

电 子 光 学

南 京 工 学 院

赵国骏 于毓麟 阮宝崧

西 北 电 讯 工 程 学 院

余金龙 王万兴

国 防 工 业 出 版 社

内 容 简 介

本书分上下两篇，上篇为弱流电子光学，下篇为强流电子光学。

上篇主要介绍电子束的聚焦、成像性质，求解电磁场的分布和电子在场中的运动轨迹，各种电磁透镜的特性参量以及不满足理想成像条件下产生的各种象差和空间电荷效应，并从电子光学观点出发讨论弱流电子枪的主要特性参量及其计算方法。还讨论了偏转系统、偏转象差和它的改进途径。

下篇主要叙述强流电子注中的空间电荷效应，强流电子枪的基本原理、计算方法，以及利用磁场聚束电子注的一些基本问题。

本书编写过程中吸取了部分国内外电子光学书籍的特点，注意加强物理概念的阐述并反映近年来电子光学领域的新技术、新内容。适用于电真空器件专业作为电子光学课程的教材，也可作为电真空物理专业以及如夜视器件等相近专业的教学参考书和科技人员的参考读物。

电 子 光 学

南京工学院
赵国骏 于毓麟 阮宝崧
西北电讯工程学院
余金龙 王万兴

国防工业出版社出版
北京市书刊出版业营业许可证出字第074号
西北电讯工程学院印刷厂印刷
内 部 发 行

开本787×1092 1/16 印张22
印刷字数 549千字 印数1—3000册
1980年 第一版 1980年6月第一次印刷
统一书号：N15034(教—64)
定价：2.27元

目 录

上篇 弱流电子光学

第一章 绪 论

- § 1.1 几何光学和电子光学的相似性 1
- § 1.2 电子光学折射率的特性 6

第二章 电子在轴对称场中的运动

- § 2.1 轴对称电场的电位分布 8
- § 2.2 电子在轴对称电场中的运动 13
- § 2.3 轴对称磁场 21
- § 2.4 轴对称磁场和复合电磁场中的旁轴轨迹方程与聚焦成象性质 24

第三章 决定位场和轨迹的方法

- § 3.1 解析法求解轴对称电场 32
- § 3.2 数值算法求解轴对称电场 36
- § 3.3 数值算法求解轴对称磁场 46
- § 3.4 位场分布的实验测定 48
- § 3.5 实验法确定磁场分布 54
- § 3.6 数值算法确定电子轨迹 57
- § 3.7 数值算法计算磁场中电子轨迹 65

第四章 静电透镜

- § 4.1 几何光学的基本规律 68
- § 4.2 静电透镜的参量及其基本关系 72
- § 4.3 静电透镜的焦距和主平面 74
- § 4.4 静电透镜的类型和确定透镜性质的一般方法 84
- § 4.5 圆孔膜片 87
- § 4.6 浸没透镜 90
- § 4.7 单透镜 95
- § 4.8 浸没物镜 100
- § 4.9 宽电子束成象系统 100
- § 4.10 静电四极透镜 109

第五章 磁 透 镜

- § 5.1 螺管透镜 114
- § 5.2 短磁透镜 117
- § 5.3 厚透镜 122
- § 5.4 磁四极透镜 131

第六章 象 差

§ 6.1	几何象差	135
§ 6.2	各种几何象差的定义和相应的图形	138
§ 6.3	象差系数的计算	143
§ 6.4	静电透镜和磁透镜的球差	148
§ 6.5	色差	156
§ 6.6	轴向均匀电场的色球差	159
§ 6.7	机械误差和其它破坏轴对称的因素	165
§ 6.8	空间电荷误差	166

第七章 发射系统和电子枪

§ 7.1	发射系统阴极区的电子轨迹和交叉截面的形成	171
§ 7.2	交叉截面的大小和电流密度分布	172
§ 7.3	发射系统的特性参量	175
§ 7.4	理想平面三极发射系统的设计考虑	183
§ 7.5	电子枪的聚焦系统	186
§ 7.6	电子枪发射系统与聚焦系统的匹配问题	191
§ 7.7	电子枪的数值计算方法	193

第八章 电子束的偏转

§ 8.1	静电偏转	206
§ 8.2	磁偏转	213
§ 8.3	偏转象差	224
§ 8.4	慢电子束的偏转	234

下篇 强流电子光学

第九章 电子注的空间电荷效应

§ 9.1	强流电子枪的概述	243
§ 9.2	空间电荷作用下电子注的发散	244
§ 9.3	圆形截面电子注在等位圆筒中的通导能力	251
§ 9.4	电子注中的径向电位分布和极限流通电流	252

