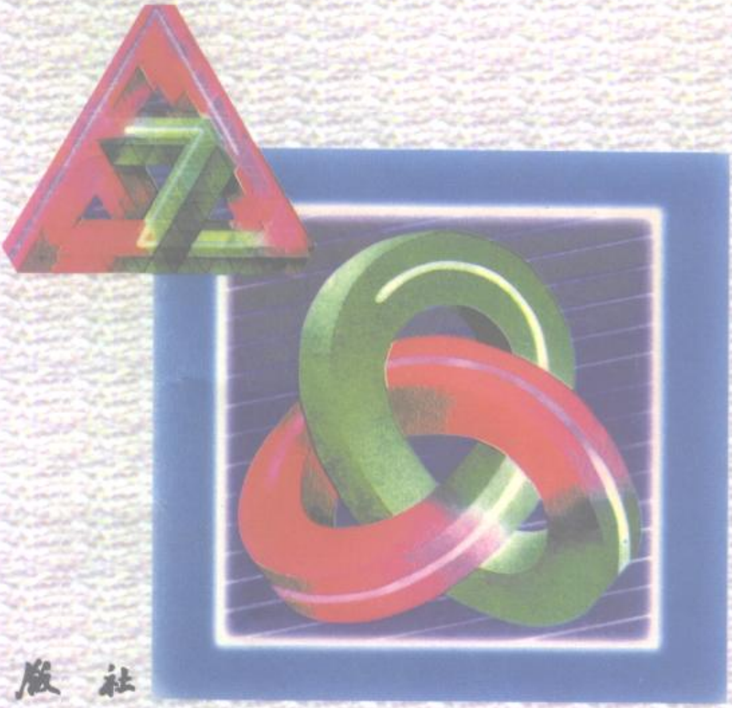
现代数学基础丛书

线性微分方程的非线性扰动

●徐登洲　马如云　著



科学出版社

现代数学基础丛书

线性微分方程的非线性扰动

徐登洲　马如云　著

科 学 出 版 社

1998

内容简介

本书灵活地运用多种非线性分析工具，系统地论述了一些重要的常微分方程和偏微分方程边值问题的解的存在性和唯一性，主要内容有：非共振问题，共振问题，强共振问题、特征线问题及其扰动。

读者对象：高校有关专业师生，科研人员。

现代数学基础丛书
线性微分方程的非线性扰动
徐登洲　马如云　著
责任编辑　林　鹏
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1994年2月第一版　开本：850×1168 1/32
1998年10月第二次印刷　印张：10
印数：2 001－4 000　字数：243 000
ISBN 7-03-003970-X/O・691
定价：20.00元

前言

非线性微分方程有着极为丰富的源泉，研究它的最基本方法是线性方程的非线性扰动. 本书将讨论几种常见而重要的常微分方程和偏微分方程的可解性及多解的存在性问题，我们未拘泥于某一种非线性分析方法，而采用灵活多样的分析工具，如单调算子理论、不动点定理解集连通理论、拓扑延拓定理及变分理论等. 本书坚持先有方程，后找分析工具研究方程的思想. 全书是依据扰动项的特征进行分类的.

本书第一章是以后诸章的基础，该章简介线性微分方程的基础知识及一系列最必要的分析工具，这样安排是为了便于读者. 因而对于已经熟悉了这部分内容的读者，完全可以直接读后几章. 有的读者即使不完全熟悉这部分内容，但若有较好的数学基础，也可先从后面几章读起，遇到有关概念和定理时再翻阅这一章.

第二章论述线性方程的不跨特征值扰动. 我们使用多种不同的分析方法，逐步实现扰动项由渐近一致向渐近非一致的过渡.

第三章在单调性假设、Landesman-Lazer 条件及符号条件下讨论线性方程的跨特征值扰动问题的一些结果.

第四章是强共振问题和带周期函数扰动项的共振问题之专题讨论.

第五章介绍广义谱理论及另外一种与梁方程有关的四阶两参数特征值问题. 该章的中心问题是广义特征值问题的非线性扰动的可解性.

每章之末以附注形式介绍有意义的工作和进展，书后的参考文献是按章编排的.

本书虽有系统整理日益膨胀的文献资料的目的，但无囊括一切成果的奢望，在内容选取上我们固然要介绍若干重要的结果，但却又偏重于近20多年来的进展. 由于这些材料至今仍分散在国内外的文献之中，所以编写过程中没有现成的书可借鉴，加之水平所限，成书仓促，疏漏和错误在所难免. 真诚地欢迎读者批评指正.

