的意义下来考虑的时候,我们看到了偏微分方程解的一个独特的性质,而这正是为什么许多现代学者喜欢解在更抽象意义下的存在性的一个理由(然而,也再没有更令人信服的其它理由).然而,这样一来,学者们将看到,当他们减弱存在性的意义时,他们的结果在有用的物理解释方面却丢掉了许多东西.至于是应当用解的存在性的具体意义(正规的解,我们通常这样称呼它们)还是应当用抽象意义(例如,$\mathscr{L}^p$-弱解),这种斟

的考虑则是贯穿这整本书的一个课题，不过现在这还没有多大关系，并且在开头我们还不得不只考虑解的具体意义．在某种程度上，在可能的地方，可以看到我们宁愿减弱唯一性的意义而不是存在性的意义．不过这又离题远了．

为了求(1.1.6)中的F和G，以便满足(1.1.2)，我们使

$$f(x)=F(x)+G(x) \tag{1.1.7}$$

和

$$g(x)=F'(x)-G'(x), \tag{1.1.8}$$

这里$F(x+y)$ 和$G(x-y)$是按照x和y的复合函数来求微商的，然后令y等于零．设c是任何实数，并假设g是可积的，于是(1.1.8)可以写成

$$\int_c^x g(s)ds=F(x)-G(x). \tag{1.1.9}$$

这样，从(1.1.7)和(1.1.9)，得到

$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+\int_c^x g(s)ds] \tag{1.1.10}$$

和

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-\int_c^x g(s)ds]. \tag{1.1.11}$$

它们是一个变量的函数，但是这个变量在(1.1.6)中是作为象$x+y$和$x-y$那样的两个变量的两个不同函数的函数值出现的．注意到这一点，我们看到(1.1.6)变成

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[f(x+y)+f(x-y)]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} g(s)ds, \tag{1.1.12}$$

这里可以看到，任意参数c已不再出现了．

(1.1.12) 称为 D'Alembert 解．D'Alembert 解是我们的古典来源之一，因此这个解几乎不是现代的．但它给我们提供了一个起点或参考点，从这里出发可以了解到许多事情．但是，它是否

是属于我们的具体意义下的解？如果是的，是在什么区域中？读者立即可以看到(1.1.2)是满足的，并且(1.1.12)是具有形式(1.1.6)的；一眼可以看出，不论在哪里只要 f 二次连续可微和 g 连续可微，那么 u 就是二次连续可微的。

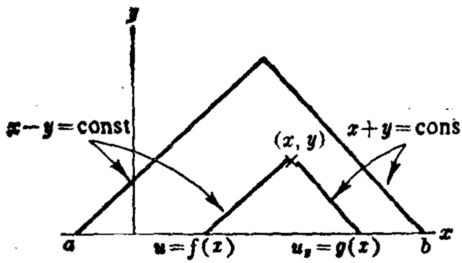

图 1 在边界为 $y=0, x-y=$ 常数和 $x+y=$ 常数的三角形中解是唯一确定的

让我们选取一个点 (x, y)（见图 1）并且问 u 在这个点上的值怎样。通过这一点按 $x+y$ 是常数画一条线，又按 $x-y$ 是常数画另一条线，并注意到这两条线通过 x 轴。在这两条线与 x 轴的交点上我们顺便得到了用于(1.1.12)式的值 $f(x+y)$ 和 $f(x-y)$。另外，(1.1.12)中的积分项恰好是 g 在这些交点之间的积分。因此，从图 1 和上一段的说明，那就很清楚，如果 $f\in C^2(a, b)$ 和 $g\in C^1(a, b)$，那么D'Alembert解(1.1.12)确实是在底边为(a, b)的 45° 等腰三角形 T 中的一个解，而且是我们的具体（正规的）意义下的解。

但是，D'Alembert 解是否是唯一的正规解呢？在解释这个问题以前，先让我们记下现在我们决定称之为正规解的意义：设 T 是在 x 轴上 (a, b) 为底的开的 45° 等腰三角形。如果 u：$T\to R^1$ 和

(i) $u\in C^2(T)$；

(ii) $u\in C(T\cup(a, b))$；

(iii) 对于每一个$(x, y)\in T$，满足(1.1.1)；

(iv) 对于每一个 $x\in(a,b)$，满足(1.1.2)；

那么 u 就称为(1.1.1)，(1.1.2)在 T 上的一个正规解．条件 (ii) 提供了由(iv)所要求在 $y=0$ 上的数据的条件和由(iii) 所要求在(开的) 区域①T 中的微分方程的条件之间的联系．正如大家能够看到的那样，某些这样的条件在边值问题的要求中也总是需要的．但有时当边值问题用积分方程重新表示的时候，它们将被减弱．不过，在这个概论中为了能够应用散度定理，我们将经常把它加强到 $u\in C^1$．

这里，正象处理一般的线性(见下一节)问题那样，唯一性的问题可以用简单的反证法来处理．假设有(1.1.1)，(1.1.2)的两个正规解 u_1 和 u_2．那么

$$u=u_1-u_2$$

满足齐次方程

$$u_{xx}-u_{yy}=0 \tag{1.1.13}$$

和齐次数据

$$u(x,0)=u_y(x,0)=0. \tag{1.1.14}$$

我们必须证明，(1.1.13) 和 (1.1.14) 一起就意味着对于每一点 $(x,y)\in T$ 都有 $u=0$，从而在 T 上 u_1 和 u_2 相等．问题 (1.1.13)，(1.1.14)，或是对它作适当的变形，总是线性方程的唯一性问题，而当再次应用它时，我们希望不总是叙述这些再三重复的论证．

