陈文忠 编著

厦门大学出版社

算子逼近论

内 容 简 介

本书系统介绍了算子逼近中的收敛原理，逼近度量化估计方法和精度分析方法，以及各类逼近等价定理和饱和定理，其中包括了作者一些最新研究成果。书中除了不加证明地引用泛函分析中若干重要事实外，力求概念清晰，论证严谨。

本书可作为函数逼近论，应用泛函分析，数值逼近论方向研究生和数学专业本科生的选修课教材，也可供函数论，计算数学等方向的研究人员以及科技工作者，大学教师参考。

算子逼近论
陈文忠 编著
*
厦门大学出版社出版发行
福建省新华书店经销
莆田市印刷厂印刷
*
开本787×1092 1/16 28.125印张 597千字
1989年6月第1版 1991年12月第2次印刷
印数： 1001—4000册
ISBN 7-5615-0182-5
O·7 定价：10.50元

序　言

最初人类认识的函数是多项式，后来发展为解析函数，Lagrange（1736～1813）最早提出幂级数，用级数表示解析函数，可以看做多项式的发展，1822年Fourier在关于热传导的著作中提出Fourier级数，即用三角函数级数表示函数，无穷级数取有限项即它所表示的函数的近似式，这是函数构造论的开始。20世纪末，随着知识爆炸时代的到来，各种正交级数的出现，对每一正交级数都可以作出一套逼近程序，在这种科学分枝越来越多的情况下，用泛函的方法把它统一起来，这是在逼近论中引入算子概念的一个自然趋势。开始有Bernstein算子，Fejer算子出现，发展到一般算子理论处理逼近论问题，从方法上说可以看做高度概括，对不同的应用问题又可派生出不同逼近程序，所以算子逼近论是当前逼近论的发展热点。本书是算子逼近理论的一部学术著作作者将当前外国书刊中成果作了综合的论述，并将他自己的工作和他处理问题的独特的方法作了阐述，可以作为高年级专门化课程及研究生的教材，此书的出版对逼近论及线性算子理论的研究将会产生深远的影响。

李文清

1989年1月15日

前　　言

从本世纪50年代开始，泛函分析方法在逼近理论的研究和应用中的影响日益增大，并形成逼近论的一个重要分支——算子逼近，其原因是算子逼近将泛函分析中高度概括的思维方法和古典分析中的精致技巧结合起来，从而使经典的逼近方法有了新的生长点，因此三十多年来算子逼近的研究得到迅速发展，建立了系统的方法和理论并对其它数学分支（例如概率论，数值分析等等）产生广泛的影响。

算子逼近理论主要是研究如下一些问题。

1）研究线性算子序列的收敛性质，这里主要讨论依范数收敛，点态收敛以及收敛速度的渐近分析，这类问题统称为逼近定理。关于这方面的工作是1951年由P.P.Korovkin和H.Bohman分别对连续函数空间建立的，随后由许多学者逐步推广到可测函数空间，例如，p次可积空间，有界变差函数空间以及各种抽象函数空间。

2）研究收敛速度的量化，这里包含两个方面的问题，具体地说，设$\{L_n\}$是线性算子列，X是确定的线性赋范空间，一方面首先研究对每个$f\in X$，逼近度$\|L_n(f)-f\|_X$的阶，其次研究量$\sup\limits_{f\in X}\|L_n(f)-f\|_X$的阶，这类结果称为算子逼近中的量化正定理。关于量化正定理的研究起始于R.G.Mamedov，O.Shisha和B.Mond等人的工作，另一方面为了确定量化正定理所得到的收敛阶精度，进而研究所谓逼近逆定理以及各类精度分析方法，它的基本思想是由Bernstein创立的，而算子逼近的逆定理主要是由G.G. Lorentz及其学生建立的，例如P.L.Butzer，H.Berens等人都做了大量的出色工作。

