

# 材料力学学习方法 及解题指导

吴永生  
顾志荣



同济大学出版社

# 材料力学学习方法及解题指导

吴永生 顾志荣 编著

3K566/12

同济大学出版社

## 内 容 提 要

本书是一本学习材料力学的辅导性参考书，按高等工业学校高学时类型的材料力学教学大纲编写，共十五章：拉伸与压缩、拉压超静定问题、剪切、扭转、平面图形几何性质、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、变形能、应力状态理论基础、强度理论、组合变形、压杆稳定、动荷载、交变应力。

本书各章的编写由三部分组成：理论要点及学习方法指导，解题指导及典型例题分析，试题选编（附解答）。

本书主要用作高等工业院校的学生及函授生学习材料力学的辅导书，也可作材料力学教师辅导学生的参考资料。

责任编辑 解明芳

封面设计 王肖生

### 材料力学学习方法及解题指导

吴永生 顾志荣 编著

同济大学出版社出版

（上海四平路1239号）

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷二厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：22.875 字数：615千字

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数：1—5,500 定价：8.70元

ISBN 7-5608-0349-0/O·46

# 前 言

本书是一本学习材料力学的辅导性参考书，可供各类高等工业院校中学习材料力学的读者使用。

本书以土建类和机械类专业高学时材料力学教学大纲所规定的基本内容为线索，编写了拉伸与压缩、剪切、扭转、平面图形几何性质、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、能量法、应力状态理论基础、强度理论、组合变形、压杆稳定、动荷载、交变应力等十五章。考虑到读者自学的需要，力求使本书能起到“无师自通”的辅导作用，在内容的安排方面力求做到由浅入深，循序渐进，层次分明，标题醒目，并注意讲透重点、突破难点、抓住关键、总结规律。在学习方法及解题指导过程中，对一些重要的结论性的论述均作了较为详细的分析与讨论，并用了醒目的小标题，以引起读者的注意。

本书每章的编写，一般均由下列三部分内容所组成：

## 1. 理论要点及学习方法指导

在这一节中，对本章的教学内容、基本概念、重要的定义和定理、常用公式等进行了总结和归纳，并作了一些学习方法指导。这一部分的内容除能对读者起到复习、指导的作用外，还具有一定的“手册性”意义，它为读者提供了解题所必需的公式和常用的数据和图表。

## 2. 解题指导及典型例题分析

这一节的内容是本书的主要组成部分。编者根据材料力学教学大纲的要求，共收集了各类典型例题200道，其中约有三分之一是具有一定难度的综合性题目。对这些典型例题，除作详细的、有条理的解答外，在解题过程中还作了许多分析指导，总结了解题方法和步骤，着重辅导读者掌握基本概念、提高分析问题

和解决问题的能力。通过对这一部分内容的学习后，读者一般已具备了解答教学大纲所要求的各类习题和试题的能力。

### 3. 试题选编(附解答)

为了帮助读者进行自我考核，我们从同济大学等高等工业院校近年来的各类试题(包括部分硕士研究生入学试题)中选编了不同类型的试题90余道，供读者练习使用。这些试题均具有一定的深度和一定的典型性和综合性，为了便于读者校核计算的结果，作者对这些选编的试题都作了较为详细的解答，并分别附于各章之末，供读者参考。

最后应当说明的是，本书的例题与试题解答并不一定是最佳解法，限于编者的水平，书中难免有错漏之处，敬希读者批评指正。

在本书编写过程中，同济大学函授学院和工程力学系给予大力支持和帮助。伍云青副教授对本书的编写工作提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢。

**编者**

1987. 5. 20

**同济大学八十周年校庆纪念**

# 目 录

<b>第一章 拉伸与压缩</b> .....	( 1 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 1 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 14 )
第三节 试题选编.....	( 53 )
附: 试题解答.....	( 56 )
<b>第二章 拉压超静定问题(专题辅导)</b> .....	( 65 )
第一节 拉压超静定问题的特点.....	( 65 )
第二节 解拉压超静定问题的方法、步骤及要求 .....	( 66 )
第三节 解题指导及典型例题分析.....	( 68 )
第四节 试题选编.....	( 109 )
附: 试题解答.....	( 112 )
<b>第三章 剪切</b> .....	( 127 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 127 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 129 )
第三节 试题选编.....	( 145 )
附: 试题解答.....	( 148 )
<b>第四章 扭转</b> .....	( 155 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 155 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 163 )
第三节 试题选编.....	( 187 )
附: 试题解答.....	( 190 )
<b>第五章 平面图形的几何性质</b> .....	( 201 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 201 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 209 )