陈文嫄教授和范先令教授阅读了本书初稿，提出了许多宝贵修改意见. 作者在此对他们表示深切的感谢.

本书的工作获甘肃省自然科学基金资助.

作者

1993.7

目　录

第一章　半线性微分方程的现代方法简介 …………(1)
§1.1 线性微分方程 …………(1)
§1.2 Sobolev 空间与嵌入定理 …………(14)
§1.3 单调算子 …………(18)
§1.4 同胚的充分条件 …………(23)
§1.5 常用的不动点定理 …………(24)
§1.6 含参方程的解集连通理论 …………(27)
§1.7 延拓定理 …………(32)
§1.8 变分方法 …………(36)
附注 I …………(43)

第二章　线性方程的不跨特征值扰动 …………(45)
§2.1 不跨特征值问题研究概况 …………(45)
§2.2 抽象方程• 渐近一致• minimax 方法 …………(51)
§2.3 常微分方程组的周期解• 渐近非一致
• Hadamard 反函数定理 …………(70)
§2.4 波方程• 渐近非一致• Mawhin 延拓定理 …………(76)
§2.5 椭圆方程• 渐近非一致• 鞍点约化法 …………(88)
§2.6 Duffing 方程• 渐近非一致• 相平面分析法 …………(97)
附注 II …………(117)

第三章 线性方程的跨特征值扰动 ……………………(119)
§3.1 Landesman 和Lazer 的结果● 有界非线性项
● 临界点理论 ……………………………………(119)
§3.2 多解定理● 有界非线性项● 映象同胚的条件 ……………(127)
§3.3 椭圆方程● 有界非线性项● 集连通技巧 ……………………(140)
§3.4 两点边值问题● 渐近一致条件● 延拓定理 ………………(148)
§3.5 抽象方程● 渐近非一致● 延拓定理 …………………………(165)
§3.6 两点边值问题● 渐近非一致● 延拓定理 …………………(182)
§3.7 Duffing 方程● 跨有限个特征值
● Poincaré-Birkhoff 定理 ……………………………(196)
附注 III …………………………………………………(207)

第四章 强共振和带周期非线性项的共振 ……………(208)
§4.1 共振问题的分类 ……………………………………………(208)
§4.2 椭圆方程Dirichlet 问题● 强共振● C 条件及环绕理论 ……(211)
§4.3 波方程● 强共振● Link 理论 ………………………………(227)
§4.4 两点边值问题● 周期非线性项● 临界点理论 ……………(237)
§4.5 椭圆方程● 周期非线性项● 没有[P.S.] 的环绕理论 ………(246)
附注 IV …………………………………………………(260)

第五章 特征线问题及其扰动 ……………………………(261)
§5.1 Fŭcik 谱的定义 ………………………………………………(261)
§5.2 Liénerd 方程PBVP ● 不跨特征线扰动
● Leray-Schauder 度理论 ……………………………(276)
§5.3 两点边值问题● 跨特征线扰动● 延拓定理 ………………(285)
§5.4 梁方程● 不跨特征线扰动● Leray-Schauder 原理 …………(293)
附注 V …………………………………………………(298)

参考文献 (按章分类排列) ……………………………………(299)

第一章　半线性微分方程的现代方法简介

在线性微分方程理论中，一个方程的解往往可以借助多种不同的方法而得到．本书讨论带有非线性扰动的线性微分方程的解的存在性．对于一个具体的方程，我们也常常试图利用多种不同的方法进行研究，所以首先对半线性微分方程的现代方法作简单介绍．§1.1 介绍本书所论及的几类重要的微分方程及Fredholm 抉择在线性微分方程中的应用；§1.2 简介Sobolev 空间．Sobolev 空间是非线性分析应用到微分方程问题中去的桥梁．这部分内容现在已有许多著作可供阅读．为了方便查阅，我们仅给出了定义和几个嵌入定理；在§1.3 至§1.8 中，分别罗列单调算子理论、不动点理论(如扭转映射的不动点定理，Schauder 不动点定理等)、拓扑度理论(如：Leray-Schauder 原理、Mawhin 延拓定理等)、临界点理论及集连通理论等方面的主要成果．这里仅挑选出以后诸章最必要的材料，而略去证明．对于已经熟悉了这些材料的读者，可越过这几节；对于想了解证明过程的读者，可根据出处参阅有关著作．

§ 1.1 线性微分方程

线性微分方程的理论是非线性微分方程理论的基础．线性微分方程种类繁多，下面简介本书所论及的几类重要的线性微分方程．

1.1.1 线性特征值问题

(I) 弹簧振子的运动是通过二阶线性常微分方程

$$\ddot{x}(t)+\lambda x(t)=0 \tag{1.1}$$

来描写的. 其中 $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$.

