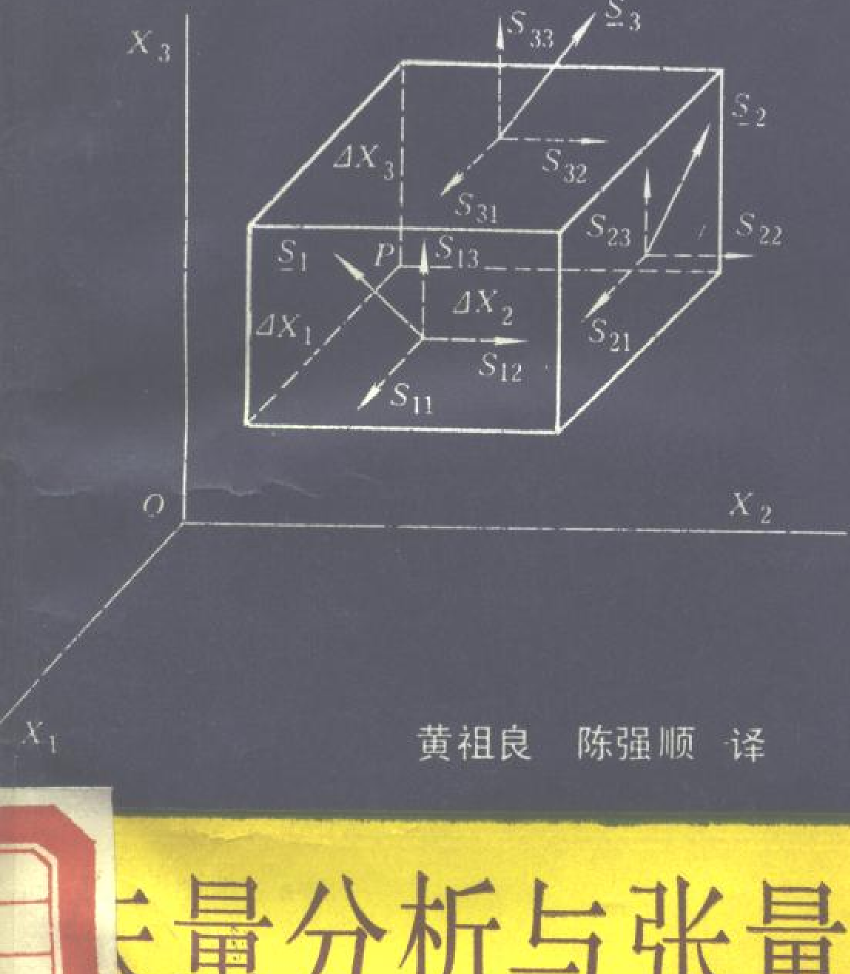


黄祖良　陈强顺　译

矢量分析与张量分析

同济大学出版社

本书原采用英制单位，译出时未改成SI制。

——译　者

Vector and Tensor Analysis

Eutiguio C. YOung

Marcel Dekker Inc 1978

矢量分析与张量分析

黄祖良　陈强顺　译

同济大学出版社出版

（上海四平路 1239 号）

新华书店上海发行所发行

上海崇明永南印刷厂印刷

开本：787×10921/32　印张：16.125 字数：412 千字

1989 年 4 月第 1 版　1989 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—4000　定价：7·40 元

ISBN7—5608—0175—7/0.27

序　　言

本书是矢量分析和张量分析的导引教程。编写本书的目的在于，使学生熟悉与矢量分析和张量分析有关的各种基本概念、它们的物理意义和几何解释，并使学生能在一定程度上熟练掌握本学科的结构及其应用技巧。

在全书中，我们着重于直观说明以及几何和物理的解释。为此，从物理各学科，诸如力学、流体动力学和电磁学中选取了大量例题，但并不需要学生具备这些方面的预备知识。我们把重点放在基本方法和计算技能的训练上，且有意识地略去了一些较复杂的证明。教学经验证明，对定理的精确证明，会使学生感到困难，而又无助于对这些定理的意义和内涵的理解。因而对格林定理、高斯定理和斯托克斯的经典积分定理只是用最简单的几何图象作直观处理。几乎在每一节的末尾，都附有不同难度的习题，以考查学生对内容的理解程度，并使学生能由此熟练掌握本学科的基本计算和技巧。