<b>第六章 弯曲内力</b> .....	( 230 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 230 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 233 )
第三节 试题选编.....	( 264 )
<b>第七章 弯曲应力</b> .....	( 271 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 271 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 278 )
第三节 试题选编.....	( 321 )
附：试题解答.....	( 325 )
<b>第八章 弯曲变形</b> .....	( 336 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 336 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 345 )
第三节 试题选编.....	( 393 )
附：试题解答.....	( 396 )
<b>第九章 能量法</b> .....	( 413 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 413 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 418 )
第三节 试题选编.....	( 446 )
附：试题解答.....	( 448 )
<b>第十章 应力状态理论基础</b> .....	( 462 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 462 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 474 )
第三节 试题选编.....	( 504 )
附：试题解答.....	( 509 )
<b>第十一章 强度理论</b> .....	( 524 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 524 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 528 )
第三节 试题选编.....	( 536 )
附：试题解答.....	( 538 )

<b>第十二章 组合变形</b> .....	( 544 )
第一节 概述.....	( 544 )
第二节 组合变形分析中外力的简化与分解.....	( 545 )
第三节 斜弯曲.....	( 554 )
第四节 拉伸(压缩)与弯曲的组合变形.....	( 565 )
第五节 弯曲与扭转的组合变形.....	( 580 )
第六节 试题选编.....	( 592 )
附: 试题解答.....	( 598 )
<b>第十三章 压杆稳定</b> .....	( 624 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 624 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 629 )
第三节 试题选编.....	( 652 )
附: 试题解答.....	( 655 )
<b>第十四章 动荷载</b> .....	( 672 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 672 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 674 )
第三节 试题选编.....	( 687 )
附: 试题解答.....	( 690 )
<b>第十五章 交变应力</b> .....	( 698 )
第一节 理论要点及学习方法指导.....	( 698 )
第二节 解题指导及典型例题分析.....	( 708 )



# 第一章 拉伸与压缩

## 第一节 理论要点及学习方法指导

杆件的拉伸和压缩变形是材料力学中的一个最为基本的问题。虽然内容似乎比较简单，但是概念多，而且极为重要，在今后的学习或工作中都将经常遇到本章所讲解的一些内容。因此，要求读者通过本章的学习，对拉、压变形问题进行仔细的钻研，为整个材料力学课程的学习打下稳固的基础。

### § 1.1 基本概念

#### (一) 外力特点

如果杆件在其两端受到一对沿着杆件轴线、大小相等、方向相反的外力作用，则该杆件将发生轴向的拉伸(或压缩)变形。当两个外力相互背离杆件时，杆件受拉而伸长，称为轴向拉伸(图 1-1, a)。当两个外力相互指向杆件时，杆件受压而缩短，称为轴向压缩(图 1-1, b)。

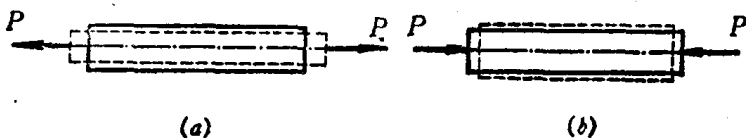


图 1-1

#### (二) 内力——轴力

在轴向拉伸或轴向压缩的杆件中，由于外力  $P$  的作用，在横截面上将产生的内力是轴向力(简称轴力)，一般用  $N$  表示。轴力的作用线与杆轴一致(即垂直于横截面，并且通过形心)。当杆件受拉伸时，轴力方向背离横截面，称为轴向拉力(图 1-2, a)，