第十章 强流电子枪

§ 10.1	皮尔斯电子枪	255
§ 10.2	平行电子注的形成	256
§ 10.3	锥形电子注的形成	258
§ 10.4	电子枪的导流系数	261
§ 10.5	阳极孔的发散效应	263
§ 10.6	收敛型低导流系数电子枪的设计	265
§ 10.7	电子热初速的影响	267
§ 10.8	高导流系数电子枪	272
§ 10.9	电子枪几个主要参量的选择	276

§ 10.10 栅控电子枪	278
第十一章 其它强流电子枪	
§ 11.1 正交场电子枪	282
§ 11.2 磁控式电子枪	290
第十二章 均匀磁场聚束	
§ 12.1 电子注的聚束问题	296
§ 12.2 浸没式均匀磁聚束	297
§ 12.3 屏蔽式均匀磁聚束	298
§ 12.4 部分屏蔽式磁聚束	303
§ 12.5 均匀磁聚束中电子注的脉动	306
§ 12.6 电子枪与聚束系统的匹配	313
§ 12.7 均匀磁聚束系统	314
第十三章 周期磁场聚束	
§ 13.1 磁环磁场及其迭加效应	318
§ 13.2 周期磁聚束原理	320
§ 13.3 周期磁场聚束小脉动的理论分析	323
§ 13.4 大脉动计算结果和电子注的稳定性问题	326
§ 13.5 关于永磁体的一些基本知识	331
§ 13.6 周期永磁聚束系统的设计	337

上篇 弱流电子光学

第一章 绪 论

§ 1.1 几何光学和电子光学的相似性

早在一百多年前，哈密尔顿已经从几何光学的费马原理和力学的最小作用量原理的比较中注意到了它们的相似性，也就是质点在力场中运动和光线在光学媒质中的传播相似，从而得出运动质点（不连续客体）与某种波动过程相联系，光波（连续客体）与某种运动质点相联系的结论。但由于当时没有相应的实验基础，不能把光看成某种质点流，更谈不上把运动质点与某种波动过程联系起来，因此，对这样的结论还不能理解。直到光量子说和电子波动说相继出现并在电子衍射现象的实验中证实了电子的波动性质以后，人们对几何光学和电子光学的相似性的认识才进一步深化。

下面我们将详细讨论费马原理和最小作用量原理，通过讨论以建立几何光学和电子光学相似性的概念。

费马原理指出：在两点之间传播的光线，选择所需时间为极值（极大值、极小值或稳定值）的路径行进。

设 P_0 、 P_1 是媒质中的两点，经过这两点可以画出许多曲线。按费马原理，光线由 P_0 到 P_1 的实际路径必须沿着传播时间为极值的曲线，它存在下列关系：

$$\int_{t_0(P_0)}^{t_1(P_1)} dt \rightarrow \text{极值} \quad (1-1)$$

若用变分形式表示可写为

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} dt = 0 \quad (1-2)$$

在几何光学中折射率 n 与光波传播速度之间的关系为

$$n = \frac{c}{v} \quad (1-3)$$

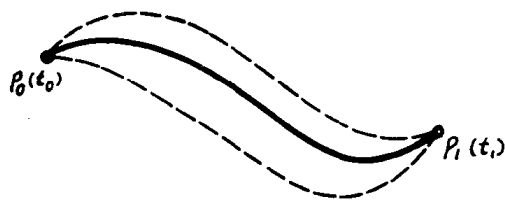
上式中 c 为真空中的光速； v 为任一媒质中的光速， n 为任一光学媒质的折射率。若以 $dt = ds/v$ （式中 ds 为沿光线的弧元）代入（1-2）式，则可写为

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} dt = \frac{1}{c} \delta \int_{P_0}^{P_1} n ds = 0$$

即

$$\frac{1}{c} \int_{P_0}^{P_1} n ds \rightarrow \text{极值} \quad (1-4)$$

式中 nds 称为光程元，因此，费马原理可以表达为：光线由 P_0 点传至 P_1 点所取的路线，是过此两点的一切比较曲线中光程取极值的曲线（通常是最小光程）。



—— 光线实际路程
- - - 虚设的比较曲线

图 1-1 费马原理示意

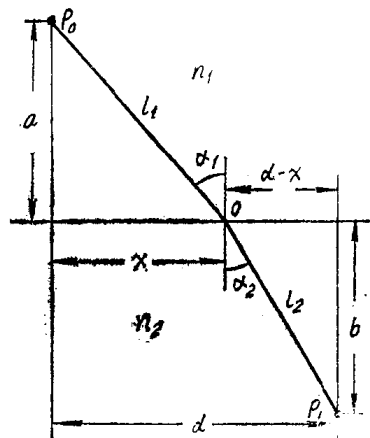


图 1-2 光线折射示意

由费马原理可以导出熟知的折射定律，即斯涅尔定律。

设有两种不同的媒质中的 P_0 和 P_1 两点以及与此两点相连的光线 P_0OP_1 ，光线进行的时间 t 由下式给出：

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} \quad (1-5)$$

利用 (1-3) 式，则 (1-5) 式可写为

$$t = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{c} = \frac{l}{c} \quad (1-6)$$