3）研究算子逼近中的饱和现象，这主要的工作是确定算子逼近中的饱和阶和饱和类。人们统称这类结果为饱和定理，当然它们也是衡量逼近精度的一个重要事实。A.H.Turesky，M.Zamansky，R.A.DeVore，Z.Ditzian以及V.Totik在这方面做了大量的研究工作。

本书系统地讨论算子逼近中的收敛原理，逼近度量化估计方法和精度分析方法，以及各类逼近等价定理和饱和定理。其中包括了近几年来作者的一些研究成果，本书中除了不加证明地引用泛函分析中若干重要事实外，力求概念清晰、论证严谨。

在本书的写作过程中得到徐利治、李文清和孙永生等教授的热情鼓励和帮助，谨向他们深切致谢，此外本书初稿曾在厦门大学数学系，北京师范大学数学系，华中理工大学数学研究所，湖北大学数学系，河南大学数学系，湖南师范大学数学系以及宁夏大学数学系为逼近论方向的研究生报告过，得到不少宝贵意见，最后特别应当指出，曾晓明、吴自力

两同志为本书格式范规化花费大量心血，借此机会作者一并表示由衷的感谢。

限于作者水平，错误和不当之处肯定不少，敬请国内专家和读者给予指正。

陈文忠

1987年5月于厦门大学

目　录

第二章 逼近度估计

第三章 逼近精度与逆定理

第四章 算子逼近的饱和理论

第一章　逼近定理

§1　线性算子

1.1　Banach 空间

设X是实数（或复数）域Z上的线性空间，在X上定义一个非负实值函数 $\|\cdot\|_X$，若适合如下条件称它为X中元素的范数：

i)　$\|x\|_X=0 \iff x=\theta$（X中的零元素），

ii)　$\|\alpha x\|_X=|\alpha|\,\|x\|_X \qquad (\alpha\in Z)$，

iii) 对x，$y\in X$有 $\|x+y\|_X\leqslant\|x\|_X+\|y\|_X$.

这时说X是赋范的线性空间.

设X是赋范线性空间，其范数为 $\|\cdot\|_X$，若 x_n，$x\in X$且

$$\|x_n-x\|_X\to 0 \qquad (n\to+\infty),$$

则说序列 x_n 在X中强收敛于x，记作 $x_n\xrightarrow{(s)}x\ (n\to+\infty)$ 或 $s-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

若X中任何Cauchy列必强收敛于X中某个元素，则说X是完备的．完备的赋范线性空间通称为Banach空间．可以证明：赋范性空间X是完备的充要条件是X中每个绝对可和序列是可和的，即当$\{x_n\}\subset X$且使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_X<+\infty$,则 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$强收敛于X中某一元素，因此可见Banach空间中任何一个闭线性流形也是Banach空间.

设X是线性空间，在X上定义二种范数$\|\cdot\|_{X,1}$和$\|\cdot\|_{X,2}$，若存在正常数C_1，$C_2>0$使得对$\forall x\in X$有

$$C_1\|x\|_{X,1}\leqslant\|x\|_{X,2}\leqslant C_2\|x\|_{X,1},$$

则说这两种范数是等价的，换言之，赋范空间$(X,\|\cdot\|_{X,1})\to(X,\|\cdot\|_{X,2})$的恒等映照是线性同胚的.

许多特殊的Banach空间在逼近论的研究中占据重要的地位．设D是紧致的Hausdorff空间，如下函数空间是常见的.

例1　连续函数空间C(D)．在通常函数加法及数与函数乘法的前提下，若令$f=f(x)\in C(D)$的范数为

$$\|f\|_{C(D)}=\sup_{x\in D}|f(x)|,$$
则可验证C(D)是Banach空间。

特别当D=〔a，b〕为有限闭区间时，用C〔a，b〕表示〔a，b〕上的连续函数空间，其范数为

$$\|f\|_{C[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$
用 $C_{2\pi}$ 表示以 2π 为周期的连续函数空间，其范数为
$$\|f\|_{C_{2\pi}}=\max_{x}|f(x)|.$$

