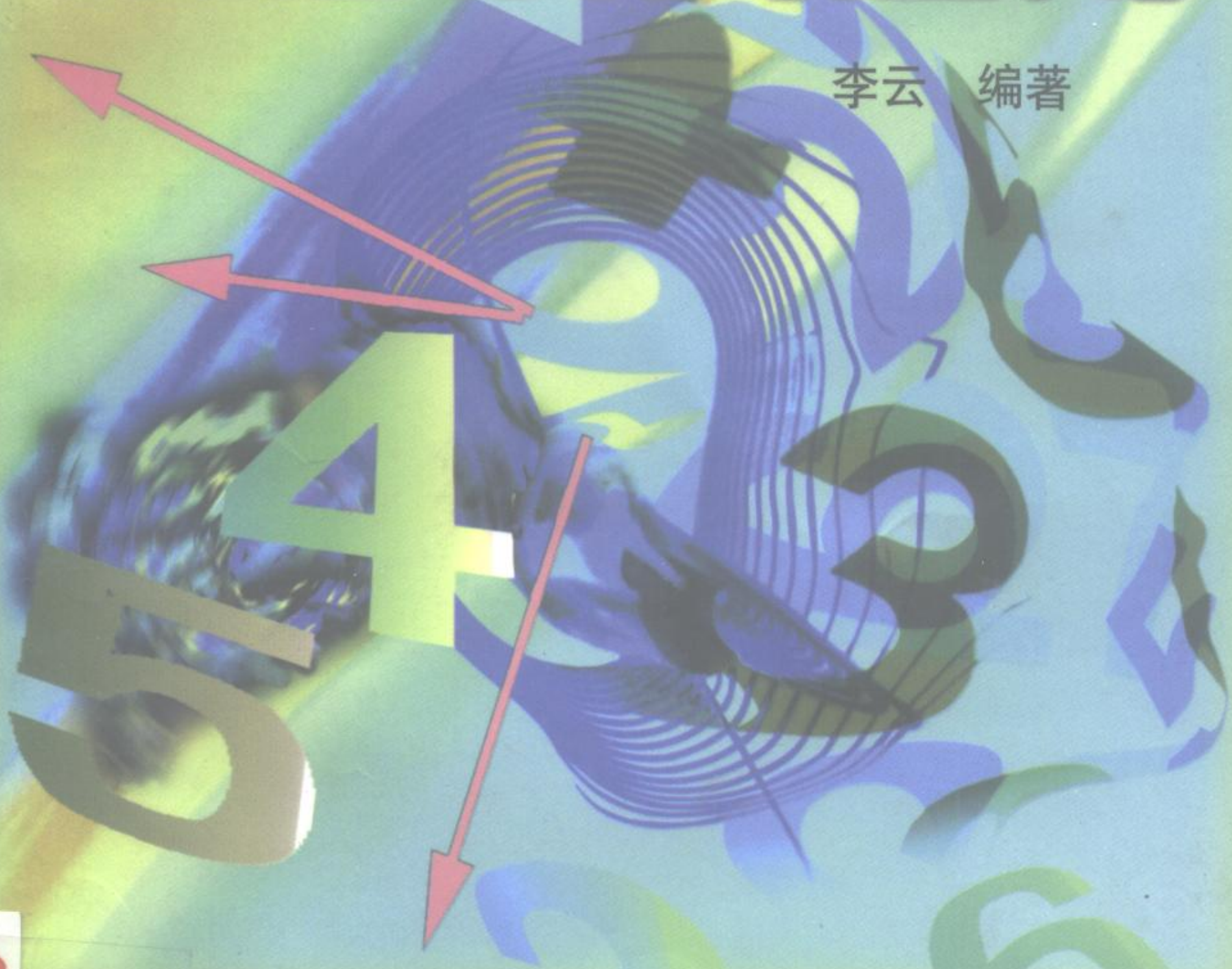
非线性动力系统的现代数学方法及其应用

李云　编著



人民交通出版社

内 容 提 要

《非线性动力系统的现代数学方法及其应用》共分十章，着重讲述微分动力系统、分支的理论和方法，以及浑沌的数学基础等。围绕这些中心内容，对应用泛函分析、拓扑学和微分流形的基本理论也作了简要的介绍。

本书可作为工科高年级学生和研究生的选修课教材或教学参考书，也可供理科高年级学生、研究生、有关教师和工程技术人员，以及对非线性问题有兴趣的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力系统的现代数学方法及其应用/李云著.—北京:人民交通出版社,1997.11

ISBN 7-114-02836-9

I.非… II.李… III.非线性-动力系统(数学)-教学方法 IV.0175

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第25168号

非线性动力系统的现代数学

方法及其应用

李云 编著

责任印制:孙树田 版式设计:刘晓方 责任校对:张捷

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街10号)