在 (1-6) 式中 l 为光程，于是，图 1-2 中光程 l 可写为

$$l = n_1 l_1 + n_2 l_2 \\ = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad (1-7)$$

按费马原理，两点间光线所经的路线应满足光程取极值的条件，因此，对 (1-7) 式取导数，并令它为零得

$$\frac{dl}{dx} = n_1 \left(\frac{1}{2} \right) (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) + \\ + n_2 \left(\frac{1}{2} \right) [b^2 + (d-x)^2]^{-\frac{1}{2}} (2)(d-x)(-1) = 0$$

经整理后得

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

即 $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (1-8)$

(1-8) 式即为熟知的折射定律。下面讨论哈密顿最小作用量原理。

力学中的变分法原理即哈密顿原理指出：在连接 P_0 点和 P_1 点 (图 1-3) 的一切可能的

途径中, 该质点所走的路径 (P_0OP_1) 一定满足以下的积分值:

$$\int_{t_0(P_0)}^{t_1(P_1)} (T - U) dt \rightarrow \text{极值} \quad (1-9)$$

若用变分形式表示则为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \quad (1-10)$$

在(1-9)和(1-10)式中 T 代表质点的动能, U 则为它的位能, t_0 和 t_1 分别为质点在 P_0 点和 P_1 点的时间, 而 $L = T - U$ 在力学中通常称为拉格朗日函数。

变分法原理与牛顿运动定律相比具有更为广泛的力学意义, 用它可求出与坐标系的选择无关的运动特性, 而在静止的直角坐标的特殊情况下, 它就转化为一般的牛顿方程。为使读者更清楚地明了这一点, 这里对此问题略加讨论。

从变分学可知, 如果具有变分的泛函 (函数的函数) $v[y(x)]$ 在 $y = y_0(x)$ 上达到极值, 则在 $y = y_0(x)$ 上有 $\delta v = 0$ 。具有极值的泛函必须满足欧勒方程。

此时欧勒方程可写为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-11)$$

(1-11)式中 q_i 为广义坐标, 而 \dot{q}_i 则为广义速度。如果用直角坐标 x, y, z 代入广义坐标 q_k , 并令动能和位能分别为

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad U = -eV$$

代入则

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + eV(x, y, z) \quad (1-12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m \dot{x} & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m \dot{y} & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} &= m \dot{z} \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= e \frac{\partial V}{\partial x} = -eE_x & \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -eE_y & \frac{\partial L}{\partial q_3} &= -eE_z \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

将(1-13)式分别代入(1-11)式中, 于是就得到熟知的牛顿运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m \dot{x}) &= -eE_x & \frac{d}{dt} (m \dot{y}) &= -eE_y \\ \frac{d}{dt} (m \dot{z}) &= -eE_z \end{aligned} \quad (1-14)$$

由此可见, 直角坐标系的拉格朗日方程就是牛顿方程, 它和变分方程

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (1-15)$$

的含义是一致的。

现在, 只讨论保守场的情况, 也就是只比较总能量 $W = T + U$ 相等的那些轨迹, 由于

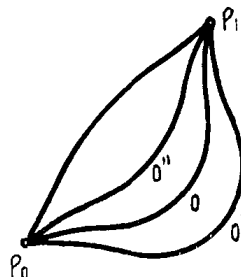


图 1-3 质点在保守场中运动的变分原理示意

$$\delta W = \delta(T + U) = \delta T + \delta U = 0 \quad (1-16)$$

$$\delta L = \delta(T - U) = \delta T - \delta U = 2\delta T \quad (1-17)$$

由此得出最小作用量原理如下

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0 \quad (1-18)$$

表达式 $S = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt$ 称为作用量函数。最小作用量原理说明，沿着实际轨迹的积分值 S 是极值

$$\delta S = 0 \quad (1-19)$$

若无须研究运动随时间的变化关系，而仅须确定轨迹，那么，我们就应该从上述方程中把时间消去。将 S 重新写为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} mv \cdot v dt$$

并且用从轨迹上某一固定点量起的沿轨迹的弧长 S 来确定电子的位置。那么

$$v dt = ds$$

以及

$$\delta S = \delta \int_{P_0}^{P_1} mv(s) ds = m \delta \int_{P_0}^{P_1} v(s) ds$$

这样，从 (1-19) 式得

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} v(s) ds = 0 \quad (1-20)$$