例2 p次可积函数空间 $L_p(D)$（$p\geqslant1$）在几乎处处意义下理解函数加法及数与函数乘法的前提下，若令 $f=f(x)\in L_p(D)$（$p\geqslant1$）的范数为

$$\|f\|_p\triangleq\|f\|_{L_{p(D)}}=\begin{cases}\left(\int_D|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & 1\leqslant p<+\infty;\\ \operatorname{ess.sup}\limits_{x\in D}|f(x)| & p=+\infty,\end{cases}$$

则 $L_p(D)$ 是Banach空间。

特别地，用 $L^p_{2\pi}$ 表示以 2π 为周期的p次可积函数空间，对 $f\in L^p_{2\pi}$（$p\geqslant1$），

其范数为

$$\|f\|_p\triangleq\|f\|_{L^p_{2\pi}}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1\leqslant p<+\infty),\\ \operatorname{ess\cdot sup}\limits_{x}|f(x)| & p=+\infty.\end{cases}$$

在逼近论文献中经常引入如下函数空间：设D是紧致的Hausdorff空间，令

$$X_p(D)\triangleq\begin{cases}L_p(D) & 1\leqslant p<+\infty,\\ C(D) & p=\infty.\end{cases}$$
而对以 2π 为周期的函数空间，令

$$X_{2\pi}\triangleq X^p_{2\pi}=\begin{cases}L^p_{2\pi} & 1\leqslant p<+\infty,\\ C_{2\pi} & p=\infty.\end{cases}$$

最后设X是实数（或复数）域Z上的线性空间，在X定义一个非负实值函数 $|\cdot|_x$，若适合如下条件称它为X中元素的半范：

i) $|\alpha x|_x=|\alpha|\ |x|_x \quad (\alpha\in Z)$,

ii) 对x，$y\in X$有 $|x+y|_x\leqslant|x|_x+|y|_x$.

例如，设 C^r〔a,b〕$(r\in N)$是〔a,b〕上r次连续可微函数，若对 $f=f(x)\in C^r$〔a,b〕，令
$$|f|_{C^r[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|f^{(r)}(x)|,$$

则 $|\cdot|_{C_r[a,b]}$ 是半范.

1.2 有界线性算子

设X，Y是两个赋范性空间，D是X中的子集，若对每个 $x\in D$，Y中有唯一确定的元 y 与之对应，记作 $y=Tx$，则说T是D到Y内的算子，称D为算子的定义域，而 $T(D)\subseteq Y$ 称为算子T的值域。若 $D=X$ 且 $T(D)\subset Y$ 时，则说T是X到Y内的算子，特别地，若 $T(D)=Y$ 时，则说T是X到Y上的算子.

设T是X到Y内的算子，若 $Tx_1=Tx_2$ 必有 $x_1=x_2$，则说算子T是一对一的. 特别地，若对 $\forall x\in X$ 有 $Tx=x$，则说T是X上的恒等算子，通常用记号 I 表示.

现在设T是X到Y内的算子，$f_0\in X$，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$ 使得对适合 $\|f-f_0\|_X<\delta$ 的一切 $f\in X$ 有

$$\|Tf-Tf_0\|_Y<\varepsilon,$$

则说算子T在 f_0 点是连续的，若T在X中点点连续，则说T是X到Y内的连续算子.

设T是X到Y内的算子，若对 $\forall f_1,\ f_2\in X$ 和 $\forall\alpha_1,\ \alpha_2\in Z$ 有

$$T(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1 Tf_1+\alpha_2 Tf_2,$$

则说T是线性的. 若存在正常数M使得对 $\forall f\in X$ 有

$$\|Tf\|_Y\leqslant M\|f\|_X,$$

则说算子T是有界的，使上式成立的M之下确界称为算子T的范数，记作 $\|T\|_{(X,Y)}$，于是对 $\forall f\in X$ 有

$$\|Tf\|_Y\leqslant\|T\|_{(X,Y)}\|f\|_X,$$

特别当T是X到Y内的有界线性算子，则有

$$\|T\|_{(X,Y)}=\sup_{\substack{f\in X\\ f\neq\theta}}\frac{\|Tf\|_X}{\|f\|_Y}=\sup_{\substack{f\in X\\ f\neq\theta}}\left\|T\left(\frac{f}{\|f\|_X}\right)\right\|_Y$$

