

陈文忠 编著

厦门大学出版社

算子逼近论

62

0

内 容 简 介

本书系统介绍了算子逼近中的收敛原理,逼近度量化估计方法和精度分析方法,以及各类逼近等价定理和饱和定理,其中包括了作者一些最新研究成果。书中除了不加证明地引用泛函分析中若干重要事实外,力求概念清晰,论证严谨。

本书可作为函数逼近论,应用泛函分析,数值逼近论方向研究生和数学专业本科生的选修课教材,也可供函数论,计算数学等方向的研究人员以及科技工作者,大学教师参考。

2188 / 21

算 子 逼 近 论

陈文忠 编著

*

厦门大学出版社出版发行

福建省新华书店经销

莆田市印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 28.125印张 597千字

1989年6月第1版 1991年12月第2次印刷

印数: 1001—4000册

ISBN 7-5615-0182-5

O·7 定价: 10.50元

序 言

最初人类认识的函数是多项式，后来发展为解析函数，Lagrange (1736~1813) 最早提出幂级数，用级数表示解析函数，可以看做多项式的发展，1822年 Fourier 在关于热传导的著作中提出 Fourier 级数，即用三角函数级数表示函数，无穷级数取有限项即它所表示的函数的近似式，这是函数构造论的开始。20世纪末，随着知识爆炸时代的到来，各种正交级数的出现，对每一正交级数都可以作出一套逼近程序，在这种科学分枝越来越多的情况下，用泛函的方法把它统一起来，这是在逼近论中引入算子概念的一个自然趋势。开始有 Bernstein 算子，Fejer 算子出现，发展到一般算子理论处理逼近论问题，从方法上说可以看做高度概括，对不同的应用问题又可派生出不同逼近程序，所以算子逼近论是当前逼近论的发展热点。本书是算子逼近理论的一部学术著作作者将当前外国书刊中成果作了综合的论述，并将他自己的工作和他处理问题的独特方法作了阐述，可以作为高年级专门化课程及研究生的教材，此书的出版对逼近论及线性算子理论的研究将会产生深远的影响。

李文清

1989年1月15日

前 言

从本世纪50年代开始,泛函分析方法在逼近理论的研究和应用中的影响日益增大,并形成逼近论的一个重要分支——算子逼近,其原因是算子逼近将泛函分析中高度概括的思维方法和古典分析中的精致技巧结合起来,从而使经典的逼近方法有了新的生长点,因此三十多年来算子逼近的研究得到迅速发展,建立了系统的方法和理论并对其它数学分支(例如概率论,数值分析等等)产生广泛的影响。

算子逼近理论主要是研究如下一些问题。

1) 研究线性算子序列的收敛性质,这里主要讨论依范数收敛,点态收敛以及收敛速度的渐近分析,这类问题统称为逼近定理。关于这方面的工作是1951年由P.P.Korovkin和H.Bohman分别对连续函数空间建立的,随后由许多学者逐步推广到可测函数空间,例如, p 次可积空间,有界变差函数空间以及各种抽象函数空间。

2) 研究收敛速度的量化,这里包含两个方面的问题,具体地说,设 $\{L_n\}$ 是线性算子列, X 是确定的线性赋范空间,一方面首先研究对每个 $f \in X$,逼近度 $\|L_n(f) - f\|_X$ 的阶,其次研究量 $\sup_{f \in X} \|L_n(f) - f\|_X$ 的阶,这类结果称为算子逼近中的量化正定理。关于量化正定理的研究起始于R.G.Mamedov, O.Shisha 和B.Mond等人的工作,另一方面为了确定量化正定理所得到的收敛阶精度,进而研究所谓逼近逆定理以及各类精度分析方法,它的基本思想是由Bernstein创立的,而算子逼近的逆定理主要是由G.G.Lorentz及其学生建立的,例如P.L.Butzer, H.Berens 等人都做了大量的出色工作。

3) 研究算子逼近中的饱和现象,这主要的工作是确定算子逼近中的饱和阶和饱和类。人们统称这类结果为饱和定理,当然它们也是衡量逼近精度的一个重要事实。A.H.Turetsky, M.Zamansky, R.A.DeVore, Z.Ditzian 以及 V.Totik 在这方面做了大量的研究工作。