上式并不包含时间变量，仅与几何坐标有关。如果电位从阴极算起，并以 ε 代表电子离开阴极的热速度，那么

$$v(s) = \sqrt{\frac{2e}{m} \sqrt{V(s) + \varepsilon}}$$

代入 (1-20) 式，则得

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{V(s) + \varepsilon} ds = \delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{V^*(s)} ds = 0 \quad (1-21)$$

只要将 (1-21) 式和几何光学中的费马原理的 (1-4) 式略加比较，人们就会发现它们在形式上何等相似，只不过是几何光学中的折射率 n 换成电子在位场中运动的相应点的电位开根 $\sqrt{V^*}$ 。这就是说，电子在电位等于 V^* 的电场中运动的轨迹和光线在折射率于 n 的光学媒质中传播，只要起始条件相同以及各点 n 和 $\sqrt{V^*}$ 数相等，其传播路径（轨迹）就完全一致。因此，在电场情况下，我们称电位开根 $\sqrt{V^*}$ 为电子光学折射率。

其实，上述结论也可以从一个简单的例子中得到证明。

设有一电子从电位为 V_1 的区域进入电位为 V_2 的区域，两个区域的分界面为 AB 。在 AB 两边，电位有跃变，为了实现这种情况，可以对两片大而薄且非常邻近的细密金属网充电，如图 1-4 所示。在两个区域中，电子的轨迹均为直线，其速度各自由下式决定：

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = eV_1$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = e V_2 \quad (1-22)$$

电子通过电位分界面时，只受法向电场加速，故其速度的切向分量并不改变。若轨迹与分界面两边的法线夹角为 α_1, α_2 ，则有

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2$$

即 $\sqrt{V_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{V_2} \sin \alpha_2 \quad (1-23)$

将式 (1-23) 和 (1-8) 相比不难看出，这里，(1-23)

式中的 \sqrt{V} 就起了几何光学中折射率的作用，因此，

\sqrt{V} 就是电子光学的折射率。

至于电磁复合场中运动电子的等效折射率，在电子光学中可以证明为

$$n = \left[\sqrt{V^*} - \sqrt{\frac{e}{2m} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S})} \right] \quad (1-24)$$

在 (1-24) 式中， \mathbf{A} 为实际轨迹各点上的矢量磁位，而 \mathbf{S} 则为轨迹相应各点的切线方向的单位矢量。显然，(1-24) 式等号右方第二项是由磁场引起的，当运动方向改变时，它就相应改变符号。因此，磁场对于电子运动的特殊作用导致电子光学各向异性，这和光线通过晶体的情况对应。

通过以上讨论，给人们一种启示：是否可以用解决几何光学的方法来处理电子的聚焦、成象等问题。大量的实践已经证明，人们不但使用几何光学的方法处理了上述问题，制成了大量的电子器件，而且还制成了许多电子光学仪器如电子显微镜、质谱仪等。这样，就出现了电子光学这门学科。

对于速度很大的电子运动，必须考虑电子质量随速度的变化，由狭义相对论可知，质量随速度的变化关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (1-25)$$

式中 m_0 为“静止”质量； c 为光速。这时，能量关系可表示为

$$m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right\} - eV = K = \text{常数} \quad (1-26)$$

如果 V 从阴极算起，同时 ε 与 V 比较起来可以略去不计，那么 $K=0$ ，于是 (1-26) 式可写为

$$m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right\} = eV \quad (1-27)$$

由 (1-27) 式可以推得

$$\frac{mv}{m_0 c} = \left\{ \left(\frac{eV}{m_0 c^2} \right)^2 + \frac{2eV}{m_0 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1-28)$$

当考虑相对论修正时，对比 (1-4) 和 (1-20) 式可见，电子光学的无量纲折射率为

$$n_r = \frac{mv}{m_0 c} \quad (1-29)$$

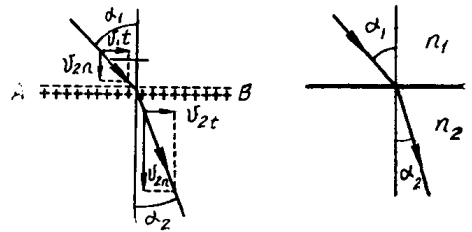


图 1-4 电子束在电位分界线上的折射

于是

$$n_r = \left\{ \left(\frac{eV}{m_0 c^2} \right)^2 + \frac{2eV}{m_0 c^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2e}{m_0 c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(V + \frac{e}{2m_0 c^2} V^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1-30)$$