$$=\sup_{\|f\|_X\leqslant 1}\|Tf\|_Y=\sup_{\|f\|_X=1}\|Tf\|_Y.$$

不难证明，若T是X到Y内的线性算子，则如下命题是等价的：

i) T在X上是有界的；

ii) T在X中一点是连续的；

iii) T在X上是一致连续的，即对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $f_1,\ f_2\in X$ 且 $\|f_1-f_2\|_X<\delta$ 时，有

$$\|Tf_1-Tf_2\|_Y<\varepsilon.$$

用 $\mathcal{E}(X,Y)$ 表示X到Y内所有有界线性算子的全体，若赋予上述的算子范数，则也是一个线性赋范空间，特别当Y是 Banach 空间，则 $\mathcal{E}(X,Y)$ 也是Banach空间，当 $Y=X$ 时，记 $\mathcal{E}(X)=\mathcal{E}(X,X)$ 并称它为X的自同态.

设 $T\in\mathcal{E}(X,Y)$ 且对 $\forall f\in X$ 有

$$\|Tf\|_Y=\|f\|_X,$$

则说算子T是等距的，若对$\forall f\in X$有

$$\|Tf\|_Y\leqslant\|f\|_X,$$

则说T是压缩的。

现在设$\{T_n\}_{n\in N}$是$\mathcal{E}(X,Y)$中有界线性算子序列，$T\in\mathcal{E}(X,Y)$，若对每个$f\in X$有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_nf-Tf\|_Y=0,$$

则说算子序列$\{T_n\}$强收敛于T，特别当$Y=X$和T为恒等算子I时，则说算子序列$\{T_n\}$是逼近恒等序列。若

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n-T\|_{(X,Y)}=0,$$

则说算子序列$\{T_n\}$依范收敛于T。明显地，依范收敛的算子序列必是强收敛的。

1.3 Banach—Steinhaus 定理

设A是赋范线性空间X中的子集。若对每个$f\in X$和$\forall\varepsilon>0$，都存在$g\in A$使得

$$\|f-g\|_X<\varepsilon,$$

则说A在X中稠密。特别地，若A中元素的一切有限性组合所形成的集合在X中稠密，则说A是X中的基本集。

现在设A是X中的线性子集，且在X中稠密，若T_0是A到Banach空间Y内的有界线性算子，其范数为$\|T_0\|_{(A,Y)}$，则存在一个$T\in\mathcal{E}(X,Y)$使得对$\forall f\in A$有$Tf=T_0f$，且$\|T\|_{(X,Y)}=\|T_0\|_{(A,Y)}$。

为建立Banach—Steinhaus定理，首先给出如下的共鸣定理。

定理1.1（共鸣定理） 设X是Banach空间，Y是赋范线性空间，$\{T_n\}_{n\in N}\subset\mathcal{E}(X,Y)$，若对每个$f\in X$，序列$\{\|T_nf\|_Y\}$是有界的，即对每个$f\in X$，存在正常数$M_f$使得对一切$n\in N$有$\|T_nf\|_Y\leqslant M_f$，则$T_n$是一致有界算子列，即存在正常数M，使得对$\forall f\in X$和$n\in N$有$\|T_nf\|_Y\leqslant M\|f\|_X$。

应用共鸣定理可建立有界线性算子序列的收敛原理。

定理1.2（Banach—Steinhaus） 设X是Banach空间，$\{T_n\}_{n\in N}\subset\mathcal{E}(X)$，则对每个$f\in X$有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n(f)-f\|_X=0,$$

当且仅当

i）T_n是一致有界线性算子列。

ii）存在X的一个稠密子集A，使得对每个$g\in A$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(g)-g\|_X=0.$$

证明 $\Longrightarrow$）条件ii）成立是明显的，所以仅需证明条件i）成立，事实上，由于对每个$f\in X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n(f)-f\|_X=0,$$

所以对每个$f\in X$，数列$\{\|T_nf\|_X\}$是有界的，因此由共鸣定理得到序列$\{T_n\}_{n\in N}$是

一致有界的.