本书的取材超过了大学三年级或四年级甚至物理专业研究生一年级的一年或两个短学期（quarter）[注] 的课程所需的内容。若删去 3.9 节至 3.12 节，第 1 章至第 4 章可作为矢量分析的一学期（semester）课程；或根据教学对象，对内容再作删减后，可作为一个短学期的课程。又若以 3.9 节和 3.11 节为前导，第五和第六两章则可作为第二学期或一个短学期的张量分析课程的内容。

[注]　短学期(quarter)为一学年分为四学期制的学期，学期（semester）为一学年分为两学期制的学期——译者

作为以本书为教材的课程的预备知识，学生必须熟悉传统的基础微积分学内容，尤其需要掌握微分和积分的基本法则，诸如链式法则、分部积分和多重积分的累次积分法等。矩阵代数虽然是有用的，但不作为必要的预备知识，因为本书只需要这方面少量的基本知识，而这些知识已在本书中作了概述。

（下略）

E. C. 杨

目　录

第一章　矢量代数

1.1 引　言

在物理学的研究中，我们遇到诸如体积和温度等量，这些量仅用它们的量值（用相应的单位表示）就能够描述。例如，立方体的体积可用立方吋的数值描述，一天中某一时刻的温度可用华氏温标的度数描述。这种只用量值就能表征的量，称为标度量，它们用实数表示，也称为标量。另一方面，还存在其他的物理量，如位移、力、速度和加速度，它们不能单用数值来描述。这些量不仅有量值，而且有方向，因而这样的量都必须由这两方面来加以完整的描述。当一个气象员报告某一天的风速时，他不仅应当说明风的速率（风速的量值），而且还应当说明风吹的方向。这种必须用量值和方向来表征的量，称为有向量。

正如用实数或标量表示和处理标度量那样，我们可用称为矢量的数学客体来表示和处理有向量。所以，在某种意义上，矢量可视为广义的数。矢量的表示法、矢量的代数运算、矢量的微分和积分以及它们的应用构成了矢量分析这一学科的内容。

标量和矢量还不足以处理在应用数学和物理学中遇到的所有的量。事实上，还存在着结构更为复杂的量。对它们的描述就不能只用量值和方向，而必须应用更多的概念。例如，为描述应力这样一个量，我们必须确定力和力所作用的面。这样的量就只能用所谓张量的数学客体来描述。以后我们将要看到，矢量和标量实际上是张量的特例。

在本书中，我们研究在大家熟悉的三维欧几里德空间中的矢

量和张量。在许多情况下，对三维空间所获得的概念和结果，可直接推广于更多维的空间。在本书中，我们用上面加箭号的字母 $\vec{A}$，$\vec{B}$，…或 $\vec{a}$，$\vec{b}$，…表示矢量，用小写字母 a，b，…表示实数或标量。（在插图中用字母下面加短线来表示矢量）[注1] 张量则用它们的所谓分量来表示。

1.2 矢量的定义

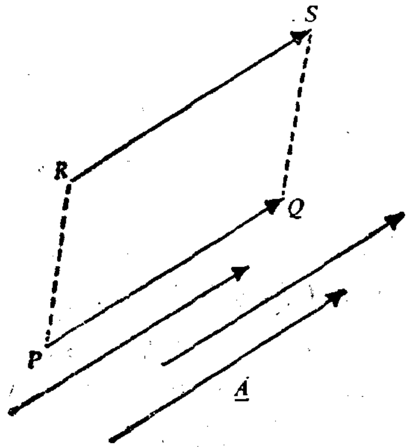


图 1.1 有向线段。

矢量在本质上可用几何的、解析的和公理的三种方式来定义。几何的定义应用有向线段或矢线 [注2] 标志法。如果指定某一点 P 为起点，另一点 Q 为终点，则由这两个已知点 P 和 Q 所确定的线段就成为有向线段。所得有向线段记为 PQ，并在图中用一条由 P 指向 Q 的矢线表示（图 1.1）。PQ 的长度用 $|PQ|$ 表示。如