当杆件受压缩时，轴力方向指向横截面，称为轴向压力(图 1-2, b)。

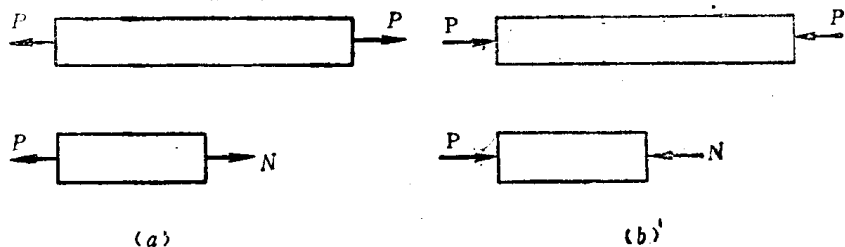


图 1-2

(1) 轴力的正负规定：一般规定轴向拉力为正，轴向压力为负。

(2) 轴力的单位：牛顿(N)、千牛顿(kN)。

(3) 求内力的基本方法是截面法

(4) 轴力图

当杆件受到多个轴向外力作用时，在杆件的不同段内将有不同的轴力(图 1-13)。为了表明杆内的轴力随截面位置的变化而变化的情况，最好画出轴力图。所谓轴力图就是用平行于杆件轴线的坐标表示横截面的位置，并用垂直于杆件轴线的坐标表示横截面上轴力的数值，从而绘出表示轴力沿杆轴变化规律的图线(图 1-13, e)。

由轴力图可确定杆件中的最大轴力及其所在截面，如果再结合杆件横截面的变化情况，便可以确定杆件的危险截面，从而进行杆件的强度计算。另外，还可以利用轴力图作杆件的变形和位移的计算。

请读者注意，内力计算是材料力学中一个重要的问题，是进行强度、刚度、稳定计算的关键，读者务必给予重视。

### (三) 应力——正应力

为了解决受力杆件的强度问题，除了需要计算杆件横截面上

的内力外，还要进一步研究内力在横截面上的分布规律和分布的集度。

对于匀质杆，在承受轴向拉伸或压缩时，根据实验观察并在此基础上作出的“平面假设”可知，轴向内力在横截面上是均匀分布的(图 1-3)。若杆件的横截面面积为  $A$ ，横截面上的轴力为  $N$ ，则

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

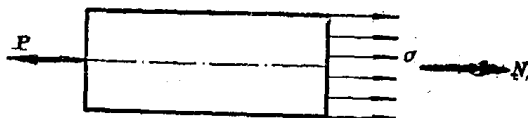


图 1 3

式中  $\sigma$  称之为正应力，它反映了内力——轴力  $N$  在横截面上分布的集度。

(1) 正应力的单位：在国际单位制中，正应力常用的单位是帕斯卡(Pascal)，其代号是 Pa， $1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$ 。由于此单位较小，在工程中使用时甚感不便，因此，在材料力学中常用兆帕(MPa)或吉帕(GPa)表示， $1\text{MPa} = 10^6\text{Pa}$ ， $1\text{GPa} = 10^9\text{Pa}$ 。

(2) 正应力的方向：正应力方向与轴力的方向一致。

(3) 正应力的正负规定：正应力的正负号与轴力的正负号一致，即拉应力为正，压应力为负。

请读者注意，正应力在横截面上均匀分布的这一结论，只适用于轴向拉伸(压缩)的杆件。对于偏心拉伸(压缩)的杆件，由于外力不与杆轴一致，在横截面上的内力不仅有轴力，而且还有弯矩(见第十二章)。因此，上述结论就不再适用。另外，还需要指出，在加力点附近的区域、洞孔所在的截面、横截面有突变处，应力情况复杂，在这些部位的横截面上，应力是非均匀分布的。

#### (四) 变形和应变

##### (1) 线变形 $\Delta l$

直杆受轴向拉力或压力作用时，杆件会产生沿轴线方向的伸长或缩短。若杆件在受力前原有长度为  $l$ ，受力变形后长度变为  $l_1$ ，则该杆长度的变化量，即杆件的伸长(缩短)

$$\Delta l = l_1 - l$$

称为杆件的“线变形”，有时简称为“变形”。显然，在拉伸时  $\Delta l$  是正值，压缩时  $\Delta l$  为负值。 $\Delta l$  的量纲是[长度]。

##### (2) 线应变 $\epsilon$

线变形  $\Delta l$  与杆件的原长  $l$  之比，表示单位长度内的线变形，称为线应变，有时简称为应变，以符号  $\epsilon$  表示。即

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

线应变的正负号与  $\Delta l$  一致，因此规定：拉应变为正，压应变为负。因为  $\Delta l$  与  $l$  同具有长度量纲，所以线应变是无量纲的量。