如果将质量随速度的变化转换为相对论校正电压，由(1-30)式不难看出，相对论校正电压 V_r 为

$$V_r = V \left(1 + \frac{eV}{2m_0 c^2} \right)$$

$$= V (1 + 0.987 \times 10^{-6} V) \quad (1-31)$$

应用(1-31)式可以计算出各种加速电压情况下电子速度与相应的折射率，如图1-5所示。

由图可以看出，随着加速电压增高，实际电子速度的增长率在下降，最后趋近于光速；相反，折射率则迅速增加。当加速电压为一万伏时，考虑相对论修正和非相对论修正的速度、折射率尚为一致；而当电压增至十万伏时，二者的误差就变得明显。因此，此时就要考虑电子质量的相对论修正。对于电磁复合场同样也存在类似的问题。

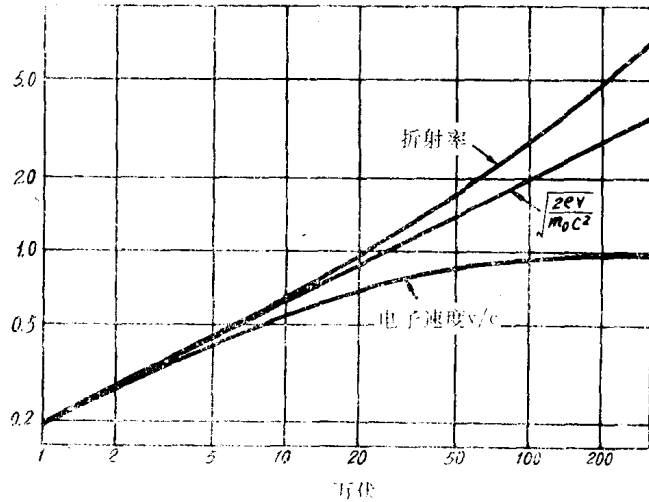


图1-5 高加速电压时的电子折射率和电子速度

§ 1.2 电子光学折射率的特性

通过上节讨论，我们建立了电子光学和几何光学的相似性的概念，特别讨论了电子光学和几何光学折射率的相似性问题，但它们之间也有一些特点，现分别讨论于下。

1. 在费马原理中，我们研究的是光线通过非均匀媒质的折射问题，折射率是坐标的连续函数。实际上，光学媒质的折射率也可以是坐标的非连续函数，通常在透镜中，折射率是常数，在分界面上折射率突变为透镜周围的媒质（如空气）的折射率数值，而电子光学的折射率取决于电磁场的分布。电位 V 和矢量磁位 A 不可能在电子通过的区域中某点上突变，因而电子光学的折射率是坐标的连续函数，电子轨迹的方向也不可能突然折射。

2. 由于光学媒质的天然性质，通常它们之间的折射率之比在1至2.5范围之内。在电子光学中，纯电场情况下，折射率正比于电位的平方根值。只要选择合适的电位，实际上可以使折射率的比值为任意数值。例如，电子离开阴极时，其速度等于0.1伏，此时 $n=0.3$ ，当它被加速到100千伏时，阳极上的折射率为300，这样，它们之间的折射率之比就高达 10^3 倍了。

3. 在几何光学中，由各种光学材料制成的透镜系统，当沿对称轴的折射率分布确定后，透镜的表面（折射面）的几何形状尚可任意改变，以达到减小象差的目的。但电子光学的折射率取决于空间电位和矢量磁位的分布，它必须满足拉普拉斯方程，因此，当沿轴电位和矢量磁位确定以后，空间任意一点的电场、磁场就同时确定了，这就使得电子光学系统不

能采用几何光学系统相同的方法来消除象差。

4. 当存在磁场时, 电子光学的折射率数值也和电子运动方向有关。这就表明, 此时电子光学的媒质是各向异性的。在几何光学中, 晶体的折射率和光线的传播方向有关。但是晶体是均匀的媒质, 在一般情况下, 电子光学的折射率不但与坐标有关, 而且与射线的方向有关, 因此, 电子光学系统的折射率既是非均匀的, 又是各向异性的。

5. 电子光学折射率与电子速度的绝对值有关。在电磁场中, 某一定点处的折射率, 对于阴极发射的初速不同的电子, 有着不同的量值, 正象光学媒质折射率与光的波长有关一样。

6. 在电子光学系统中, 有时要考虑电子之间的排斥力即空间电荷效应, 而在几何光学中没有对应的问题存在。

参 考 文 献

[1] 成都电讯工程学院选编

《电子光学》人民教育出版社 1961

[2] A. 卢斯特霍兹著 陈俊美译

《电子光学》人民教育出版社 1962

[3] V.K. Zworykin

《Electron Optics and the Electron Microscope》1946

第二章 电子在轴对称场中的运动

§ 2.1 轴对称电场的电位分布

从普通光学可知，光学透镜的形状，绝大部分是轴对称的。只有这种透镜才能聚焦成象。与此同理，在电子光学中，构成对电子起折射作用的场（电场与磁场）也应是轴对称的。因此，电子光学中构成透镜的各个电极，绝大部分都是由轴对称的圆筒、圆孔膜片，以及其它轴对称的形状所构成。