本书系统地讨论算子逼近中的收敛原理,逼近度量化估计方法和精度分析方法,以及各类逼近等价定理和饱和定理。其中包括了近几年来作者的一些研究成果,本书中除了不加证明地引用泛函分析中若干重要事实外,力求概念清晰、论证严谨。

在本书的写作过程中得到徐利治、李文清和孙永生等教授的热情鼓励和帮助,谨向他们深切致谢,此外本书初稿曾在厦门大学数学系,北京师范大学数学系,华中理工大学数学研究所,湖北大学数学系,河南大学数学系,湖南师范大学数学系以及宁夏大学数学系为逼近论方向的研究生报告过,得到不少宝贵意见,最后特别应当指出,曾晓明、吴自力

两同志为本书格式规范化花费大量心血，借此机会作者一并表示由衷的感谢。

限于作者水平，错误和不当之处肯定不少，敬请国内专家和读者给予指正。

陈文忠

1987年5月于厦门大学

目 录

序言 前言

第一章 逼近定理

§ 1 线性算子	(1)
1.1 Banach 空间	(1)
1.2 有界线性算子	(3)
1.3 Banach—Steinhaus 定理	(4)
1.4 对偶空间	(5)
1.5 正线性算子	(7)
§ 2 一些典型的正线性算子列	(8)
2.1 指数型算子	(8)
2.2 插值型算子	(9)
2.3 概率型算子	(13)
2.4 Kantorovich 型算子	(17)
2.5 和型积分算子	(20)
2.6 代数卷积算子	(22)
2.7 周期卷积算子	(24)
§ 3 周期卷积算子列的收敛定理	(29)
3.1 逼近恒等核	(29)
3.2 强收敛定理	(30)
3.3 一致有界卷积算子列强收敛的充要条件	(32)
3.4 Turesky 收敛等价定理	(34)
§ 4 Bohman—Korovkin 理论	(37)
4.1 $C(D)$ 上的试验集	(37)
4.2 Bohman—Korovkin 定理	(40)
4.3 Bohman—Korovkin 定理应用实例	(41)
4.4 Bohman—Korovkin 型定理	(53)
§ 5 逼近度的渐近表示	(58)
5.1 渐近关系转化定理	(58)
5.2 Nikölsky 渐近表示式	(62)

5.3 Vonorovskya 渐近表示式	(68)
5.4 正卷积算子的 Vonorovskya 渐近表示式	(71)
5.5 Mamedov 渐近表示式	(75)

第二章 逼近度估计

§ 1 光滑模与K—泛函	(80)
1.1 光滑模	(80)
1.2 K—泛函	(82)
1.3 $X_p(D)$ 上光滑模与K—泛函的弱等价定理	(85)
1.4 C空间K—泛函的上界估计	(91)
1.5 修正K—泛函与修正光滑模	(100)
§ 2 逼近转化原理及其应用	(112)
2.1 逼近转化的一般原理	(112)
2.2 算子依范数逼近的转化定理	(115)
2.3 L_p 空间正算子逼近的量化定理	(120)
2.4 $X_p(D)$ 空间正算子逼近的Freud定理	(128)
2.5 无穷区间上算子逼近的量化定理	(139)
§ 3 逼近度估计的直接方法	(146)
3.1 Mamedov—Shisha 量化方法	(146)
3.2 DeVore—Freud 量化方法	(151)
3.3 精化的 Mamedov—Shisha 量化估计	(157)
3.4 对BV函数逼近度量化的 Bojanic 方法	(160)
§ 4 逼近度估计的矩量方法	(175)
4.1 周期卷积算子的 Butzer—Freud 量化定理	(175)
4.2 算子逼近的 Ditzian 量化定理	(179)

第三章 逼近精度与逆定理

§1 算子逼近的精度分析	(187)
1.1 逼近度估计的精确性概念	(187)
1.2 逼近度估计精确性的充分条件	(188)
1.3 应用举例	(192)
§2 周期卷积算子逼近的逆定理	(195)
2.1 经典的 Bernstein 方法	(195)
2.2 Becker—Nessel 方法	(199)
2.3 卷积算子逼近的等价定理	(203)