##### (3) 横向应变 $\epsilon'$ 泊松比 $\mu$

实验证明，只要应力在比例极限内，材料的横向应变  $\epsilon'$  与纵向应变  $\epsilon$  成比例关系，即

$$\epsilon' = -\mu\epsilon$$

显然，杆件受拉时  $\epsilon$  为正值， $\epsilon'$  为负值；杆件受压时  $\epsilon$  为负值，而  $\epsilon'$  为正值。上式中的  $\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|$  是一个没有量纲的比例常数，叫做泊松比或横向变形系数。它属于材料的力学性质，其值因材料而异，但其值总是小于 0.5。对于大多数金属材料，泊松比  $\mu$  的值在 0.25~0.35 之间。

#### (五) 应力-应变关系

##### (1) 应力-应变曲线

应力与应变之间的关系和材料的力学性质有关。它们之间的关系可通过对具体的材料进行测试，绘出应力-应变曲线(图1-4)

来得到。

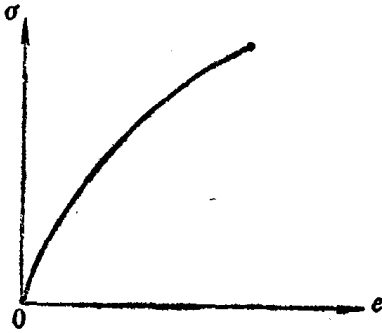


图 1-4

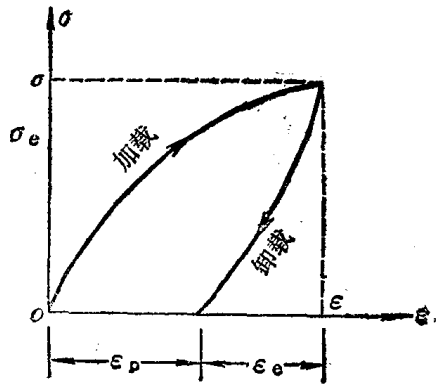


图 1-5

(2) 弹性应变  $\epsilon_e$  和残余应变  $\epsilon_p$

由图 1-5 所示的加载和卸载时的应力-应变曲线中可以看出，当应力超过弹性极限  $\sigma_e$  后，若将荷载卸掉，这时应力可以回到零，但应变则不能返回到零，即出现了残余应变  $\epsilon_p$ ，而弹性应变  $\epsilon_e$  则随着荷载的卸除而完全消失了。

实验证明，只要应力不超过弹性极限，卸载时，应力-应变曲线将仍沿着加载时的应力-应变曲线回到原点(图 1-6)。这说明，变形完全消失，而不出现残余应变( $\epsilon_p = 0$ )。

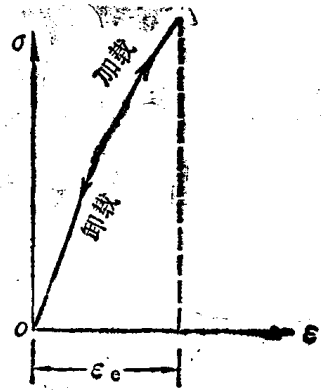


图 1-6

(3) 虎克定律

虎克定律  $\sigma = E \cdot \epsilon$  揭示了应力在比例极限  $\sigma_p$  以内的应力-应变间的线性

关系。它的另一表达式为  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ ，表明杆件的伸长(缩短)  $\Delta l$  与内力  $N$  及杆件的长度  $l$  成正比，而与杆件的抗拉(压)刚度  $EA$  成反比。