$\Leftarrow$）设 $f\in X$，由于A在X中稠密，所以对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $g\in A$ 使得 $\|f-g\|_x<\varepsilon$，又由ii）对每个 $g\in A$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n g-g\|_x=0,$$

因此由条件 i)，存在 $M>0$ 使得对一切 $n\in N$ 有 $\|T_n\|\leqslant M$，并利用范数三角形不等式得到

$$\begin{aligned}\|T_n f-f\|_x&\leqslant\|T_n f-T_n g\|_x+\|T_n g-g\|_x+\|f-g\|_x\\&\leqslant(\|T_n\|+1)\|f-g\|_x+\|T_n g-g\|_x\\&\leqslant(M+1)\varepsilon+\|T_n g-g\|_x,\end{aligned}$$

注意到 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以对每个 $f\in X$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n f-f\|_x=0.$$

证毕.

现在设D是紧致的Hausdorff空间，$X_P(D)$（$p\geqslant1$）是D上的函数空间，又设 $A=\{f_k(x)\}_{K\in N}^{\infty}\subset X_P(D)$ 是 $X_p(D)$ 内的基本列，即对每个 $f\in X_P(D)$ 和 $\forall\varepsilon>0$，存在线性组合

$$P(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k f_k(x)$$

使得

$$\|f-p\|_{X_P(D)}<\varepsilon,$$

由熟知的Weierstrass定理可知，$A=\{x^k\}_{k=0}$ 是 $X_P[a,b]$ 上的基本列，而 $A=\{1,\cos kx,\sin kx\}_{k\in N}$ 是 $X_{2\pi}^{p}$ 上的基本列，由定理1.2导出

推论1.1 设 $\{L_n\}_{n\in N}^{\infty}\subset\mathcal{E}(X_P(D))$ 且是一致有界的，若 $X_P(D)$ 中存在一个基本列 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 使得对每个 f_k 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n f_k-f_k\|_{X_P(D)}=0;\quad(k\in N).$$

则对每个 $f\in X_P(D)$ （$p\geqslant1$）有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n f-f\|_{X_P(D)}=0.$$

人们习惯上将推论1.1中的基本列 $\{f_k\}_{K\in N}$ 称为一致有界算子序列 $\{L_n\}_{n\in N}\subset\mathcal{E}(X_P(D))$，在 $X_P(D)$ 中为逼近恒等序列的试验集. 自然要问，在怎样的条件下，这种试验集只含有有限个元素呢？这个问题1951年分别由Korovkin和Bohman解决，下文将专门讨论.

1.4 对偶空间

设X为赋范线性空间，Y是实（或复）数域，则称$\mathscr{E}(X, Y)$中的元素为X上有界线性泛函，用X^*表示X上所有有界线性泛函的全体，特别当X是Banach空间时，则X^*也是Banach空间，通称为X的对偶空间（或共轭空间）.

现在给出Hahn－Banach延拓定理及其重要推论.

Hahn－Banach延拓定理．设X是Banach空间，D是X中的线性流形，若$F\in D^*$，则存在有界线性泛函$f^*\in X^*$，使得对所有$f\in D$有$f^*(f)=F(f)$且$\|f^*\|_{X^*}=\|F\|_{D^*}$.

由Hahn－Banach定理可证得如下重要事实：

i）对每个点$f_0\in X$且$f_0\neq\theta$，则存在$f^*\in X^*$使得$f^*(f_0)=\|f_0\|_X$且$\|f^*\|_{X^*}=1$.

ii）设D是X中线性流形，$f_1\in X$且与D有正的距离，即$d=\inf\limits_{f\in D}\|f_1-f\|_x>0$，则存在$f^*\in X^*$使得对$\forall f\in D$有$f^*(f)=0$，而$f^*(f_1)=1$且$\|f^*\|_{X^*}=\frac{1}{d}$.