§3 C_{2n} 空间上线性算子逼近的等价定理	(205)
3.1 Lorenz—Berens 定理	(205)
3.2 逼近阶序列的必要条件	(211)
3.3 关于二阶光滑模的一个充分条件	(213)
§4 线性算子局部逼近的等价定理	(218)
4.1 质量集中的 Borel 测度列	(218)
4.2 非周期正卷积算子逼近的逆定理	(223)
4.3 代数卷积算子局部逼近的等价定理	(228)
§5 插补空间与逼近等价定理	(232)
5.1 Banach 空间的逼近等价定理	(232)
5.2 L_p 空间的逼近等价定理	(242)
5.3 L_p 逼近等价定理的应用	(247)
5.4 一致逼近的等价定理	(257)
5.5 点态的逼近等价定理	(262)

第四章 算子逼近的饱和理论

§1 周期函数类的 Fourier 特征	(273)
1.1 可微周期函数类的 Fourier 特征	(273)
1.2 共轭函数类的 Fourier 特征	(280)
1.3 复数列为 Fourier 系数列的充要条件	(283)
1.4 乘子表示定理	(291)
§2 周期卷积算子的饱和理论	(296)
2.1 饱和阶的确定	(296)
2.2 饱和类的逆定理	(303)
2.3 饱和类的正定理与等价定理	(306)
2.4 Turesky 等价定理及其推广	(313)
2.5 关于一致有界乘子条件的讨论	(318)
2.6 以 $(1 - a_{m,p})$ 为饱和阶的饱和类特征	(323)
§3 正线性算子在 $C[a, b]$ 上的饱和理论	(327)
3.1 正线性算子的点态小 O 饱和定理	(328)
3.2 正卷积算子的点态小 O 饱和定理	(331)
3.3 正线性算子的大 o 饱和定理	(341)
3.4 正线性算子的广义点态饱和定理	(350)
3.5 正线性算子的局部饱和定理	(352)
§4 关于最优正线性算子列饱和问题的研究	(353)
4.1 最优正三角多项式算子	(358)

4.2 最优正三角多项式算子列的饱和问题.....	(375)
4.3 拟最优正三角卷积算子的饱和问题.....	(378)
4.4 最优正多项式算子列.....	(380)
4.5 最优正多项式算子列的小 O 饱和定理.....	(385)
§5 L_p 空间正线性算子逼近的饱和理论	(394)
5.1 正代数卷积算子列的 L_p 局部饱和定理.....	(394)
5.2 Kantorovich 型算子列的 L_p 饱和定理.....	(407)
 参考文献.....	 (440)

第一章 逼近定理

§1 线性算子

1.1 Banach 空间

设 X 是实数(或复数)域 Z 上的线性空间,在 X 上定义一个非负实值函数 $\|\cdot\|_X$,若适合如下条件称它为 X 中元素的范数:

- I) $\|x\|_X = 0 \iff x = \theta$ (X 中的零元素),
- II) $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X \quad (\alpha \in Z),$
- III) 对 $x, y \in X$ 有 $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X.$

这时说 X 是赋范的线性空间.

设 X 是赋范线性空间,其范数为 $\|\cdot\|_X$,若 $x_n, x \in X$ 且

$$\|x_n - x\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

则说序列 x_n 在 X 中强收敛于 x ,记作 $x_n \xrightarrow{(s)} x \quad (n \rightarrow +\infty)$ 或 $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

若 X 中任何Cauchy列必强收敛于 X 中某个元素,则说 X 是完备的.完备的赋范线性空间通称为Banach空间.可以证明:赋范性空间 X 是完备的充要条件是 X 中每个绝对可

和序列是可和的,即当 $\{x_n\} \subset X$ 且使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < +\infty$,则 $\sum_{k=1}^n x_k$ 强收敛于 X 中某一元素,

因此可见Banach空间中任何一个闭线性流形也是Banach空间.

设 X 是线性空间,在 X 上定义二种范数 $\|\cdot\|_{X,1}$ 和 $\|\cdot\|_{X,2}$,若存在正常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得对 $\forall x \in X$ 有

$$C_1 \|x\|_{X,1} \leq \|x\|_{X,2} \leq C_2 \|x\|_{X,1},$$

则说这两种范数是等价的,换言之,赋范空间 $(X, \|\cdot\|_{X,1}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{X,2})$ 的恒等映照是线性同胚的.