各地新华书店经销

新世纪印刷厂印刷

开本:787×1092 1/16 印张:23.25 字数:580千

1998年3月 第1版

1998年10月 第1版 第2次印刷

印数:1001—2000册 定价:36.00元

ISBN 7-114-02836-9
O·00005

前　言

在21世纪即将到来之际，随着科学技术的迅猛发展及计算机的不断革新和普及，数学的作用不但为支撑其他科学提供必要的基础知识，而且是直接活跃在技术革命第一线、屡建奇功的重要学科；同时数学技术在高技术中的地位不断增强，科学计算已经和理论研究、科学实验并列为科学研究的三大支柱，正在形成三位一体的现代综合研究模式。与此同时，数学本身也经历了一场深刻的变革，新的数学思想、数学分支层出不穷，各种理论和方法相互交叉、互相渗透，在实际应用中显示出强劲的活力，数学获得了巨大的进步。

70年代以来，微分动力系统的现代发展、分支的数学理论和方法的逐步形成，以及对浑沌现象的分析和数学意义的探讨，已经成为当代最活跃的研究领域，成为非线性科学研究的前沿。这些学科之所以受到普遍重视，不仅是因为有其丰富而深刻的理论，而且特别是由于有其广泛而有成效的应用。因此，它们已成为解决自然科学和工程技术中诸多问题的强有力的工具，而且即将成为对工科高年级学生和研究生进行现代数学教学的选修科目。

本书是采用现代数学的观点和方法写成的。其结构安排如下：前五章集中而扼要地讲述应用泛函分析、拓扑学和微分流形的基本理论和方法，为本书提供一个较完整的理论框架。当然这些内容本身也是提高数学修养、进入现代数学领域的必备知识，同时，也是处理非线性问题的有力工具，第六章对经典的定性分析和稳定性概念作一般介绍；第七章简要叙述渐近方法，最后三章系统地阐述微分动力系统、分支和浑沌的基本理论、方法及其应用，这是本书的核心部分，其中也包括了作者近几年来的研究工作。作者尝试利用定性分析探讨解的拓扑结构，利用渐近方法求出解的局部描述，利用数值计算获得解的全局图象，力图使读者迅速地掌握现代数学分析的知识、方法和技巧，尽快地进入非线性现象研究的前沿。

本书基本上是自封闭的，只要具有高等数学和线性代数的基础，循着本书的线索阅读，不会有太大的困难。考虑到工科各专业学生的特点，本书在注意数学概念的准确性和数学理论的系统性的同时，略去某些繁琐的证明，简化许多冗长的推理演绎过程，尽量采用深入浅出的叙述方式。本书强调数学理论在工程上的应用性，密切结合物理、力学、生态学、自动控制、流体力学和机电工程的实际需要，力求反映八九十年代的一些研究进展。本书每章都有相当数量的例题和习题，用来帮助读者加深理解所学的知识和熟练运用重要的方法；还附有较详细的参考文献目录，供读者进一步学习时使用。

本书初稿以讲义的形式在武汉交通科技大学对博士生讲课时多次使用过，并在教学实践中反复修改与完善，效果尚好。

在编写本书的过程中，孙国正教授、李世谟教授、朱国伟教授和谢世忠研究员十分关心并给予热情的鼓励；肖国平副教授在工作之余精心绘制了本书的全部插图；彭德茂副教授、章社生副教授和金升平副教授提供了许多重要的信息和资料。本书的写作还得到了选修这门课程的全体博士生的许多具体帮助，得到了研究生部、基础课部和教材科的大力支持，作者表示衷心的感谢。

武汉大学周焕文教授、武汉工业大学何猛省教授在百忙中认真审阅了初稿全文，还抽出

时间和作者就本书内容的选择、全书结构和写作方式进行深入而细致的讨论，并提出了许多宝贵的意见和建议，使本书增色不少。本书还从国内外许多学者的著作和论文中选用了一些材料。追根溯源，作者能有勇气写出这样一本书，还得益于参加了非线性偏微分方程讨论班。教授们精彩的论文报告，激烈的论辩，认真而坦诚地交换意见，这样活跃的民主学术空气使作者获益匪浅。特别是周笠教授和宋开泰教授为使讨论班长期稳定而富有成效的开展活动所作出的贡献，以及给予作者的一贯支持，令人钦佩。最后，作者还怀着深深的敬意提到：母校——武汉大学数学系为讨论班的活动提供了一切方便，在此谨致诚挚的谢意。

由于作者学识水平有限，时间仓促，又加之对这种涉及多方面现代数学题材进行综合写作，尚属初次尝试，不当和错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

作者谨识

1997 年 5 月

目　录

第一章　集合、映射和 Lebesgue 积分

本章摘要地介绍集合论和实分析的一般概念，以及几个常用的不等式，为学习后继几章内容打下基础。

§1.1　集合及其运算

集合是数学中最基本而又最原始的概念之一。它不能用其它任何概念来定义，而是用公理化的方法加以引入，或者是作一个描述性的说明。粗略地讲，凡是具有某种共同特征的一些对象组成的总体就称为一个集合（或简称为集），而其中的每个对象称为集合的元素（或元），通常用大写字母 A、B、X、Y、…表示集合，用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合的元素。如果 A 是一个集合，那末，$x\in A$ 表示 x 是 A 的一个元素，当 x 不是 A 的元素时，则记为 $x\overline{\in}A$（或 $x\notin A$）。