这里，对于唯一性问题，我们有一个在偏微分方程中极为罕见的机会，可以应用给出全体正规解的通解形式(1.1.6)．显然，(1.1.13)，(1.1.14)要求在(1.1.6)中令 $F=G=0$，从而唯一性成立．

三角形 T 称为区间(a,b)的"决定区域"．点(x,y)的 "依赖区间" D 是顶点为点(x,y)，底边在 x 轴上的等腰三角形的底边．区

---

① 我们说一个区域总是指连通的开集．

间(a, b)的“影响区域” R 是如图 2 所示的在 $x-y=b$ 和 $x+y=a$ 之间的无界区域. 从(1.1.12)和上面给出的论证，读者将易于同意说这些概念的名字起得好.

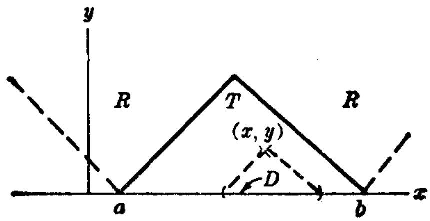

图 2

2. 定义

术语“线性”一词，在说明它的意义之前，已经用于唯一性的讨论中了. 为了避免这样的事，我们现在中断实质性的叙述而列举这个领域中的一些基本定义.

设 $f:\mathrm{R}^8\to\mathrm{R}^1$(或 $f:\mathrm{C}^8\to\mathrm{C}^1$). 那么，对于函数 $u:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^1$(或 $u:\mathrm{C}^2\to\mathrm{C}^1$)的二阶偏微分方程是方程

$$f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0. \tag{1.2.1}$$

高阶(系指 u 的导数出现的最高阶数)方程和包含更多自变量的方程的定义，$u:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^1$(对于 $n>2$)，可以很容易地由读者给出. 加在 f 上的一些条件总是包含在任何特殊问题或定理的陈述中；可以要求，或是能从(1.2.1)中解出 u_{yy}，或 f 对 u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 是线性的，或甚至 f 对除了开头两个变量 x 和 y 以外的所有的变量都是线性的.

如果 f 对出现的最高阶导数是线性的，那么方程(1.2.1)称为“拟线性的”. 在这种情况下，(1.2.1)可以写成

$$a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx}+2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy}+c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} \\ =d(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1.2.2}$$

其中 $a,b,c,d:\mathrm{R}^5\to\mathrm{R}^1$. 等式左边，即出现的最高阶项的和，称为本质部分. 将会发现，这部分起着重要的作用，它告诉我们什么曲线是其特征线(特征线将在下一节引进)，从而告诉我们哪些类边值问题是适当的和在什么区域中解是唯一确定的.

如果 f 对 u 和它的所有的导数是线性的，那么微分方程称为线性的. 在这种情况下，(1.2.1)可以写成

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}$$
$$=\alpha(x,y)+\beta(x,y)u+\gamma(x,y)u_x+\delta(x,y)u_y, \qquad (1.2.3)$$

其中 $a,b,c,\ \alpha,\beta,\gamma,\ \delta:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^1$. 如果 $a,b,c,\beta,\gamma,\delta\in\mathrm{R}^1$ (即 $w_1,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6\in\mathrm{R}^1$ 而 $a:\mathrm{R}^1\to\{w_1\}$, $b:\mathrm{R}^1\to\{w_2\}$, $c:\mathrm{R}^1\to\{w_3\}$, $\beta:\mathrm{R}^1\to\{w_4\}$, $\gamma:\mathrm{R}^1\to\{w_5\}$, $\delta:\mathrm{R}^1\to\{w_6\}$)，那么(1.2.3)称为"常系数的". 如果对于每一点(x,y)，$\alpha(x,y)=0$(在我们所考虑的某一区域 R 中)，那么(1.2.3)称为齐次的；这时 $u=0$ 是一个解. 波动方程(1.1.1)是线性、齐次、而且是常系数的. 它的本质部分称为"波动算子"，而且构成了方程的所有非零项. 在第 3 节中我们将看到这个方程是"双曲型的"，而它的两族特征线为 $x\pm y=$常数，正是这些曲线界定了第 1 节中的决定区域. 然而，我们将发现，这不是偶然的，而是预期的双曲型的一般特性，并且这足够表现出双曲型的特征. 当然，一般来说，常系数方程是远为容易理解的，在这个概论中，我们所考虑的边值问题大部分是常系数方程，而且多半是齐次方程. 在理论问题上线性情况获得解决要容易得多，这是由于迭加原理适用于齐次线性情况：我们把它留给读者去证明，如果 u_1 和 u_2 是齐次方程(1.2.3)[即，在所考虑的区域中每一点(x,y)处 $\alpha(x,y)=0$]的解，则对于 $m,n\in\mathrm{R}^1$，mu_1+nu_2 也必定是同一个方程的解. 这是最重要的迭加原理；确实，与其说 f 是线性的，不如说它是表现了线性方程的特性的.

设 $F_i:\mathrm{R}^{3n+2}\to\mathrm{R}^1$, $i=1,\cdots,n$. 那么 $n\times n$ 偏微分方程组