许多特殊的Banach空间在逼近论的研究中占据重要的地位.设 D 是紧致的Hausdorff空间,如下函数空间是常见的.

例1 连续函数空间 $C(D)$.在通常函数加法及数与函数乘法的前提下,若令 $f=f(x) \in C(D)$ 的范数为

$$\|f\|_{C(D)} = \sup_{x \in D} |f(x)|,$$

则可验证 $C(D)$ 是 Banach 空间.

特别当 $D = [a, b]$ 为有限闭区间时, 用 $C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上的连续函数空间, 其范数为

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

用 $C_{2\pi}$ 表示以 2π 为周期的连续函数空间, 其范数为

$$\|f\|_{C_{2\pi}} = \max_x |f(x)|.$$

例2 p 次可积函数空间 $L_p(D)$ ($p \geq 1$) 在几乎处处意义下理解函数加法及数与函数乘法的前提下, 若令 $f = f(x) \in L_p(D)$ ($p \geq 1$) 的范数为

$$\|f\|_p \triangleq \|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess. sup}_{x \in D} |f(x)| & p = +\infty, \end{cases}$$

则 $L_p(D)$ 是 Banach 空间.

特别地, 用 $L_{2\pi}^p$ 表示以 2π 为周期的 p 次可积函数空间, 对 $f \in L_{2\pi}^p$ ($p \geq 1$), 其范数为

$$\|f\|_p \triangleq \|f\|_{L_{2\pi}^p} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < +\infty), \\ \text{ess. sup}_x |f(x)| & p = +\infty. \end{cases}$$

在逼近论文献中经常引入如下函数空间: 设 D 是紧致的 Hausdorff 空间, 令

$$X_p(D) \triangleq \begin{cases} L_p(D) & 1 \leq p < +\infty, \\ C(D) & p = \infty. \end{cases}$$

而对以 2π 为周期的函数空间, 令

$$X_{2\pi} \triangleq X_{2\pi}^p = \begin{cases} L_{2\pi}^p & 1 \leq p < +\infty, \\ C_{2\pi} & p = \infty. \end{cases}$$

最后设 X 是实数 (或复数) 域 Z 上的线性空间, 在 X 定义一个非负实值函数 $|\cdot|_X$, 若适合如下条件称它为 X 中元素的半范:

- i) $|\alpha x|_X = |\alpha| |x|_X \quad (\alpha \in Z),$
- ii) 对 $x, y \in X$ 有 $|x+y|_X \leq |x|_X + |y|_X.$

例如, 设 $C^r[a, b]$ ($r \in \mathbb{N}$) 是 $[a, b]$ 上 r 次连续可微函数, 若对 $f = f(x) \in C^r[a, b]$, 令

$$\|f\|_{C^r[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(r)}(x)|,$$

则 $|\cdot|_{C[a,b]}$ 是半范。

1.2 有界线性算子

设 X, Y 是两个赋范性空间, D 是 X 中的子集, 若对每个 $x \in D$, Y 中有唯一确定的元 y 与之对应, 记作 $y = Tx$, 则说 T 是 D 到 Y 内的算子, 称 D 为算子的定义域, 而 $T(D) \subseteq Y$ 称为算子 T 的值域。若 $D = X$ 且 $T(D) \subset Y$ 时, 则说 T 是 X 到 Y 内的算子, 特别地, 若 $T(D) = Y$ 时, 则说 T 是 X 到 Y 上的算子。

设 T 是 X 到 Y 内的算子, 若 $Tx_1 = Tx_2$ 必有 $x_1 = x_2$, 则说算子 T 是一对一的。特别地, 若对 $\forall x \in X$ 有 $Tx = x$, 则说 T 是 X 上的恒等算子, 通常用记号 I 表示。