集合有两种表示法：

列举法　把集合中的元素列举出来称列举法。例如，$A=\{-2,2\}$ 表示 $-2,2$ 两个元素组成的集合；$B=\{a,b,c\}$ 表示 a,b,c 三个元素组成的集合；$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 表示全体自然数组成的集合。

特性表示法　把集合中元素的特性表示出来称特性表示法。例如，$E=\{x\,|\,x$ 具有性质 $p(x)\}$，表示具有性质 $p(x)$ 的一切 x 构成的集合；$A=\{x\,|\,x^2=1\}$ 表示满足条件 $x^2=1$ 全体作成的集合即 $\{-1,1\}$；而 $B=\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上的全体函数值所成的集合。

必须指出，集合的元素并非一定都是数。例如，$\{f(x)\,|\,f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续$\}$ 表示在闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体所成的集合，记为 $C[a,b]$；$\{x\,|\,x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty,\xi_i\in K\ (i=1,2,\cdots),K$ 是数域（实数域或复数域）$\}$，表示满足条件：$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$ 的实数（或复数）列 $(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 的全体所成的集合，记为 l^p。

另外，不同的集合所含元素的数目一般也不相同。凡是只有有限个元素的集合称为有限集；不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合是空集，即 $\{x\in R\,|\,x^2+1=0\}=\varnothing$；既非空集又非有限集的集合称为无限集。

在集论中，常使用下述定义：

设 A,B 是给定的两个集合，如果对于每一个 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）；如果 $A\subset B$，同时 $B\supset A$，即 A 和 B 含有完全相同的元素，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$；如果 A 和 B 不相等，则记作 $A\neq B$；如果 $A\subset B$，且 $A\neq B$，则 A 为 B 的真子集，记作 $A\subsetneq B$。我们规定空集是任何集合的子集，而每一个非空集合 A 至少有两个明显的子集：A 和 $\varnothing$。

设 A，B 是给定的两个集合，由 A 和 B 所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 A

$\cup B$，即
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$
A 和 B 所共有的元素组成的集合称为 A 和 B 的交集，记作 $A \cap B$，即
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$
属于集 A 而不属于集 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的差集，记作 $A-B$（或 $A\backslash B$），即
$$A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \overline{\in} B\}$$
必须指出，在集 A 和集 B 差集的定义中，B 可以是也可以不是 A 的子集。

在研究具体问题时，如果所考虑的一切集都是集 X 的子集，则称 X 为基本集。如果 X 是一个非空的基本集，$A \subset X$，则定义 $X-A$ 为 A 关于 X 的余集（或补集），记作 A_X^c 或 A^c。

并和交的定义可以推广到任意个集合的情形。设 $\{A_\alpha | \alpha \in J\}$ 是一族集合，即对于每个 $\alpha \in J$ 可确定一个集 A_α，J 为指标集。这一族集合的并 $\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ 和交 $\bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ 分别定义为
$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x | \text{ 存在 } \alpha \in J, \text{使得 } x \in A_\alpha\}$$
和
$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x | \text{ 对于任意 } \alpha \in J, \text{均有 } x \in A_\alpha\}$$
设 A, B 是给定的二非空集合，对于 $a \in A$ 和 $b \in B$，以 (a,b) 表示有序元素对，简称为序对。如果 $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ 则称序对 (a_1, b_1) 和序对 (a_2, b_2) 相等，记作 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$。由集合 A, B 中元素构成的所有序对组成的集合称为 A 和 B 的直积（或积集），记作 $A \times B$，即
$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$
例如，已知 $A = [-1,1]$，$B = [-1,1]$，那末，直积 $A \times B$ 就是一个面积为 4 个平方单位的正方形，即
$$A \times B = \{(a,b) | a \in [-1,1], b \in [-1,1]\}$$
一般说来，$n(n \geqslant 2)$ 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的直积（或积集）类似地定义为
$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}\end{aligned}$$
其中每个 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为此直积的坐标集。例如，两个实直线 R 的直积就是实平面，即 $R^2 = R \times R$，R^n 就是 n 个实直线 R 的直积，即 $R^n = R \times R \times \cdots \times R$。

设 A, B, C 是给定的三个集合，则集合的运算规律如下：

(1)等幂律　$A \cup A = A, A \cap A = A$；

(2)交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

(3)结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$，
　　　　　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$；

(4)分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，
　　　　　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

定理(De－Morgan 法则)　设一族集 $A_n, A_n \subset X (n = 1, 2, \cdots)$，$X$ 是基本集，则有

(1) $(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c$；

(2) $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c$。

证明　先证(2)。设 $x \in (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)^c$，则 $x \overline{\in} A_n (n = 1, 2, \cdots)$，于是 $x \in A_n^c (n = 1, 2, \cdots)$，因此

$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$，从而推得$(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$。