(a) 考虑带周期边值条件的线性特征值问题

$$\begin{aligned}&-\ddot{x}-\lambda x=0,\\&x(0)-x(2\pi)=\dot{x}(0)-\dot{x}(2\pi)=0,\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $\ddot{x}=\frac{dx}{dt}$.

定义线性算子 $L_1: D(L_1)\subset L^2(0,2\pi)\to L^2(0,2\pi)$.

$$L_1u(t)=-\ddot{u}(t)\qquad \forall u\in D(L_1),$$

其中

$$D(L_1)=\left\{u\in L^2(0,2\pi)\left|\begin{array}{c}u,\dot{u}\text{ 在 }[0,2\pi]\text{ 上绝对连续}, \dot{u}\in L^2(0,2\pi)\\ u(0)-u(2\pi)=\dot{u}(0)-\dot{u}(2\pi)=0\end{array}\right.\right\},$$

则 L_1 为自伴算子且 L_1 的特征值为 $r_N=N^2\,(N=0,1,2,\cdots)$. $r_N=N^2$ 所对应的特征子空间为 span $\{\sin Nx,\cos Nx\}$.

(b) 考虑带两点边值条件(即Dirichlet 边值条件) 的线性特征值问题

$$\begin{aligned}&-\ddot{x}-\lambda x=0,\\&x(0)=x(\pi)=0.\end{aligned} \tag{1.3}$$

定义线性算子 $L_2: D(L_2)\subset L^2(0,2\pi)\to L^2(0,2\pi)$

$$L_2u(t)=-\ddot{u}(t)\qquad \forall u\in D(L_2),$$

其中

$$D(L_2)=\left\{u\in L^2(0,\pi)\left|\begin{array}{c}u,\dot{u}\text{ 在}[0,\pi]\text{ 上绝对连续}\\ \dot{u}\in L^2(0,\pi),\ u(0)=u(\pi)=0\end{array}\right.\right\},$$

则L_2 的特征值为$r_N = N^2(N=1,2,\cdots)$, $r_N = N^2$ 所对应的特征子空间为span $\{\sin Nx\}$.

(c) 考虑带Neumann 边值条件的线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\ddot{x} - \lambda x &= 0, \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

定义线性算子$L_3 : D(L_3) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$

$$L_3 u(t) = -\ddot{u}(t) \qquad \forall u \in D(L_3),$$

其中

$$D(L_3) = \left\{ U \in L^2(0,\pi) \,\middle|\, \begin{array}{c} u, \dot{u} \text{ 在 } [0,\pi] \text{ 上绝对连续} \\ \dot{u} \in L^2(0,\pi),\ \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

则L_3 的特征值为$r_N = N^2\,(N=0,1,2,\cdots)$. $r_N = N^2$ 所对应的特征子空间为span $\{\cos Nx\}$.

(II) 处于稳定状态的温度场中的温度、流体的势以及弹性理论中的调和位势等均满足Laplace 方程

$$\Delta_1 u = 0, \tag{1.5}$$

其中$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

现在设$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一个具有光滑边界的区域. 记

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

(d) 考虑带Dirichlet 边值条件的二阶椭圆方程线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u &= 0, \qquad x \in \Omega, \\ u &= 0, \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.6}$$

定义线性算子$L_4 : D(L_4) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$L_4 u = -\Delta u \qquad \forall u \in D(L_4),$$

其中

$$D(L_4) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)\}$$

(关于$W_0^{1,2}(\Omega)$ 及$W^{2,2}(\Omega)$ 的定义参见本章§2), 则L_4 是自伴算子且L_4 有一列特征值

$$(0 <)\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \cdots$$

具有如下性质:

(i) $\forall k, \lambda_k$ 对所对应的特征子空间均为有限维.