现在设 T 是 X 到 Y 内的算子, $f_0 \in X$, 若对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得对适合 $\|f - f_0\|_X < \delta$ 的一切 $f \in X$ 有

$$\|Tf - Tf_0\|_Y < \varepsilon,$$

则说算子 T 在 f_0 点是连续的, 若 T 在 X 中点点连续, 则说 T 是 X 到 Y 内的连续算子。

设 T 是 X 到 Y 内的算子, 若对 $\forall f_1, f_2 \in X$ 和 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ 有

$$T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 Tf_1 + \alpha_2 Tf_2,$$

则说 T 是线性的。若存在正常数 M 使得对 $\forall f \in X$ 有

$$\|Tf\|_Y \leq M \|f\|_X,$$

则说算子 T 是有界的, 使上式成立的 M 之下确界称为算子 T 的范数, 记作 $\|T\|_{(X,Y)}$, 于是对 $\forall f \in X$ 有

$$\|Tf\|_Y \leq \|T\|_{(X,Y)} \|f\|_X,$$

特别当 T 是 X 到 Y 内的有界线性算子, 则有

$$\begin{aligned} \|T\|_{(X,Y)} &= \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq \theta}} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq \theta}} \left\| T\left(\frac{f}{\|f\|_X}\right) \right\|_Y \\ &= \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Tf\|_Y = \sup_{\|f\|_X = 1} \|Tf\|_Y. \end{aligned}$$

不难证明, 若 T 是 X 到 Y 内的线性算子, 则如下命题是等价的:

- i) T 在 X 上是有界的;
- ii) T 在 X 中一点是连续的;
- iii) T 在 X 上是一致连续的, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $f_1, f_2 \in X$ 且 $\|f_1 - f_2\|_X < \delta$ 时, 有

$$\|Tf_1 - Tf_2\|_Y < \varepsilon.$$

用 $\mathcal{E}(X, Y)$ 表示 X 到 Y 内所有有界线性算子的全体, 若赋予上述的算子范数, 则也是一个线性赋范空间, 特别当 Y 是 Banach 空间, 则 $\mathcal{E}(X, Y)$ 也是 Banach 空间, 当 $Y = X$ 时, 记 $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X, X)$ 并称它为 X 的自同态。

设 $T \in \mathcal{E}(X, Y)$ 且对 $\forall f \in X$ 有

$$\|Tf\|_Y = \|f\|_X,$$

则说算子 T 是等距的, 若对 $\forall f \in X$ 有

$$\|Tf\|_Y \leq \|f\|_X,$$

则说 T 是压缩的.

现在设 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{E}(X, Y)$ 中有界线性算子序列, $T \in \mathcal{E}(X, Y)$, 若对每个 $f \in X$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n f - Tf\|_Y = 0,$$

则说算子序列 $\{T_n\}$ 强收敛于 T , 特别当 $Y=X$ 和 T 为恒等算子 I 时, 则说算子序列 $\{T_n\}$ 是逼近恒等序列. 若

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_{(X, Y)} = 0,$$

则说算子序列 $\{T_n\}$ 依范收敛于 T . 明显地, 依范收敛的算子序列必是强收敛的.

1.3 Banach—Steinhaus 定理

设 A 是赋范线性空间 X 中的子集. 若对每个 $f \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在 $g \in A$ 使得

$$\|f - g\|_X < \varepsilon,$$

则说 A 在 X 中稠密. 特别地, 若 A 中元素的一切有限性组合所形成的集合在 X 中稠密, 则说 A 是 X 中的基本集.

现在设 A 是 X 中的线性子集, 且在 X 中稠密, 若 T_0 是 A 到 Banach 空间 Y 内的有界线性算子, 其范数为 $\|T_0\|_{(A, Y)}$, 则存在一个 $T \in \mathcal{E}(X, Y)$ 使得对 $\forall f \in A$ 有 $Tf = T_0 f$, 且 $\|T\|_{(X, Y)} = \|T_0\|_{(A, Y)}$.

为建立 Banach—Steinhaus 定理, 首先给出如下的共鸣定理.

定理1.1 (共鸣定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X, Y)$, 若对每个 $f \in X$, 序列 $\{\|T_n f\|_Y\}$ 是有界的, 即对每个 $f \in X$, 存在正常数 M_f 使得对一切 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\|T_n f\|_Y \leq M_f$, 则 T_n 是一致有界算子列, 即存在正常数 M , 使得对 $\forall f \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\|T_n f\|_Y \leq M \|f\|_X$.

应用共鸣定理可建立有界线性算子序列的收敛原理.