采用圆柱坐标 (z, r, φ) 表示旋转对称电场的分布（图 2-1），比用直角坐标 (x, y, z) 更为合宜。

使圆柱坐标的 z 轴和场的对称轴重合，并从 xoz 平面起始计算 φ 角。

这样，空间任意一点 P 的直角坐标 x 和 y 与同一点的圆柱坐标 r 和 φ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

在圆柱坐标系中，空间任一点 $P(z, r, \varphi)$ 的电位 V 是 z ， r 和 φ 三个参量的函数。

$$V = V(z, r, \varphi) \quad (2-2)$$

从以上讨论可知，在此场中，通过对称轴的任一剖面上的电位分布都是完全相同的。通常称此平面为子午面。图 2-2 表示不等径双圆筒透镜子午面上的电位分布。显然存在下述关

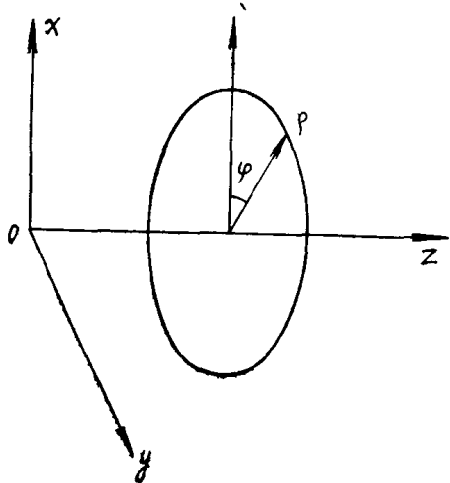


图 2-1 圆柱坐标

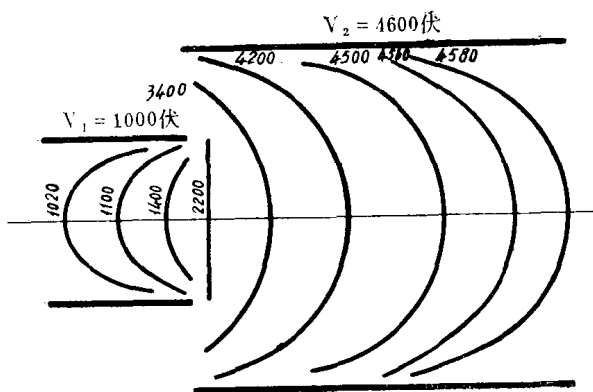


图 2-2 轴对称静电场

系：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V(z, r, \varphi)}{\partial \varphi} &\equiv 0 \\ V &= V(z, r) \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

由 (2-3) 式可知，轴对称静电场中，若 r 和 z 相同，仅角坐标 φ 不同的各点电位相同。因此，若子午面上场分布为已知，只须将它绕对称轴旋转一周，就得到整个空间的场分布。这就是说，轴对称电场中的等位面是旋转曲面。

由图 2-2 还可以看出, 由于轴对称的缘故, 必然存在

$$V(z, -r) = V(z, r) \quad (2-4)$$

大家知道, 场中不存在空间电荷时, 电极间的电位分布应满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2-5)$$

在圆柱坐标系中, 拉普拉斯方程的形式为

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2-6)$$

由于轴对称场与 φ 无关, 因而 (2-6) 式可简化成

$$\nabla^2 V(z, r) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(z, r) \quad (2-7)$$

若将给定的轴对称电极系统作为边界条件, 解 (2-7) 式, 就得到轴对称静电场的分布。因此, 求轴对称静电场的问题, 也就是解 (2-7) 式表示之拉普拉斯方程的问题。

因为电子光学中遇到的电子运动, 大部分局限于对称轴附近, 即电子大都是沿对称轴的方向通过系统, 并且离开对称轴的距离都是很小的。这样, 可以将电位 $V(z, r)$ 按 r 的幂级数展开

$$V(z, r) = V_0(z) + rV_1(z) + r^2V_2(z) + \dots + r^nV_n(z) + \dots \quad (2-8)$$

式中 $V_0(z), V_1(z) \dots V_n(z)$ 仅是 z 的函数。考虑到轴对称场必具有 (2-4) 式的性质。因此, (2-8) 式中 r 的奇次项系数均应等于零。即

$$V_1(z) = V_3(z) = \dots = V_{2n-1}(z) = 0 \quad (2-9)$$

这样, (2-8) 式简化成

$$V(z, r) = V_0(z) + r^2V_2(z) + \dots + r^{2n}V_{2n}(z) + \dots \quad (2-10)$$

$V(z, r)$ 应满足轴对称情况下的拉普拉斯方程 (2-7), 将式 (2-10) 对 z 和 r 微分:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, r) = V_0''(z) + r^2V_2''(z) + \dots + r^{2n}V_{2n}''(z) + \dots \quad (2-11a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) = 2V_2(z) + 4r^2V_4(z) + \dots + 2nr^{2n-2}V_{2n}(z) + (2n+2)r^{2n}V_{2n+2}(z) + \dots \quad (2-11b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} V(z, r) = 2V_2(z) + 4 \cdot 3r^2V_4(z) + \dots + 2n(2n-1)r^{2n-2}V_{2n}(z) + (2n+2)2nr^{2n-2}V_{2n+2}(z) + \dots \quad (2-11c)$$