(ii) λ_1 所对应的某特征函数φ 满足

$$\begin{aligned} \varphi(x) > 0, &\qquad \forall\, x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} < 0, &\qquad \forall\, x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

其中$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ 表外法向导数.

(e) 考虑带Neumann 边值条件的二阶椭圆方程线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u = 0, &\qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, &\qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

问题(1.7) 的特征值为

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots,$$

$\lambda_1 = 0$ 所对应的特征子空间为 span $\{1\}$; 对于任意自然数k, λ_k 所对应的特征子空间均是有限维的.

不难看出；当$N=1$ 时，Laplare 算子便是二阶常微分算子 d^2/dt^2.

(III) 弹性弦的波动方程

设$Q=[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

(f) 考虑带周期—Dirichlet 边值条件的一维波方程的线性特征值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}-\lambda u=0, \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0, \\ u(0,x)=u(2\pi,x). \end{cases} \tag{1.8}$$

定义线性算子$L_6: D(L_6)\subset L^2(Q)\to L^2(Q)$

$$L_6 u=u_{tt}-u_{xx} \qquad \forall u\in D(L_6),$$

其中$D(L_6)=\{u\in L^2(Q)\mid \sum\limits_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}(n^2-m^2)^2|c_{mn}|^2<+\infty\}$ (注意：当$u\in L^2(Q)$ 时，u 可以Fourier 展开成$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}C_{jk}e^{ijt}\sin kx$, $\sum\limits_k\sum\limits_j|C_{jk}|^2<\infty$. 为方便常用$\{C_{jk}\}$ 表示u), 则L_6 是一个有闭值域的自伴算子且L_6 的特征值集为

$$\{n^2-m^2\mid n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}\},$$

$r_{n,m}=n^2-m^2$ 所对应的特征函数为

$$\varphi_{nm}=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(nx)\sin(mt) & n\in\mathbb{N},\quad m\in\mathbb{Z}_+, \\ \dfrac{1}{\pi}\sin(nx) & n\in\mathbb{N},\quad m=0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(nx)\cos(mt) & n\in\mathbb{N},\quad -m\in\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

易见，$\lambda=0$ 所对应的特征子空间是无穷维的.

(IV) 均匀梁的横向运动方程为

$$u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0. \tag{1.9}$$

(g) 考虑带周期边值条件的梁方程的线性特征值问题

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxx}-\lambda u=0, \\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0, \\ u(0,x)=u(2\pi,x). \end{cases} \tag{1.10}$$

定义$L_7: D(L_7)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$

$$L_7u=u_{tt}+u_{xxxx} \qquad \forall u\in D(L_7),$$

其中$D(L_7)=\{u\in L^2(Q)\mid \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}(n^4-m^2)^2|C_{mn}|^2<+\infty\}$. (注: $\forall u\in L^2(Q)$ 可Fourier 展开成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{jk}e^{ijt}\sin kx, \qquad \sum_k\sum_j|c_{jk}|^2<\infty),$$

则 L_7 是一个自伴算子且 L_7 的特征值集为

$$\{n^4-m^2\mid m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}.$$

易见L_7 的特征值$\lambda=0$ 所对应的特征子空间是无穷维的.

(h) 如果当时间充分大时，均匀梁的横向运动趋于稳态. 这时(1.9) 相应的退化为一个与t 无关的方程

$$u_{xxxx}=0. \tag{1.11}$$

考虑带边值条件的弯曲梁方程的线性特征值问题

$$\begin{cases} u_{xxxx}-\lambda u=0, \\ u(0)=u(\pi)=u''(0)=u''(0)=0. \end{cases} \tag{1.12}$$

定义线性算子$L_9 : D(L_9) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$

$$L_9 u = u_{xxxx}, \qquad \forall\, u \in D(L_9),$$

其中

$$D(L_9) = \left\{ u \in L^2(0,\pi) \,\middle|\, \begin{array}{c} u,\ \dot{u},\ \ddot{u},\ \dddot{u}\ \text{在}\ [0,\pi]\ \text{上绝对连续} \\ u^{(4)} \in L^2(0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = \ddot{u}(0) = \ddot{u}(\pi) = 0 \end{array} \right\},$$

则L_9 的特征值为$\lambda_N = N^4 (N = 1, 2, \cdots)$. λ_N 所对应的特征子空间为$\mathrm{span}\{\sin Nx\}$.