定理1.2 (Banach—Steinhaus) 设 X 是 Banach 空间, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$, 则对每个 $f \in X$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n(f) - f\|_X = 0,$$

当且仅当

I) T_n 是一致有界线性算子列.

II) 存在 X 的一个稠密子集 A , 使得对每个 $g \in A$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(g) - g\|_X = 0.$$

证明 $\Rightarrow$) 条件 II) 成立是明显的, 所以仅需证明条件 I) 成立, 事实上, 由于对每个 $f \in X$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n(f) - f\|_X = 0,$$

所以对每个 $f \in X$, 数列 $\{\|T_n f\|_X\}$ 是有界的, 因此由共鸣定理得到序列 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是

一致有界的。

$\Leftarrow$) 设 $f \in X$, 由于 A 在 X 中稠密, 所以对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $g \in A$ 使得 $\|f - g\|_x < \varepsilon$, 又由 II) 对每个 $g \in A$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n g - g\|_x = 0,$$

因此由条件 i), 存在 $M > 0$ 使得对一切 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\|T_n\| \leq M$, 并利用范数三角形不等式得到

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_x &\leq \|T_n f - T_n g\|_x + \|T_n g - g\|_x + \|f - g\|_x \\ &\leq (\|T_n\| + 1) \|f - g\|_x + \|T_n g - g\|_x \\ &\leq (M + 1) \varepsilon + \|T_n g - g\|_x, \end{aligned}$$

注意到 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以对每个 $f \in X$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - f\|_x = 0.$$

证毕。

现在设 D 是紧致的 Hausdorff 空间, $X_p(D)$ ($p \geq 1$) 是 D 上的函数空间, 又设 $A = \{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X_p(D)$ 是 $X_p(D)$ 内的基本列, 即对每个 $f \in X_p(D)$ 和 $\forall \varepsilon > 0$, 存在线性组合

$$P(x) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(x)$$

使得

$$\|f - P\|_{X_p(D)} < \varepsilon,$$

由熟知的 Weierstrass 定理可知, $A = \{x^k\}_{k=0}^\infty$ 是 $X_p[a, b]$ 上的基本列, 而 $A = \{1, \cos kx, \sin kx\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是 $X_{2\pi}^p$ 上的基本列, 由定理 1.2 导出

推论 1.1 设 $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X_p(D))$ 且是一致有界的, 若 $X_p(D)$ 中存在一个基本列 $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ 使得对每个 f_k 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n f_k - f_k\|_{X_p(D)} = 0, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

则对每个 $f \in X_p(D)$ ($p \geq 1$) 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n f - f\|_{X_p(D)} = 0.$$

人们习惯上将推论 1.1 中的基本列 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 称为一致有界算子序列 $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X_p(D))$, 在 $X_p(D)$ 中为逼近恒等序列的试验集。自然要问, 在怎样的条件下, 这种试验集只含有有限个元素呢? 这个问题 1951 年分别由 Korovkin 和 Bohman 解决, 下文将专门讨论。

1.4 对偶空间

设 X 为赋范线性空间, Y 是实 (或复) 数域, 则称 $\mathcal{E}(X, Y)$ 中的元素为 X 上有界线性泛函, 用 X^* 表示 X 上所有有界线性泛函的全体, 特别当 X 是 Banach 空间时, 则 X^* 也是 Banach 空间, 通称为 X 的对偶空间 (或共轭空间)。

现在给出 Hahn-Banach 延拓定理及其重要推论。

Hahn-Banach 延拓定理. 设 X 是 Banach 空间, D 是 X 中的线性流形, 若 $F \in D^*$, 则存在有界线性泛函 $f^* \in X^*$, 使得对所有 $f \in D$ 有 $f^*(f) = F(f)$ 且 $\|f^*\|_{X^*} = \|F\|_{D^*}$ 。

由 Hahn-Banach 定理可证得如下重要事实:

i) 对每个点 $f_0 \in X$ 且 $f_0 \neq \theta$, 则存在 $f^* \in X^*$ 使得 $f^*(f_0) = \|f_0\|_X$ 且 $\|f^*\|_{X^*} = 1$ 。

ii) 设 D 是 X 中线性流形, $f_1 \in X$ 且与 D 有正的距离, 即 $d = \inf_{f \in D} \|f_1 - f\|_X > 0$, 则存在