[注 1] 原书中矢量一律在字母下划短线表示，为便于排版，译本改用上述标记。——译者

[注 2] 此处原文为 arrow，直译为“箭”或“矢”，现暂译为“矢线”。——译者

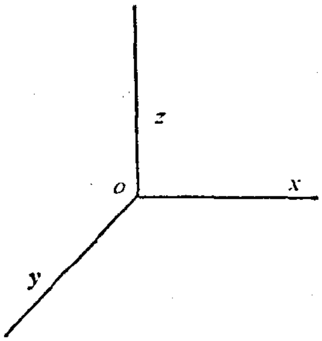
果有两个有向线段 PQ 和 RS，它们具有相同的长度和相同的方向，就说它们是相等的($PQ=RS$)。由此，按照几何方式，一个矢量可由所有具有相同长度和相同方向的有向线段或矢线的集合来定义。（这样的集合也叫做有向线段的的等价类，同一类中的任意两个元素被认为是相等的。）矢线的共同长度表示矢量的量值，箭头表示矢量的方向。集合里的任一矢线都可以表示这一矢量。这样，图 1.1 所示的矢线的集合就定义一个矢量 $\vec{A}$。按这一定义，可以用几何方法引进和研究矢量的代数运算。这个方法具有与任何参考系或坐标系无关的优点，这也是矢量的一个重要性质。但是这个方法不便于计算。

在解析方式中，矢量是用相对于已知坐标系的一组有序的三个实数$[a_1, a_2, a_3]$来定义。实数 a_1，a_2，a_3 称为矢量的分量，当然，这些分量是在矢量的几何描述中引进坐标系后所自然产生的。于是矢量的代数运算即可按其分量进行，而且这些运算性质很容易从实数的相应性质导出。这种方法在理论上和实践中都是最为方便的。但是必须记住，一个矢量的分量依赖于所用的坐标系，因此，坐标系的改变将导致分量的改变，虽然矢量本身保持不变。

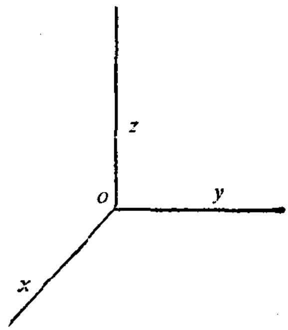
最后，公理的观点简单地把矢量看作为一个在所谓线性矢量空间中的抽象代数体系的一个不作说明的客体。在这样的体系中，要求矢量对两种代数运算满足某一组公理，而这两种运算也是不作说明的概念。以后可以看到，线性矢量空间的公理组正是矢量对加法和与标量的乘法这两种运算所应满足的性质，这些运算是由几何方法或解析方法导出的。

在本章中，我们将根据矢量的解析定义来讨论矢量代数，而用有向线段或矢线从几何上来表示矢量，并对所得结果作出几何解释。相应地，要在我们探讨的空间中引入一个坐标系。通常，

我们选用右手直角笛卡儿坐标系（x，y，z）。如所周知，这样的坐标系由三条彼此相互垂直交于一点的直线组成，其交点 o 称为原点（图 1.2）。这三条直线分别称为 x，y 和 z 坐标轴，每一坐标轴选定一个方向作为它的正方向。对于上述的右手坐标系，若以右手的食指指 x 轴正向，中指指 y 轴正向时，则大姆指就指 z 轴正向。这一法则称为右手法则。这一法则的另一不同提法是，当右手的四指由正 x 轴向正 y 轴弯曲（经过小的角度 $\theta=90°$）时，大姆指即指向正 z 轴方向。对于这样的直角笛卡儿坐标系，我们现在可以定义矢量如下：



（a）左手系



（b）右手系

图 1.2 直角笛卡儿坐标系。

定义 1 矢量 $\vec{A}$ 是一组有序的三个实数 a_1, a_2, a_3，记为 $\vec{A}=[a_1, a_2, a_3]$；a_1，a_2，a_3 分别称为矢量第一、第二和第三分量，或 x，y 和 z 分量。

若一个矢量的所有分量都为零，这个矢量就称为零矢量，用 $\vec{0}$ 表示；于是 $\vec{0}=[0,0,0]$。矢量 $\vec{A}$ 的负矢量，用 $-\vec{A}$ 表示，定义为

$$-\vec{A}=[-a_1, -a_2, -a_3]。$$

例如，若 $\vec{A}=[2, -1, 3]$，则 $-\vec{A}=[-2, 1, -3]$。

定义 2 矢量 $\vec{A}=[a_1, a_2, a_3]$的量值，以$|\vec{A}|$表示，为一实数

$$|\vec{A}|=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}, \tag{1.1}$$

显然有$|\vec{A}|\geqslant 0$。当且仅当 $\vec{A}=\vec{0}$ 时，$|\vec{A}|=0$。量值等于1的矢量称为单位矢量。

在以后的讨论中，除非另作说明，所有的矢量均假定为非零矢量。

1.3 矢量的几何表示

一个矢量（非零）$\vec{A}=[a_1, a_2, a_3]$从几何上可表示为由坐标原点到点P:(a_1, a_2, a_3)的一条有向线段或矢线，如图1.3所示。事实上，我们看到矢线的长度等于$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}$，这就是由(1.1)式所定义的矢量量值。$OP$的方向可用称为$OP$的方向余弦的三个数$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$来确定。由图1.3可得