附注　除了以上几类特征值问题外，在第五章，还将讨论下列两类特征线性问题

(i)

$$\begin{cases} \ddot{u} + \lambda_+ u^+ - \lambda_- u^- = 0, \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

其中$u^+ = \frac{1}{2}(|u| + u), u^- = \frac{1}{2}(|u| - u)$.

(j)

$$\begin{cases} u^{(\mathrm{IV})} - \alpha \ddot{u} + \beta u = 0, \\ u(0) = u(1) = \ddot{u}(0) = \ddot{u}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

(1.13) 不再是线性问题了，(1.13) 和(1.14) 可分别看成是(1.3) 和(1.12) 的推广.

1.1.2 Fredholm 二择一性质

设X 和Y 都是赋范线性空间. 映射$T : X \to Y$ 称为是紧的(或全连续的), 如果T 把X 中的有界集映成Y 中的相对紧集，或等价地，T 把X 中的有界序列映为Y 中含有收敛子列的序列. Fredholm 二择一性质(或称Riesz-Schauder 原理) 涉及空间X 到自身的紧线性算子，并且是有限维空间线性映象理论的一个推广.

定理 1.1.1 设T 是赋范线性空间X 到自身中的一紧线性映射. 那么, 或者(i) 齐次方程

$$x - Tx = 0$$

有非平凡解$x \in X$, 或者(ii) 对每个$y \in X$, 方程

$$x - Tx = y$$

有唯一确定的解$x \in X$. 而且在情形(ii), 已断定其存在性的算子$(I - T)^{-1}$ 也是有界的.

证明略. 参见Gilbarg 和Trudinger [13].

在§1.1.1 中讨论了几类特殊的线性算子的特征值和特征函数. 一般地, 设$T : X \to X$ 为紧线性算子, 如果X 中存在非零元x 满足$Tx = \lambda x$, 就称λ 为T 的特征值. 很明显属于不同特征值的特征向量必然是线性无关的. 算子$S_\lambda = \lambda I - T$ 的零空间的维数称为λ 的重数. 如果$\lambda \neq 0$ 且$\lambda \in \mathbb{R}$ 不是T 的特征值, 从定理1.1.1 推出, 预解算子$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ 是有明确定义的、把X 映上自身的有界线性映射.

如下结果刻画了赋范线性空间到自身的紧线性映射的特征值集的特性.

定理 1.1.2 赋范线性空间到自身中的紧线性映射T 的特征值全体构成一个可数集. 这个集合除$\lambda = 0$ 可能例外外, 没有别的极限点. 每一非零特征值均有有限的重数.

证明略. 参见[13].

利用定理1.1.2, 可以帮助我们进一步理解§1.1.1 中的结果.

例 设Ω 是一个具有足够光滑边界的区域. 考虑线性特征值问题

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u = 0, &\qquad x \in \Omega, \\ u = 0, &\qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

定义线性算子$L: D(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$Lu = -\Delta u \qquad \forall u \in D(L),$$

其中$D(L) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. 则$L$ 为自伴算子. 因L 正定, 从而$\widetilde{K} \triangleq L^{-1}$ 存在.

由Poincaré 不等式:

$$\left|\int_\Omega u \cdot v\right| \leq C\Big(\int_\Omega |u|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{W_0^{1,2}}, \quad \forall u \in L^2(\Omega), \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

及Riesz 表现定理, 存在有界线性算子$K: L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega u \cdot v = (Ku, v)_{W_0^{1,2}} \qquad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

其实这个K 就是$\widetilde{K} = L^{-1}$, 这是因为

$$\int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega -\Delta \widetilde{K} u \cdot v = \int \nabla \widetilde{K} u \cdot \nabla v = (\widetilde{K} u, v)_{W_0^{1,2}},$$

于是K 作为$W_0^{1,2}(\Omega)$ 到自身的自伴紧算子有谱: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq \cdots \to 0$. 由此可见$L = -\Delta$ 有谱: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \to +\infty$. 其中$\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$, $i = 1, 2, \cdots$.

1.1.3 线性微分方程

一般的常微分方程教程、数学物理方程教程及线性泛函分析教程中均可见到讨论线性方程解的存在性及解集结构的理论、方法和结果, 有些结果已能给出解的具体表达式, 故这里仅给出两个特殊的结果. 一个是关于二阶线性椭圆方程的结果; 另一个是关于线性弯曲梁方程可解性的结果. 这类结果本身是重要的, 获得它们的方法可以用于处理其他类型的方程.