反之，设$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$，则$x\in A_n^c(n=1,2,\cdots)$，因此，$x\overline{\in}A_n(n=1,2,\cdots)$，即$x\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，于是$x\in(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c$，从而推得$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\subset(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c$。所以

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$$

再对(2)两端同时取余集，可得

$$[(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c]^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c)^c$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c)^c$$

将上式中A_n换成A_n^c，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c=[\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c)^c]^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)^c$$

De－Morgan法则常称为对偶原理，我们概括地叙述为：并的余等于余的交，交的余等于余的并，它在集论中有着广泛的应用。

§1.2 映　　射

在微积分中，函数的概念得到了详细而深入的分析和讨论。如果用具有任意属性的集合代替函数概念中的数集，那末，就可以得到函数最一般的概念，即所谓映射的概念。它是现代数学最基本的概念之一。

定义1 设A和B是两个非空集合，f是A,B元素间的一个对应关系(法则)，如果对于任一$x\in A$，依照法则f，B中有唯一确定的元素$y\in B$与之对应，那末，称f为A到B的映射，记为

$$f:A\to B\text{或}x\mapsto y$$

y称为x在映射f下的象，记作$y=f(x)$或$y=fx$，集合A称为映射f的定义域，记为$\mathscr{D}(f)$，对于任意$x\in\mathscr{D}(f)$在f下的象构成的象集$f(A)=\{y|y=f(x),x\in\mathscr{D}(f)\}$称为$f$的值域，记作$\mathscr{R}(f)$。一般地，值域$\mathscr{R}(f)$是$B$的一个子集。

一点$y\in B$的逆象(或原象)是使得$f(x)=y$的所有$x\in\mathscr{D}(f)$的集合，记作$f^{-1}(y)$，即$f^{-1}(y)=\{x|f(x)=y,x\in\mathscr{D}(f)\}$；子集$B_1\subset B$的逆象集(或原象集)是使得$f(x)\in B_1$的一切$x\in\mathscr{D}(f)$的集合，记作$f^{-1}(B_1)$，即$f^{-1}(B_1)=\{x|f(x)\in B_1,x\in\mathscr{D}(f)\}$。

必须注意，点$y\in B$的逆象可以是空集、单点集或$\mathscr{D}(f)$的子集，这取决于给定的元素$y\in B$和映射f。还要指出，当A和B两个集合为数集时，这里定义的映射f就是通常所说的函数概念。

定义2 设映射$f:A\to B$，如果$\mathscr{R}(f)=B$，则称f为从A到B上的映射，又简称为满射；如果对于A中任意元素x_1和x_2，当$x_1\neq x_2$时，蕴含$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为单射或一一映射；如果f既是单射又是满射，则称f为双射或从A到B的一一对应的映射。

设f是$A\to B$的单射，对于任意$b\in\mathscr{R}(f)$，一定有唯一的$a\in\mathscr{D}(f)$与之对应，因此存在一个对应法则g，且对任意$a\in A$，有$g(f(a))=a$，以及对任意$b\in B$，有$f(g(b))=b$，则称g为f的逆映射，记作$g=f^{-1}$。

设有两个映射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$，且规定 $(g\circ f)(a)=g(f(a))$，这种从 $A\to C$ 的映射称为复合映射，记作 $g\circ f:A\to C$。

设 f_1,f_2 是给定的两个映射，如果 $\mathscr{D}(f_1)=\mathscr{D}(f_2)$，并且对于一切 $x\in\mathscr{D}(f_1)=\mathscr{D}(f_2)$ 都有 $f_1(x)=f_2(x)$，则称映射 f_1 和 f_2 是相等的。

设 A 为一非空集合，如果集合 A 到 A 上的映射 $f:a\mapsto a$，则称 f 为 A 上的恒等映射，记作 I。

设映射 $f:X\to Y$，且 $A\subset X,B\subset X,D\subset Y,F\subset Y$，则有

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$；

(3) $f^{-1}(D\cup F)=f^{-1}(D)\cup f^{-1}(F)$；

(4) $f^{-1}(D\cap F)=f^{-1}(D)\cap f^{-1}(F)$。

定义 3 设 f,g 分别是定义域 $\mathscr{D}(f),\mathscr{D}(g)$ 到 B 的映射，如果 $\mathscr{D}(f)\subset\mathscr{D}(g)$，而且对于 $\mathscr{D}(f)$ 中的每一个元素 x 成立着

$$g(x)=f(x)$$

则称映射 g 是映射 f 在 $\mathscr{D}(g)$ 上的延拓，记作 $f=g|_{\mathscr{D}(g)}$；反之称 f 是 g 在 $\mathscr{D}(f)$ 上的限制，记作 $g=f|_{\mathscr{D}(f)}$。

必须指出，g 在 $\mathscr{D}(f)$ 上的限制 $g|_{\mathscr{D}(f)}$ 是由 g 和 $\mathscr{D}(f)$ 所唯一确定的，而 f 在一个更大区域上的延拓并不是唯一的，因此在许多问题中，常要求延拓后的映射满足一定的附加条件。