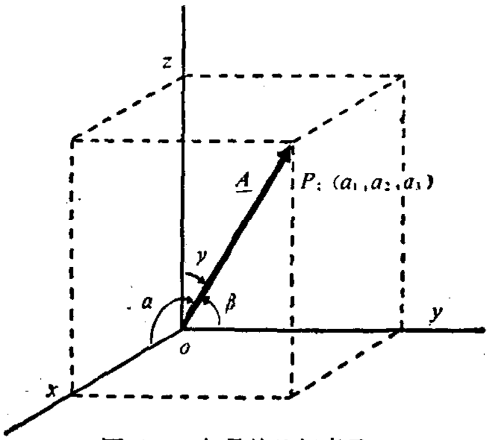


图 1.3 矢量的几何表示。

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{A}|}, \qquad \cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{A}|}, \qquad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{A}|}。 \tag{1.2}$$

可见 OP 的方向余弦正比于矢量的分量。因此有向线段 OP 表达了矢量 $\vec{A}$ 的量值及方向。我们称 OP 为表示 $\vec{A}$ 的几何矢量。

值得注意的是，由(1.1)式可得(1.2)式的方向余弦所必须满足的重要关系

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1。\tag{1.3}$$

于是，矢量 $\vec{u}=[a_1/|\vec{A}|,\ a_2/|\vec{A}|,\ a_3/|\vec{A}|]$ 则是一个与矢量 $\vec{A}$ 同方向的单位矢量。据此，所有非零矢量都可用它的量值去除它的各分量而变换为单位矢量（归一化的）。求任意矢量的单位矢量的过程，常称为归一化过程。

必须指出，矢量也可以用从空间任意点出发所作出的矢线来表示。事实上，如果有一点 P，其坐标为 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，另有一点 Q 其坐标为 $(x_0+a_1,\ y_0+a_2,\ z_0+a_3)$，则有向线段 PQ 同样也是矢量 $\vec{A}$ 的几何表示（图1.4）。这不难用与先前相同的讨论方式加以验证。

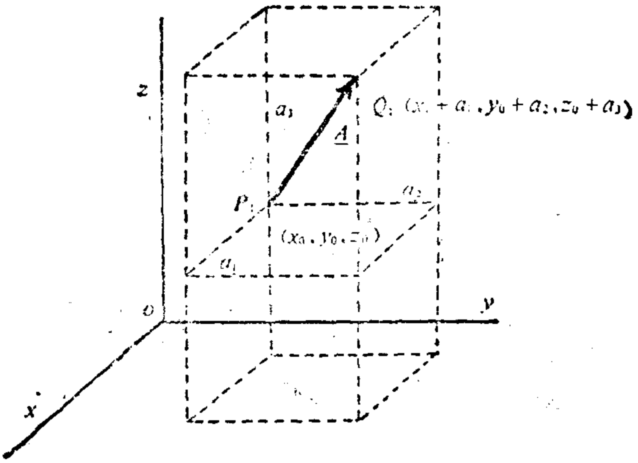


图 1.4 矢量的表示。

在这一情况下，$\vec{A}$ 的分量由点 P 与点 Q 相应的坐标之差给

出。于是，具有始点(x_1, y_1, z_1)和终点(x_2, y_2, z_2)的有向线段所表示的矢量，其分量为

$$a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,\ a_3 = z_2 - z_1。\tag{1.4}$$

所以，用有向线段表示矢量，其始点的选择是无关紧要的；重要的是它的长度和方向。然而，把始点选在坐标原点上更为方便，这样可使矢量的分量与它的终点坐标相吻合。在这一情况下，空间中的每一个点都与一个相应的矢量形成一一对应的关系。