将 (2-11a), (2-11b) 和 (2-11c) 三式代入 (2-7) 式, 则得

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(z, r) = & [V_0''(z) + 4V_2(z)] + r^2[V_2''(z) + 4^2V_4(z)] \\ & + r^4[V_4''(z) + 6^2V_6(z)] + \dots + r^{2n}[V_{2n}''(z) \\ & + (2n+2)^2V_{2n+2}(z)] + \dots + 0 \end{aligned} \quad (2-12)$$

这样, 我们就得出一个新的 r 的幂级数, 这个级数的总和, 对于 r 的任何值都应等于零。为此, r 的各次幂的系数都应该等于零。由这个条件可定出 (2-10) 式中各系数间的关系为

$$\left. \begin{aligned} V_0''(z) + 2^2V_2(z) &= 0 \\ V_2''(z) + 4^2V_4(z) &= 0 \\ V_4''(z) + 6^2V_6(z) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ V_{2n-2}''(z) + (2n)^2V_{2n}(z) &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

整理后, 就可得出

$$\begin{aligned}
 V_2(z) &= -\frac{1}{2^2} V_0''(z) \\
 V_4(z) &= -\frac{1}{4^2} V_2''(z) = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} V_0^{(4)}(z) \\
 V_6(z) &= -\frac{1}{6^2} V_4''(z) = \frac{-1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} V_0^{(6)}(z) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 V_{2n}(z) &= \frac{-1}{(2n)^2} V_{2n-2}''(z) = \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} V_0^{(2n)}(z) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

式中 $V_0''(z)$, $V_0^{(4)}(z)$, $V_0^{(6)}(z) \dots V_0^{(2n)}(z)$ 分别代表 $V_0(z)$ 对 z 的 2 阶、4 阶、6 阶 $\dots(2n)$ 阶的导数。

将 (2-14) 式代入 (2-10) 式, 得到轴对称场子午面上的电位表示式:

$$\begin{aligned}
 V(z, r) &= V_0(z) - \frac{r^2}{2^2} V_0''(z) + \frac{r^4}{2^2 \cdot 4^2} V_0^{(4)}(z) + \dots + \\
 &+ \frac{(-1)^n r^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} V_0^{(2n)}(z) + \dots
 \end{aligned} \tag{2-15}$$

将 $r=0$ 代入上式, 则得

$$V(z, 0) = V_0(z) \tag{2-16}$$

由 (2-16) 式立即看出, $V_0(z)$ ① 就是对称轴上的电位分布。

前面已经谈到, 轴对称静电场的空间电位分布, 可用子午面上的电位分布表示。将子午面上的电位分布绕对称轴旋转一周, 就得到整个空间的电位分布。现在, 得到了 (2-15) 式, 即可进一步说明只要知道了沿轴电位分布 $V(z)$, 就可以知道子午面上的电位分布, 从而也就知道整个空间的电位分布。

电子光学中遇到的电子运动, 大部分局限于对称轴附近。这个区域, 我们称为“旁轴区域”。因此, 对该区域, 必须特别加以研究。

在旁轴区域内, 因为 r 很小, 所以 r 的高次项可以略去。通常, 取 (2-15) 式的前二项就够了。这时, (2-15) 式可简化成

$$V(z, r) = V(z) - \frac{r^2}{4} V''(z) \tag{2-17}$$

当需要计算象差或其它远轴问题时, 通常再多取一项, 即

$$V(z, r) = V(z) - \frac{r^2}{4} V''(z) + \frac{r^4}{64} V^{(4)}(z) \tag{2-18}$$

下面进一步讨论轴对称子午面上旁轴区等位面的形状。

让我们在对称轴上任选一点 z_0 , 其电位值为 $V(z_0)$ 。在 z_0 点附近, $V(z, 0)$ 可用台劳级数展开成

① 今后, 为了书写简便, 去掉沿轴电位分布的注脚, 即用 $V(z)$ 表示 $V_0(z)$

$$V(z, 0) = V(z_0) + (z - z_0)V'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2}V''(z_0) + \dots \quad (2-19)$$

$$\text{在 } z_0 \text{ 点处, } V(z, r) = V(z_0, 0) = V(z_0) \quad (2-20)$$

将 (2-19) 式代入 (2-17) 式则得

$$(z - z_0)V'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2}V''(z_0) - \frac{r^2}{4}V''(z_0) = 0 \quad (2-21)$$