例 1 用 R 表示全体实数的集合（简称实数集），R^+ 表示非负实数的集合，映射 f 表示规则 $f(x)=x^2$，试考察下列映射：

$f:R\to R$ 不是单射，因为 $-x$ 和 x 都映成 x^2。它也不是满射，因为 R 中的负实数不是 f 的象；

$f:R\to R^+$ 不是单射，但是满射；

$f:R^+\to R$ 是单射，但不是满射；

$f:R^+\to R^+$ 是双射。

例 2 设 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，如果定义映射 $f:A\to B$ 使得 $f(2)=\alpha,f(4)=\beta,f(6)=\beta$，这种映射既不是单射也不是满射；如果定义映射 $f:A\to B$ 使得 $f(2)=\alpha,f(4)=\beta,f(6)=\gamma$，则此映射是双射。

定义 4 设 A,B 是两个非空集合，如果存在双射 $f:A\to B$，则称 A 和 B 是对等的集合，记作 $A\sim B$。

必须指出，$A\sim B$ 和 $A=B$ 具有不同的含义。$A\sim B$ 意味着 A 的元素与 B 的元素之间有一一对应的关系；而 $A=B$ 等价于它们的元素完全相同，因此对等的两个集合不必相等。

例如，$\{1,2,3\}\sim\{2,4,6\}$；$\{1,3,5,\cdots\}\sim\{1,2,3\cdots\}$；实数集 R 中的区间 $(-1,1)$ 与 R 是对等的，因为 $f(x)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 就是这两集合间的双射。

凡是能与自然数集 N 对等的集合称为可数集或可列集，否则就是不可数集或不可列集。

定理 1 一个集合 A 的可数的充分必要条件是 A 的全部元素能用自然数编号，即 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$。

定理 1 可由定义 4 直接推得。

定理 2 任何无限集必含有可数子集。

证明 设 A 是无限集，取 $a_1 \in A$，由于 A 为无限集，于是 $A \backslash a_1$ 非空，再取 $a_2 \in A \backslash \{a_1\}$，而 $A \backslash \{a_1, a_2\}$ 非空，如此继续下去，则可得 A 的一个可数子集 $\{a_1, a_2, \cdots\} \subset A$。

定理 3 (1)可数集的任何子集或者是有限集或者是可数集；

(2)可数多个可数集之并集仍是可数集。

证明 (1)设 A 是可数集，即 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，如果 B 是 A 的子集，当 $B \neq \varnothing$，则

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\} \subset A$$

若指标集 $\{n_k\}$ 中有最大者，则 B 是有限集；若指标集 $\{n_k\}$ 无最大者，则 B 是可数集。

(2)设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都是可数集，要证明 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是可数集。令

$$\begin{array}{llllll}
A_1 = \{a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, \cdots\} \\
A_2 = \{a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, \cdots\} \\
A_3 = \{a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, \cdots\} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_k = \{a_{k1}, & a_{k2}, & a_{k3}, & a_{k4}, \cdots\} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

按上面的顺序排列得到

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, \cdots\}$$

从中删去重复的元素，这样 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的元素可以排列成一个无穷序列，即能用自然数编号，故它是可数的。

例 3 奇数全体组成的集合、偶数全体组成的集合、整数全体组成的集合都是可数集。显然，这些集合与自然数集 N 对等。

例 4 有理数全体构成一可数集。

事实上，任何有理数 p 均可写成既约分数 $\frac{m}{n}$，m、n 皆为整数，且 $n \neq 0$。我们可以把 $\frac{m}{n}$ 认为是与直角坐标平面上的点 (m, n) 对应，由定理 3 可知，这种格点 (m, n) 的全体至多是可数的。所以，有理数全体组成的集合是可数的，有理数集记作 Q。

例 5 有理系数多项式全体组成的集合是可数的。

事实上，零次有理系数多项式 $\{a\}$ 全体是可数的，一次有理系数多项式全体 $\{ax+b\}$ 是可数的，……，k 次有理系数多项式全体 $\{ax^k + bx^{k-1} + \cdots + c\}$ 是可数的，……。根据定理 3，故有理系数多项式全体构成的集合是可数的。

可以证明，闭区间 $[0,1]$ 中全体实数是不可数集，于是，开区间 $(0,1)$ 中全体实数也是不可数集。再对每一个 $x \in (0,1)$，令 $f(x) = \mathrm{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$，可得开区间 $(0,1)$ 和全体实数 R 是对等的，故实数集 R 是不可数集，从而推得全体无理数也是不可数集。

§1.3 实数集的完备性

全体实数组成的集合为实数集 R，因为它与数轴上的点集有一一对应的关系，所以，对实数集的研究与直线上点集的研究是完全一致的。同时还要指出，我们在一维空间 R 中引进的一些基本概念及所得到的定理，原则上可以直接推广到 n 维空间 R^n 中去。