虎克定律是材料力学中最基本的定律之一。读者必须对虎克

定律加以深刻的理解，并能熟练地运用。同时必须注意，只有正应力不超过材料的比例极限时，虎克定律才适用。

## (六) 变形和位移

### (1) 变形和位移的概念

杆件受外力作用后发生的形状和尺寸的改变称为变形。

结构(杆件)受外力作用而发生变形后，在结构(杆件)上的一些点、线、面可能会发生空间位置上的改变，一般将这些点、线、面在空间位置上的改变称为位移。

产生位移的原因是结构(杆件)的变形，变形的结果则要引起杆件内的一些点、线、面的位移。变形是绝对的，而位移则是相对的。

### (2) 拉(压)杆横截面间的轴向位移(图1-7)

拉(压)杆中两个任意截面之间的相对位移，就等于这两个截面之间的那段杆的伸长或缩短。因此，计算某二截面之间的相对位移，就只要计算这两截面之间的一段杆的伸长或缩短即可。例如在图1-7中：

$$\delta_{B-A} = BB' = \Delta l_{AB} = \frac{Na}{EA} = \frac{Pa}{EA}$$

$$\begin{aligned} \delta_{C-A} = CC' = \Delta l_{AC} &= \frac{N(a+b)}{EA} \\ &= \frac{P(a+b)}{EA} \end{aligned}$$

$$\delta_{C-B} = \Delta l_{BC} = \frac{Nb}{EA} = \frac{Pb}{EA}$$

上列各式中的  $\delta_{B-A} = \delta_B$ 、 $\delta_{C-A} = \delta_C$  和  $\delta_{C-B}$  分别表示杆件变形后  $B$  截面相对于  $A$  截面、 $C$  截面相对于  $A$  截面和  $C$  截面相对于  $B$  截面产生的位移。

### (3) 节点位移图 $\equiv$ 变形几何关系图

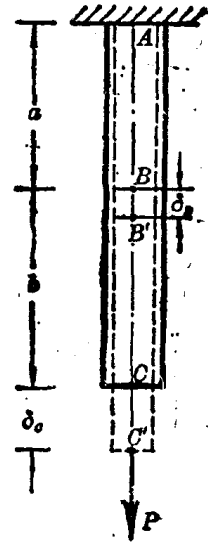


图1-7

由于工程中广泛采用杆系(静定或超静定)结构,因此,为了计算节点位移和解超静定结构,首先需画出节点位移图(又称变形几何关系图),然后才能计算节点的位移或列出变形几何关系。下面以图 1-8, a 所示结构为例,讨论节点(B的)位移图的绘制问题。

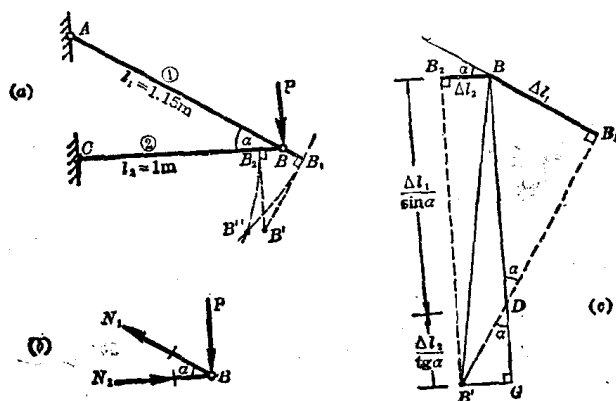


图 1-8

①作图前的准备 绘制节点位移图前首先要画出节点(B的)受力图(图1-8, b),求出各杆的内力: $N_1 = \frac{P}{\sin \alpha}$  (拉),  $N_2 = P \operatorname{ctg} \alpha$  (压)。然后再计算出各个杆件的变形: $\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$ ,  $\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$ 。

请读者注意,在画节点位移图时,要遵循“变形与内力一致”的原则。所谓变形与内力一致,就是指与轴向拉力对应的 $\Delta l$ 是伸长,与轴向压力对应的 $\Delta l$ 是缩短。在解超静定问题时,杆件中的内力是轴向拉力还是轴向压力,有时很难预先作出正确的判断,这时可先作一假设,但在画节点位移图时,要注意与之相应的 $\Delta l$ 一定要与所假设的内力一致。

②作图的依据 画节点位移图的基本依据是,节点在结构受力而发生变形后仍应联接在一起。因此,首先延长 $AB$ 至 $B_1$ ,使 $\overline{BB_1} = \Delta l_1$ (图 1-8, a); 缩短 $BC$ 至 $B_2$ ,使 $\overline{BB_2} = \Delta l_2$ 。然后,以 $A$ 点为圆心,用 $\overline{AB_1}$ 为半径画一圆弧;又以 $C$ 点为圆心,用 $\overline{CB_2}$