即

$$r^2 - 2\left[(z - z_0) + \frac{V'(z_0)}{V''(z_0)}\right]^2 + 2\left[\frac{V'(z_0)}{V''(z_0)}\right]^2 = 0 \quad (2-22)$$

上式为子午面上的双曲线方程。由于 z_0 点是任选的，因而可以说，在对称轴附近，等位面都是旋转双曲面。在子午面上，旋转双曲面蜕化成顶点在 z 轴上的双曲线。

下面，我们求此双曲线的曲率半径 R 。

如果已经知道曲线的方程式 $r = r(z)$ ，则利用下式就可求出曲率半径 R

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2r/dz^2} \quad (2-23)$$

因为在 $V(z, r) = V(z_0)$ 等位线上电位处处相等，所以将 $V(z, r)$ 对 z 微分，得到

$$\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) + \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \frac{dr}{dz} = 0 \quad (2-24)$$

因而

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\frac{\partial}{\partial z} V(z, r)}{\frac{\partial}{\partial r} V(z, r)} \quad (2-25)$$

将 (2-24) 式对 z 再微分一次，并将 (2-25) 式代入，得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) + \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \frac{dr}{dz} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \right] \frac{dr}{dz} + \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \frac{d^2r}{dz^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, r) + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} V(z, r) \frac{dr}{dz} - \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} V(z, r) \frac{dr}{dz} \right] \frac{dr}{dz} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \frac{d^2r}{dz^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, r) - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} V(z, r) \frac{\frac{\partial}{\partial z} V(z, r)}{\frac{\partial}{\partial r} V(z, r)} \\ & \quad - \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(z, r) \frac{\left[\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) \right]^2}{\left[\frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \right]^2} + \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \frac{d^2r}{dz^2} = 0 \end{aligned} \quad (2-26)$$

由此得出

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dz^2} = & - \frac{1}{\left[\frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \right]^3} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, r) \left[\frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \right]^2 \right. \\ & - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} V(z, r) \frac{\partial}{\partial z} V(z, r) \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \\ & \left. - \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(z, r) \left[\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2-27)$$

将 (2-25), (2-27) 代入 (2-23) 式, 则得等位面上任意一点处的曲率半径

$$\begin{aligned} R(z, r) = & \frac{\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) \right]^2 \right\}^{3/2}}{\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, r) \left[\frac{\partial}{\partial r} V(z, r) \right]^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} V(z, r) \frac{\partial}{\partial z} V(z, r) \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) -} \\ & - \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(z, r) \left[\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) \right]^2} \end{aligned} \quad (2-28)$$

对于轴上之点, $z = z_0, r = 0$ 。于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} V(z, r) = V'(z_0) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} V(z, r) = -\frac{1}{2} V''(z_0), \quad \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} V(z, r) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z, r) = V''(z_0) \end{aligned} \quad (2-29)$$

所以
$$R(z_0) = \frac{2V'(z_0)}{V''(z_0)} \quad (2-30)$$

(2-30) 式表明, 等位面顶点的曲率半径完全取决于轴上的电位分布。

在电子光学中, 经常遇到“鞍点”场。鞍点的意思是指该点电位在一个方向上是最高点(或最低点), 而在垂直方向上则又是最低点(或最高点), 形如马鞍。图 2-3 中 o 点就是“鞍点”场。由图可见, o 是 z 轴上的对称点。电场不仅对 z 轴对称, 而且对 o 点对称。

从数学上讲, “鞍点”就是极点, 因而它的一阶导数必为零, 即

$$\frac{\partial}{\partial z} V(z, r) = \frac{\partial}{\partial r} V(z, r) = 0 \quad (2-31)$$

但“鞍点”的二阶导数不为零。此时 (2-22) 式蜕化成

$$r^2 - 2(z - z_0)^2 = 0 \quad (2-32)$$

$$r = \pm \sqrt{2} (z - z_0) \quad (2-33)$$

式中 z_0 点是“鞍点”。由式可见, 等位线蜕化成两条直线, 如图 2-4 所示。其与对称轴的半夹角为

$$\arctg \sqrt{2} = 54^\circ 44' \quad (2-34)$$

由此, 可以把轴对称静电场在对称轴附近的特性归纳为:

1. 在对称轴附近, 等位面是旋转双曲面, 它与对称轴正交;
2. 对称轴附近等位线的曲率半径只决定于电位分布;
3. “鞍点”处, 旋转双曲面蜕化成与轴交角为 $54^\circ 44'$ 的渐近面。