一、上确界和下确界

实数集 R 最简单的子集是区间，它包括开区间、闭区间和半开区间等。现在我们要讨论的是直线上一般的点集。

定义 1 设 $a\in R$，集合

$$O(a,\delta)\triangleq\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

（符号$\triangleq$表示"定义为"或"恒等于"）称为 a 的 δ 邻域，其中 δ 是给定的正数。

设 $A\subset R$，$a\in A$，如果 $O(a,\delta)\subset A$，则称 a 为集 A 的内点；如果 A 中的每一点都是内点，则称 A 为开集；如果 $A^c=R-A$ 是开集，则称 A 为闭集。

定义 2 设 $A\subset R$，如果存在数 $a\in R$，使得对于所有的 $x\in A$，都有 $x\leqslant a$，则称 A 有上界；如果 $A\neq\varnothing$，则集 A 的最小上界称为 A 的上确界，记作 $\sup A$。这就是说，对于 A 的每一个上界 a，都有 $\sup A\leqslant a$，但是，对于任给的 $\varepsilon>0$，必存在 $x_0\in A$，使得 $x_0>\sup A-\varepsilon$。显然，如果 $B\subset A$ 且 $B\neq\varnothing$，则有 $\sup B\leqslant\sup A$。

类似地，如果存在数 $b\in R$，使得对于所有的 $x\in B$ 都有 $x\geqslant b$，则称 B 有下界；如果 $B\neq\varnothing$，则集 B 的最大下界，称为 B 的下确界，记作 $\inf B$。这就是说，对于 B 的每一个下界 b，都有 $\inf B\geqslant b$，然而对于任给 $\varepsilon>0$，必存在 $x_0\in B$，使得 $x_0<\inf A+\varepsilon$。显然，如果 $B\subset A$ 且 $B\neq\varnothing$，则 $\inf B\geqslant\inf A$。

如果 A 上有界且下有界，则称集 A 是有界的。因此，如果 $A\neq\varnothing$，则有

$$\inf A\leqslant\sup A$$

必须注意，集 A 的上确界或下确界不一定属于集 A。

根据定义 2，可以证明以下定理：

定理 1（确界存在定理） 有上（下）界的非空数集必有唯一的上（下）确界。

二、Cauchy 收敛准则

定义 3 设实数列 $\{x_n\}$ 和实数 x，如果对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得对一切 $n>N$，有 $|x_n-x|<\varepsilon$，则 x 称为实数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称实数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。显然，这个实数列和极限在数轴上就有与之相对应的点列和极限点。

如果点列 $\{x_n\}$ 满足：对于任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，使得当 m、$n>N$ 时，总有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$，则称点列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列或基本列。

我们知道，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则点列 $\{x_n\}$ 必有界，但其逆不成立。

定理 2 （Bolzana－Weierstrass 定理） 有界的无穷点列必有收敛子点列。

定理 2 指出，任何有界点列 $\{x_n\}$ 至少有一个极限点。如何判断一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛呢？下面叙述 Cauchy 收敛准则，其重要性在于这样一个事实：它从给定点列 $\{x_n\}$ 本身即可判断其收敛性而无需知道它的极限。

定理 3 （Cauchy 收敛准则） 点列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是点列 $\{x_n\}$ 是基本列。

证明 *必要性* 如果 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是，对于 m、$n>N$，推得

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故点列$\{x_n\}$是基本列。

充分性 设点列$\{x_n\}$是基本列，于是对于给定的 $\varepsilon=1$，总可选择一个 N_0，当 m、$n>N_0$ 时，有$|x_n-x_m|<1$。特别地，当 $n>N_0$，$m=N_0+1$ 时，有$|x_n-x_{N_0+1}|<1$，从而当 $n\geqslant N_0$ 时，有$|x_n|\leqslant|x_n-x_{N_0+1}|+|x_{N_0+1}|<1+|x_{N_0+1}|$。

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0+1}|,1+|x_{N_0+1}|\}$时，则对一切自然数 n，都有

$$|x_n| < M$$

所以点列$\{x_n\}$是有界的。

根据 Bolzana－Weierstrass 定理可知，该点列$\{x_n\}$必有收敛的子列$\{x_{n_k}\}$即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$，这意味着对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $K>0$，当 $k>K$ 时，有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

取一正整数 $k_0=\max(K+1,N+1)$，于是必有 $k_0>K$，且 $n_{k_0}\geqslant n_{N+1}\geqslant N+1>N$。由于已知点列$\{x_n\}$是基本列，因此，当 n、$m>N$ 时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$，所以

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - a| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

定义 4 设 A 是 R 中的点集，如果 A 中任意基本点列都在 A 中收敛，则称集 A 是完备的。例如，区间(0,1)不是完备的点集，因为点列$\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$是集(0,1)中的基本列，但它在(0,1)中没有极限点即不收敛，因而集(0,1)是不完备的。如果在(0,1)中加上一些点，使之成为闭集[0,1]，这样，它就成为完备的点集。