在 $f^* \in X^*$ 使得对 $\forall f \in D$ 有 $f^*(f) = 0$, 而 $f^*(f_1) = 1$ 且 $\|f^*\|_{X^*} = \frac{1}{d}$ 。

由此可见, X 上的有界线性泛函, 若在一个稠密于 X 的线性流形上为零, 则必恒为零。此外, 对于 X 内两个不同点 f_1 和 f_2 , 则存在 $f^* \in X^*$ 使得 $f^*(f_1) \neq f^*(f_2)$, 从而导出, 设 $f \in X$, 若对 $\forall f^* \in X^*$ 有 $f^*(f) = 0$, 则有 $f = \theta$ 。

设 D^* 是 X^* 的子集, 若对 $\forall f \in X$ 有

$$\|f\|_X = \sup_{f^* \in D^*} |f^*(f)|$$

则说 D^* 是 X 的确定集, 例如, 设对每个 $f \in L_p[a, b]$ ($1 \leq p < +\infty$), 不难证明

$$\sup_{\|g\|_q \leq 1} \int_a^b f(x)g(x)dx = \|f\|_p \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

由于在等距同构意义下有 $L_p^*[a, b] = L_q[a, b]$, 所以

$$D^* = \{g \mid g \in L_q[a, b] \text{ 且 } \|g\|_q \leq 1\}$$

是 $L_p[a, b]$ ($p \geq 1$) 的确定集。同样地, 不难证明, 对每个 $f \in C[a, b]$ 有

$$\sup_{\substack{b \\ a \\ V(g) \leq 1}} \int_a^b f(x)dg(x) = \|f\|_{C[a, b]},$$

其中 $\bigvee_a^b(g)$ 是有界变差函数 $g \in BV[a, b]$ 在 $[a, b]$ 上的全变差, 又由于在等距同构意义

下有 $C^*[a, b] = BV[a, b]$, 所以

$$D^* = \{g \mid g \in BV[a, b] \text{ 且 } \bigvee_a^b(g) \leq 1\}$$

是 $C[a, b]$ 的确定集。

对 $f^* \in X^*$, 记 $f^*(f) = \langle f^*, f \rangle$, 则有

i) 对 $\forall f^* \in X^*$, $f \in X$ 有

ii) 对 $\forall f_1^*, f_2^* \in X^*, f \in X$ 有

$$\langle a_1 f_1^* + a_2 f_2^*, f \rangle = a_1 \langle f_1^*, f \rangle + a_2 \langle f_2^*, f \rangle,$$

对 $\forall f^* \in X^*$ 和 $\forall f_1, f_2 \in X$ 有

$$\langle f^*, a_1 f_1 + a_2 f_2 \rangle = a_1 \langle f^*, f_1 \rangle + a_2 \langle f^*, f_2 \rangle,$$

其中 $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. 由此可见 $f^*(f) = \langle f^*, f \rangle$ 是双线性泛函.

设 $\{f_n\} \subset X$ 是 X 内的序列, $f \in X$, 若对 $\forall f^* \in X^*$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f^*, f_n \rangle = \langle f^*, f \rangle,$$

则说 f_n 弱收敛于 f , 记作

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

(iv)

或 $f_n \rightarrow f (n \rightarrow \infty)$, 易见 X 中每个强收敛序列必是弱收敛序列, 其次, 若 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

在 X 内弱收敛, 则有 $\sup_n \|f_n\|_X < +\infty$.

类似地, 设 $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X^* 内的序列, $f^* \in X^*$, 若对 $\forall f \in X$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n^*, f \rangle = \langle f^*, f \rangle,$$

则说 f_n^* 弱*收敛于 f^* , 记作

$$w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^* = f^*,$$

或 $f_n^* \xrightarrow{w^*} f^* (n \rightarrow +\infty)$.