我们看到，如果PQ表示矢量$\vec{A}$，则QP就表示其负矢量，即$-\vec{A}$。显然，零矢量简单地用点——原点表示。零矢量是唯一的不具有方向的矢量。

在二维空间（平面）中，矢量只由两个分量组成。换言之，对应于一个直角笛卡儿坐标系(x, y)平面上的矢量是有序的一对实数：$\vec{A} = [a_1, a_2]$。这一矢量以由原点到点(a_1, a_2)的矢线作为几何表示，矢线的方向由$\theta = \arctan(a_2/a_1)$唯一地确定，见图1.5。矢量的分量和表示该矢量的矢线的长度及方向之间的关系为

$$a_1 = A\cos\theta,\ a_2 = A\sin\theta \tag{1.5}$$

式中A为矢线的长度。

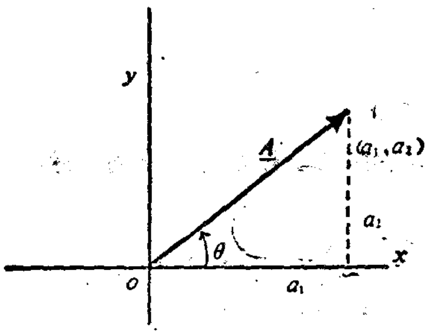


图 1.5 平面上的矢量.

例 1 矢量$\vec{A}$用有向线段PQ表示，已知P：(2，-1，3)和Q：(-1，-2，4)。试求该矢量的分量和量值。

解：以a_1，a_2，a_3表示该矢量的分量。由(1.4)式可得

$$a_1 = -1 - 2 = -3,\ a_2 = -2 - (-1) = -1,\ a_3 = 4 - 3 = 1。$$

再由(1.1)式，可得矢量的量值等于

$$|\vec{A}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{11}.$$

例 2 试求表示矢量 $\vec{A}=[2, -1, 2]$ 的有向线段的方向余弦。

解：该矢量的量值等于

$$|\vec{A}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3。$$

再由(1.2)式，即得表示 $\vec{A}$ 的有向线段的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=-\frac{1}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3}。$$

例 3 设 $\vec{A}=[-1, \sqrt{3}]$，试求表示该矢量的矢线的长度和方向。

解：表示矢量的矢线长度等于矢量的量值，其值为

$$|\vec{A}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2;$$

方向由角 θ 决定：

$$\theta=\arctan\frac{\sqrt{3}}{(-1)}=120°$$

θ 角是由正 x 轴沿逆时针方向测定。

习　题　1.1

在 1—6 各题中，试求有向线段 PQ 所表示的矢量的分量和量值，其始点和终点的坐标给出如下：

1. P: $(-1, 1, 2)$,　　Q: $(2, -1, 3)$。
2. P: $(2, 4, 6)$,　　Q: $(1, -2, 3)$。
3. P: $(1, 0, -2)$,　　Q: $(3, 1, 0)$。
4. P: $(-1, 2)$,　　Q: $(2, -1)$。
5. P: $(-2, 1)$,　　Q: $(2, 3)$。

6. P: (0, 1),　　Q: (−2, −3)。

7至13各题中，试求用以表示已知矢量的 PQ 的始点 P 或终点 Q 的坐标：

7. $\vec{A}=[2, 1, 4]$,　　P: (1, −1, 1)。

8. $\vec{A}=[-1, 3, -2]$,　　P: (2, −1, −3)。

9. $\vec{A}=[2, -3, -4]$,　　Q: (3, −1, 4)。

10. $\vec{A}=[3, 1, -2]$,　　Q: (−2, 1, 3)。

11. $\vec{A}=[-2, 3]$,　　P: (1, −2)。

12. $\vec{A}=[4, -5]$,　　Q: (−1, 1)。

13. $\vec{A}=[1/2, 2/3]$,　　P: (1/2, 0)。

14. 设 $\vec{A}=[-1, -2, 2]$，试求表示该矢量的矢线的方向余弦。

15. 当 $\vec{A}=[1, -3, 2]$时，重复第14题的求解。

16. 设平面矢量 $\vec{A}$ 由一长度为5个单位、方向角 $\theta=150°$ 的矢线表示，试求该矢量的分量。

17. 风向西南方向吹，速率为15哩/小时，试求这风速的各分量。

18. 证明：方向余弦(1.2)式满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1。$$

19. 设 $\vec{A}=[2, -1, 2]$，试求：(*a*)方向与 $\vec{A}$ 一致的单位矢量；(*b*)方向与 $\vec{A}$ 相反的单位矢量。在这两个方向上有多少个单位矢量？

1.4 矢量加法　矢量与标量相乘

现在我们开始研究矢量的各种代数运算。首先引进两个矢量相等的概念。