通过以上的讨论，可以指出，确界存在定理、Bolzana－Weierstrass 定理及 Cauchy 收敛准则都是等价的，它们从不同角度刻划了实数的本质属性——连续性即完备性，从而得出实数集 R 是完备的。也就是说，它关于极限运算是封闭的，所以，它们都是很重要的一批基本定理。

§1.4 集合的测度与可测函数

Riemann 积分的定义是函数 $f(x)$具有连续性或“间断点不太多”的条件下作出的，这种积分虽然解决了很多的实际问题，但随着科学技术的发展，它的局限性也明显地表现出来。另外，在理论上这种积分也存在一些弊端，如积分与极限换序、积分与微分换序、积分与积分换序等这些基本运算所要求的条件较苛刻。鉴于 Riemann 积分的这些缺陷，建立新的积分势在必行，经过人们长期的探索，在总结前人工作的基础上，1902 年法国数学家 Lebesgue 成功地引入了一种新的积分，即 Lebesgue 积分，它已成为近代数学、物理及工程技术等领域中方便而有力的工具。

根据 Riemann 积分的结构可以看出，要在原积分的基础上产生 Lebesgue 积分的概念，我们必须扩大可积函数类，同时对直线上一般点集也要引入类似于区间长度的定义。为此，本节介绍点集的测度和可测函数及其基本性质。

限于篇幅，以下两节涉及到的定理，一般不予证明，有兴趣的读者可参阅文献[1]。

一、点集的测度

为了便于理解，我们从直线上的点集引入 Lebesgue 测度（以下简称测度）的有关概念和结论，这些内容从一维空间 R 推广到 n 维空间 R^n 没有本质上的困难。

考虑 R 中的有界点集 E。设 $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ 是一串区间，$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$，用 mI_n 表示开区间 I_n 的长度，那末，$\sum_{n=1}^{\infty} mI_n$ 是一个非负的数集，且 $\{\sum_{n=1}^{\infty} mI_n \mid E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$ 是下方有界的，因此，必有下确界。

定义 1 点集 E 的外测度定义为

$$\mu^*(E) \stackrel{\triangle}{=} \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} mI_n \mid E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

设 $E \subset [a,b]$，E 的余集 $E^c = [a,b] - E$ 的外测度为 $\mu^*(E^c)$，则称数

$$\mu_*(E) \stackrel{\triangle}{=} (b-a) - \mu^*(E^c)$$

为 E 的内测度。

从定义中可以推出：对任何点集 E，有

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E)$$

定义 2 对于有界点集 E，如果

$$\mu^*(E) = \mu_*(E)$$

则称 E 是 Lebesgue 可测集，简称可测集；E 的外测度和内测度的公共值称为 E 的 Lebesgue 测度，简称测度，记作 $\mu(E) = \mu^*(E) = \mu_*(E)$。

如果

$$\mu(E) = 0$$

则称点集 E 为零测集。

显然，如果 E 是区间，则 $\mu(E) = mE$。

对于二维的情形，即 E 是 R^2 中的点集时，只要在定义中取一串开矩形代替 $\{I_n\}$ 就可以，以此类推，故测度的定义不难推广到 R^n 中的点集。由此可见，所谓测度就是普通长度、面积和体积等概念的推广。

现在叙述可测集的一些基本性质。

定理 1 (1) 如果 E_1 和 E_2 可测，则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 - E_2$ 均可测；

(2) 如果 E_1 和 E_2 可测，且 $E_1 \subset E_2$，则 $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$；

(3) 如果 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是可测集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 及 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 也可测，而且当 $\{E_n\}$ 中两两不相交时，有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \qquad \text{（测度的完全可加性）}$$

(4) 有界开集、有界闭集都是可测集。

例 1 证明有界可数集 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是零测集即可测集。

证明 对 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 中任一点 x_n，作一小开区间

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意小的正数，显然，$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，且

$$0\leqslant \mu^*(E)\leqslant m(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}mI_n$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^n}+\cdots=\varepsilon$$

由 ε 的任意性知，$\mu^*(E)=0$，而 $0\leqslant\mu_*(E)\leqslant\mu^*(E)$，故 $\mu(E)=0$，所以，E 是一个零测集。

例 2 设 E 是[0,1]中无理点集，则 $\mu(E)=1$。

事实上，由例 1 知，[0,1]中的全体有理数构成之集是可数集 Q，其测度 $\mu(Q)=0$，因而[0,1]中全体无理数构成之集 E 是可测集。根据测度的可加性得

$$\mu(E)=\mu([0,1])-\mu(Q)=1$$

由以上两例可知，单点集的测度为零，我们还规定空集$\varnothing$的测度为零。另外，区间(开、闭或半开半闭)都是可测集，且测度等于区间的长度。

定义 3 设 E 是无界点集，作区间

$$J_k=\{x\,|\,|x|<k\}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

如果对每个 k，$E\cap J_k$ 是可测集，则称 E 是可测的，其测度定义为

$$\mu(E)=\lim_{k\to\infty}\mu(E\cap J_k)$$

在此可测意义下，定理 1 仍然成立。

应该指出，R 中全体可测集组成的集类称为可测集类，记作 L。在 L 中，交、并、可列交、可列并，以及有限差运算的结果仍是可测集，即 L 对这些运算是封闭的。

同时，由于开集、闭集都是可测的，从开集、闭集出发，经过上述运算可得到构造极为复杂的可测集，称此集类为 Borel 集类，记作 B。显然，$B\subset L$。