为半径再画一圆弧。这两个圆弧的交点 $B''$ 即为节点 $B$ 发生位移后的新位置。

③作图的方法——“以切代弧” 上述作图方法虽然正确,但用于实际计算则很不方便,因而有必要进行简化。考虑到杆件的伸长(或缩短) $\Delta l$ 和杆件的原长 $l$ 相比十分微小(一般情况下,伸长还不到杆件原长的千分之一)。显然,如此微小的长度改变,引起的节点位移也必然是微小的,圆弧 $\widehat{B_1B''}$ 和 $\widehat{B_2B''}$ 也一定很短。因此,可以分别用切线来代替圆弧,即自 $B_1$ 点作 $\overline{AB_1}$ 的垂线,自 $B_2$ 点作 $\overline{CB_2}$ 的垂线,用它们的交点 $B'$ 来代替节点 $B$ 的新位置。这种简化后的近似作图法,其特点就是“以切代弧”。

应当指出,如果按原结构的尺寸比例来表示杆件的伸长(缩短) $\Delta l$ ,那么,由于 $\Delta l$ 非常微小,因此实际上是无法画出节点位移图的。为此,我们在以后的分析讨论中,都是画出被放大(夸大)了的节点位移图(图1-8,c)。

④变形几何关系 根据上述绘制的节点位移图(又称变形几何关系图)可以建立各个杆件的变形间的几何关系,这对于解超静定问题是十分必要的。应当指出的是,由于我们在画节点位移图时,是按杆件的伸长或缩短的实际情况而绘制的,亦即在画节点位移图时已考虑了是拉伸还是压缩这一现实,所以在节点位移图中各线段之间的关系仅是一般的几何关系,计算位移时就只要代之以各杆伸长或缩短的绝对值就可以了。

## § 1.2 材料的力学性质

### (一) 什么叫材料的力学性质

材料的力学性质,是指材料在外力作用下,在强度与变形方面表现出的力学特性。不同的材料具有不同的力学性质。材料的力学性质主要有三个方面:

强度特性——即材料抵抗破坏的能力。反映强度特征的是材料的屈服极限 $\sigma_s$ 和强度极限 $\sigma_b$ 。



变形特性——即材料抵抗变形的能力，反映变形特征的是材料的弹性模量  $E$  和泊松比  $\mu$ 。

塑性特性——即材料的塑性指标。反映塑性特征的是材料的延伸率  $\delta$  和面缩率  $\psi$ 。

### (二) 研究材料的力学性质的目的

通过测试，确定材料的强度、变形、塑性指标，作为选择材料和进行构件的强度、刚度、稳定计算的依据。

### (三) 研究材料的力学性质的方法

为了测得某种材料的各种力学性质，常常把该种材料做成标准试件，在试验机上进行拉伸(压缩)试验。当轴向荷载按增量逐渐增加时，在试件破坏前，对应荷载的每一增量，可测出标距内的总伸长量，然后根据荷载和伸长分别计算出正应力和线应变，这样，在整个试验过程中就有了许多对应的正应力  $\sigma$  和线应变  $\epsilon$  的数值，用这些数值就可以绘出一条曲线，这就是这种材料在这种荷载作用下的应力-应变曲线，或称为应力-应变图。不同的材料有不同的应力-应变图。图1-9就是通过低碳钢拉伸试验测得的应力-应变图。由应力-应变图就可以确定材料的各项力学特性。

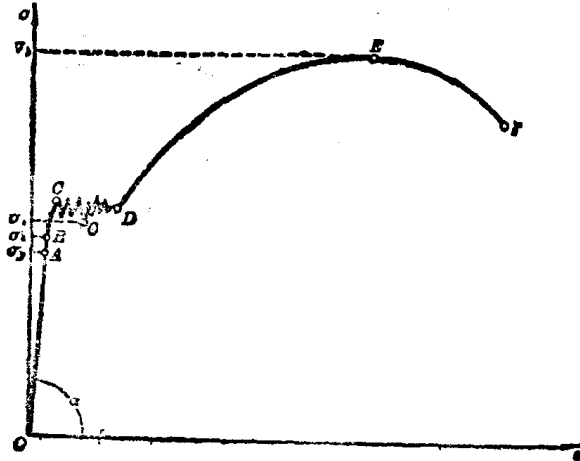


图 1-9

### (四) 低碳钢的主要力学性质