由此可见，X上的有界线性泛函，若在一个稠密于X的线性流形上为零，则必恒为零．此外，对于X内两个不同点f_1和f_2，则存在$f^*\in X^*$使得$f^*(f_1)\neq f^*(f_2)$，从而导出，设$f\in X$，若对$\forall f^*\in X^*$有$f^*(f)=0$，则有$f=\theta$.

设D^*是X^*的子集，若对$\forall f\in X$有

$$\|f\|_x=\sup_{f^*\in D^*}|f^*(f)|$$

则说D^*是X的确定集，例如，设对每个$f\in L_p[a, b]$（$1\leqslant p<+\infty$），不难证明

$$\sup_{\|g\|_q\leqslant 1}\int_a^b f(x)g(x)dx=\|f\|_p \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

由于在等距同构意义下有$L_p^*[a, b]=L_q[a, b]$，所以

$$D^*=\{g\mid g\in L_q[a, b] \text{ 且 } \|g\|_q\leqslant 1\}$$

是$L_p[a, b]$（$p\geqslant 1$）的确定集．同样地，不难证明，对每个$f\in C[a, b]$有

$$\sup_{\bigvee_a^b(g)\leqslant 1}\int_a^b f(x)dg(x)=\|f\|_{C[a,b]},$$

其中$\bigvee_a^b(g)$是有界变差函数$g\in BV[a, b]$在$[a, b]$上的全变差，又由于在等距同构意义下有$C^*[a, b]=BV[a, b]$，所以

$$D^*=\{g\mid g\in BV[a, b] \text{ 且 } \bigvee_a^b(g)\leqslant 1\}$$

是$C[a, b]$的确定集.

对$f^*\in X^*$，记$f^*(f)=\langle f^*, f\rangle$，则有

i）对$\forall f^*\in X^*$，$f\in X$有

ii) 对 $\forall f_1^*, f_2^* \in X^*$, $f \in X$有

$$<\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*, f> = \alpha_1 <f_1^*, f> + \alpha_2 <f_2^*, f>,$$

对$\forall f^* \in X^*$ 和$\forall f_1, f_2 \in X$有

$$<f^*, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2> = \alpha_1 <f^*, f_1> + \alpha_2 <f^*, f_2>,$$

其中 α_1, $\alpha_2 \in Z$. 由此可见$f^*(f) = <f^*, f>$是双线性泛函。

设$\{f_n\}_{n\in N}$是X内的序列，$f \in X$，若对$\forall f^* \in X^*$有

$$\lim_{n\to\infty} <f^*, f_n> = <f^*, f>,$$

则说f_n弱收敛于f，记作

$$w - \lim_{n\to\infty} fn = f$$

或 $f_n \xrightarrow{(w)} f\ (n\to\infty)$，易见X中每个强收敛序列必是弱收敛序列，其次，若 $\{f_n\}_{n\in N}$ 在X内弱收敛，则 有 $\sup_n \|f_n\|_x < +\infty$.

类似地，设$\{f_n^*\}_{n\in N}$ 是 X^* 内的序列，$f^* \in X^*$，若对 $\forall f \in X$ 有

$$\lim_{n\to\infty} <f_n^*, f> = <f^*, f>,$$

则说f_n^*弱* 收敛于 f^*，记作

$$w^* - \lim_{n\to\infty} fn^* = f^*,$$

或$f_n^* \xrightarrow{w^*} f^*\ (n\to+\infty)$.