由此可以看到，可测集的范围非常广泛，在实际问题中所碰到的有界集几乎全部都是可测集。但是现在已研究清楚了，不属于可测集的有界集以及属于可测集而不属于 Borel 集的有界集确实存在。由于其构造太抽象又很复杂，我们这里不再叙述。

二、可测函数

定义 4 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的实值函数，如果对任意实数 a，集合

$$E(f>a)=\{x\,|\,f(x)>a,x\in E\}$$

恒可测，则称 $f(x)$是 E 上的 Lebesgue 可测函数，或简称为可测函数。

例 3 零测集 E 上定义的任意实值函数均是可测函数。

证明 因对$\forall\ a\in R$，集

$$E(f>a)=\{x\,|\,f(x)>a,x\in E\}$$

是 E 的子集，即 $E(f>a)\subset E$，故 $E(f>a)$ 是可测的，且 $\mu(E(f>a))=0$，所以，$f(x)$是可测函数。

例 4 设 E 是可测集，证明定义在 E 上的常值函数

$$f(x)=c$$

是可测函数。

证明 因对$\forall\ a\in R$，有

$$E(f>a)=\{x\,|\,f(x)>a,x\in E\}=\begin{cases}\varnothing, a\geqslant c\\ E, a<c\end{cases}$$

故 $E(f>a)$ 可测，所以 $f(x)$ 是可测函数。

例 5 设 E 是可测集，$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，E_i 可测且互不相交 $(i=1,2,\cdots,n)$，$f(x)$ 是定义在 E 上，且在各 E_i 上分别取常数 c_i 的函数(称为简单函数)，则 $f(x)$ 是可测函数。

证明 因对 $\forall\ a\in R$，集

$$E(f>a)=\{x\mid f(x)>a,x\in E\}$$

或为空集 $\varnothing$，或为有限个 E_i 之并，因此 $E(f>a)$ 是可测集，所以 $f(x)$ 是可测函数。

例 6 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的可测函数，则对任意 $a\in R$，集

$$E(f\geqslant a)=\{x\mid f(x)\geqslant a,x\in E\}$$
$$E(f\leqslant a)=\{x\mid f(x)\leqslant a,x\in E\}$$
$$E(f=a)=\{x\mid f(x)=a,x\in E\}$$
$$E(a\leqslant f\leqslant b)=\{x\mid a\leqslant f(x)\leqslant b,x\in E,a,b\in R\}$$

都是可测的。

事实上

$$E(f\geqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>a-\frac{1}{n}\right)$$
$$E(f\leqslant a)=E-E(f>a)$$
$$E(f=a)=E(f\geqslant a)-E(f>a)$$
$$E(a\leqslant f\leqslant b)=E(f\geqslant a)\cap E(f\leqslant b)$$

根据已知条件和定理 1，上述集合都是可测集。

例 7 定义在 R 上的连续函数 $f(x)$ 是可测函数。

证明 对 $\forall\ a\in R$，如果集合 $E(f>a)=\varnothing$，则因空集 $\varnothing$ 是具有零测度的可测集，故 $f(x)$ 可测；如果集 $E(f>a)$ 非空，则可证明它是开集。为此，任取 $x_0\in E(f>a)$，则 $f(x_0)>a$。由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续，故存在 $\delta>0$，使当 $x\in O(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>a$，这表明 $O(x_0,\delta)\subset E(f>a)$，因此，$x_0$ 是 $E(f>a)$ 的内点。由 x_0 的任意性知，$E(f>a)$ 是开集，从而可测，所以 $f(x)$ 是可测函数。

可以证明，可测集上的连续函数必为可测函数，但是，可测函数不一定是连续函数。

例 8 Dirichlet 函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为}[0,1]\text{ 中的有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为}[0,1]\text{ 中的无理数时}\end{cases}$$

证明 $f(x)$ 是 $E=[0,1]$ 上的可测函数。

证明 令 E_1,E_2 分别表示有理点集、无理点集，a 为任意实数，根据 Dirichlet 函数 $f(x)$ 的定义，有

$$E(f>a)=\begin{cases}E, & \text{当 } a<0 \text{ 时}\\ E_1, & \text{当 } 0\leqslant a<1 \text{ 时}\\ \varnothing, & \text{当 } a\geqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

由于 E,E_1 和 $\varnothing$ 都是可测集，因此，不论 a 是怎样的实数，集 $E(f>a)$ 恒可测，故 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，但 $f(x)$ 在 E 上处处不连续。

定理 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在可测集 E 上的可测函数，则 $kf(x)$，$f(x)\pm g(x)$，$|f(x)|$，$|f(x)|^{\alpha}$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0,k$、α 为实常数)都是可测函数。