最后我们引入自反空间的概念, 通称 X^* 的对偶 X^{**} 为 X 的第二对偶空间, 用 f^{**} 表示 X^{**} 中的元素, 由于对 $f_0 \in X$, 若存在 $f^{**} \in X^{**}$ 使得对 $\forall f^* \in X^*$ 有

$$\langle f_0^{**}, f^* \rangle = \langle f^*, f_0 \rangle,$$

则易见 f_0^{**} 与 f_0 之间是一一对应的. 记 $X_0^{**} = \{f_0^{**} \mid f_0^{**} \in X^{**}, f_0 \in X \text{ 且对 } \forall f^* \in X^*, \text{ 有 } \langle f_0^{**}, f^* \rangle = \langle f^*, f_0 \rangle\}$, 则 X_0^{**} 是 X^{**} 中的线性流形, 从而映照 $f_0 \rightarrow f_0^{**}$ 是从 X 到 X_0^{**} 上一对一且范数保持的, 因此, 在同构意义下有 $X \subset X^{**}$, 特别地, 若 $X = X^{**}$ 则说是自反的, 例如 $L_p[a, b] (p > 1)$ 是自反的.

1.5 正线性算子

设 D 是实数集合, $X(D)$ 是定义在 D 上的函数空间. T 是 $X(D)$ 到自身的线性算子, 则对 $f = f(x) \in X(D)$ 有

$$T(f, x) \triangleq Tf(x) \in X(D),$$

若对 $f \in X(D)$ 且 $f(x) \geq 0 (x \in D)$, 恒有 $T(f, x) \geq 0 (x \in D)$ 则说 T 是 $X(D)$ 上的正线性算子, 明显地, 设 T 是 $X(D)$ 上正线性算子, 则对 $f, g \in X(D)$ 且 $f(x) \leq g(x) (x \in D)$, 有

$$T(f, x) \leq T(g, x) \quad (x \in D).$$

又若 $f, |f| \in X(D)$, 则对 $x \in D$ 有

$$|T(f, x)| \leq T(|f|, x).$$

特别地, 若 $X(D) = C(D)$ 时, 则有

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_{C(D)}=1} \|T(f)\|_{C(D)} = \|T(1)\|_{C(D)}.$$

事实上, 对 $\forall f \in C(D)$ 有

$$|T(f, x)| \leq T(|f|, x) \leq \|f\|_{C(D)} T(1, x); (x \in D),$$

因而有

$$\|Tf\|_{C(D)} \leq \|f\|_{C(D)} \|T(1)\|_{C(D)},$$

由于 $1 \in C(D)$ 所以得到

$$\|T\| = \|T(1)\|_{C(D)}.$$

§2 一些典型的正线性算子列

为下文例证方便, 本节我们列举几类典型的, 在文献中常见的正线性算子列。

2.1 指数型算子.

设 $D = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), 核函数 $E_n(x, u)$ 是 $D \times D$ 上非负函数适合如下条件

I) 对每个 $x \in D$ 有

$$\int_a^b E_n(x, u) du = 1;$$

II) 对 $x, u \in D$ 有

$$\frac{\partial E_n(x, u)}{\partial x} = \frac{n}{\phi(x)} (u-x) E_n(x, u)$$

其中 $\phi(x)$ 是次数 ≤ 2 的多项式, 且对 $x \in (a, b)$ 有 $\phi(x) > 0$, 此外, 若 $a \neq -\infty$ 或 $b \neq +\infty$, 则分别要求 $\phi(a) = 0$ 或 $\phi(b) = 0$.

对每个 $f \in C(D)$, $n \in \mathbb{N}$ 令

$$E_n(f, x) = \int_a^b f(u) E_n(x, u) du,$$

明显地, $E_n(1, x) = 1$ ($x \in D$), 且对每个 $f \in C(D)$ 有

$$\|E_n(f)\|_{C(D)} \leq \|f\|_{C(D)},$$

所以有 $\|E_n\| = 1$, 因此指数型算子 $E_n \in \mathcal{E}(C(D))$ 且是压缩的正线性算子.

指数型算子 E_n 概括了如下一些熟知的正线性算子

例1 Gauss-Weierstrass 算子 G_n : 取 $D = (-\infty, +\infty)$, $\phi(x) = 1$ 和核函数

$$E_n(x, u) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n(u-x)^2}{2}\right\}.$$

得到 Gauss-Weierstrass 算子 G_n : 对 $f \in C(-\infty, +\infty)$ 有