最后我们引入自反空间的概念，通称X^*的对偶X^{**}为X的第二对偶空间，用f^{**} 表 示X^{**}中的元素，由于对 $f_0 \in X$，若存在$f^{**} \in X^{**}$使得对$\forall f^* \in X^*$有

$$<f_0^{**}, f^*> = <f^*, f_0>,$$

则易见f_0^{**}与f_0^{**}之间是一一对应的. 记$X_0^{**} = \{f_0^{**} \mid f_0^{**} \in X^{**}$，$f_0 \in X$ 且对 $\forall f^* \in X$，有$<f_0^{**}, f^*> = <f^*, f_0>\}$，则$X_0^{**}$是$X^{**}$中的线性流形，从而映照$f_0 \to f_0^*$是从X 到 X_0^{**}上一对一且范数保持的，因此，在同构意义下有$X \subset X^{**}$，特别地，若$X = X^{**}$则说是自反的，例如$L_p[a, b]$ $(p>1)$是自反的.

1.5正线性算子

设D是实数集合，X(D)是定义在D上的函数空间。T是X(D)到自身内的线性算子，则对$f = f(x) \in X(D)$有

$$T(f, x) \triangleq Tf(x) \quad \in X(D),$$

若对 $f \in X(D)$ 且 $f(x) \geqslant 0$ $(x \in D)$，恒有 $T(f,x) \geqslant 0$ $(x \in D)$ 则说T是X(D)上的正线性算子，明显地，设T是X(D)上正线性算子，则对 $f, g \in X(D)$ 且 $f(x) \leqslant g(x)$ $(x \in D)$，有

$$T(f, x) \leqslant T(g, x) \qquad (x \in D).$$

又若 f，$|f|\in X(D)$，则对 $x\in D$ 有

$$|T(f,x)|\leqslant T(|f|,x).$$

特别地，若 $X(D)=C(D)$时，则有

$$\|T\|=\sup_{\|f\|_{C(D)}=1}\|T(f)\|_{C(D)}=\|T(1)\|_{C(D)}.$$

事实上，对$\forall f\in C(D)$有

$$|T(f,x)|\leqslant T(|f|,x)\leqslant\|f\|_{C(D)}T(1,x);\ (x\in D),$$

因而有

$$\|Tf\|_{C(D)}\leqslant\|f\|_{C(D)}\|T(1)\|_{C(D)},$$

由于 $1\in C(D)$ 所以得到

$$\|T\|=\|T(1)\|_{C(D)}.$$

§2 一些典型的正线性算子列

为下文例证方便，本节我们列举几类典型的，在文献中常见的正线性算子列。

2.1 指数型算子.

设$D=[a,b]$（$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$），核函数$\mathcal{E}_n(x,u)$是$D\times D$上非负函数适合如下条件

i) 对每个 $x\in D$ 有

$$\int_a^b\mathcal{E}_n(x,u)du=1;$$

ii) 对x，$u\in D$ 有

$$\frac{\partial\mathcal{E}_n(x,u)}{\partial x}=\frac{n}{\phi(x)}(u-x)\mathcal{E}_n(x,u)$$

其中$\phi(x)$是次数$\leqslant2$的多项式，且对$x\in(a,b)$有$\phi(x)>0$，此外，若 $a\neq-\infty$ 或 $b\neq+\infty$，则分别要求 $\phi(a)=0$ 或 $\phi(b)=0$.

对每个 $f\in C(D)$，$n\in N$ 令

$$E_n(f,x)=\int_a^b f(u)\mathcal{E}_n(x,u)du,$$

明显地，$E_n(1,x)=1$ （$x\in D$），且对每个 $f\in C(D)$有

$$\|E_n(f)\|_{C(D)}\leqslant\|f\|_{C(D)},$$

所以有$\|E_n\|=1$，因此指数型算子$E_n\in\mathcal{E}(C(D))$且是压缩的正线性算子.

指数型算子E_n概括了如下一些熟知的正线性算子

例1 Gauss－Weierstrass 算子 G_n：取 $D=(-\infty,+\infty)$，$\phi(x)=1$ 和核函数

$$\mathcal{E}_n(x,u)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{n(u-x)^2}{2}\right\}.$$

得到 Gauss－Weierstrass 算子 G_n：对 $f\in C(-\infty,+\infty)$有