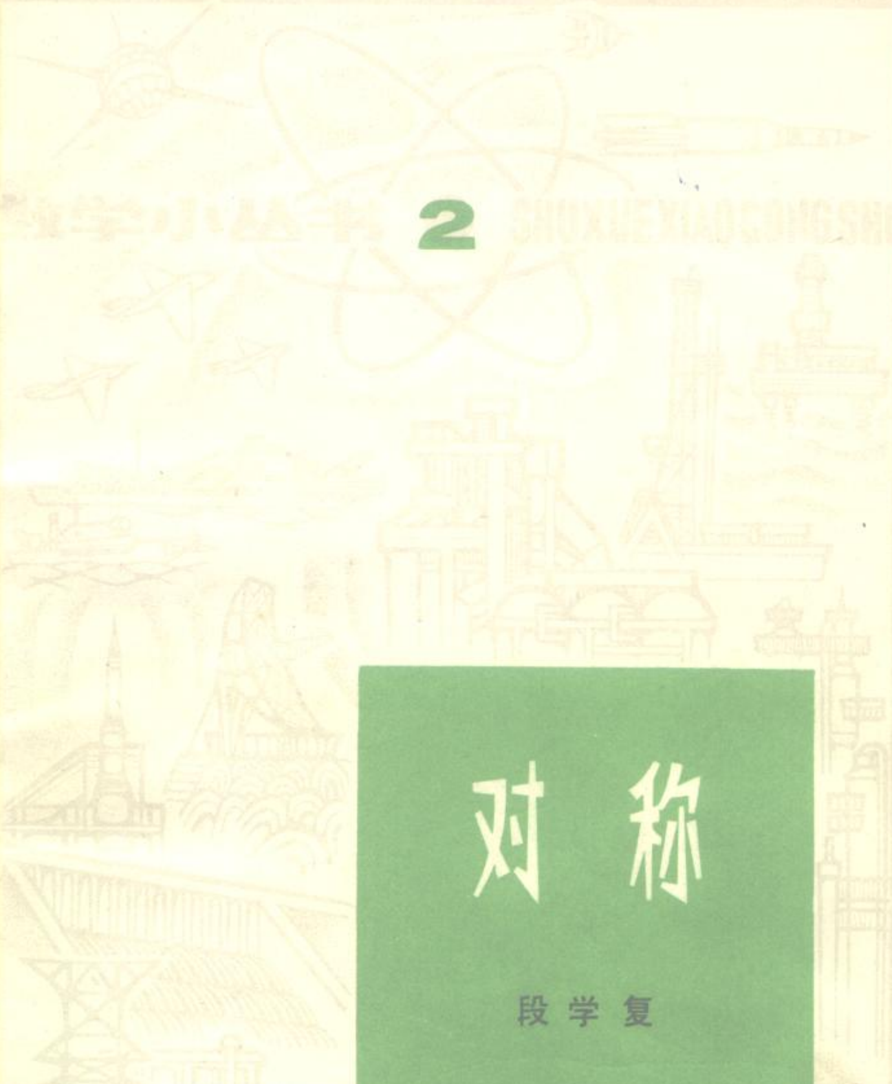


数学小丛书 2 SHUXUEXIAOCONGSHU

对称

段学复

北京市数学会编 · 人民教育出版社

数学小丛书

对　　称

段学复

北京市数学会编

人民教育出版社

对称，照字面来说，就是两个东西相对又相称，因此把这两个东西对换一下，好像没有动过一样. 本书主要介绍有关对称的数学，先讲代数对称，再讲几何对称，最后引出了“群”的概念. “群”的概念在近代数学中是最重要的概念之一，它不只对于代数学和几何学，也对于数学分析以至于理论物理学都有重大的应用. 通过这些内容，作者还企图帮助读者了解：数学理论是由具体实际中抽象出来的，而又有具体实际的应用.

对　　称

段　学　复

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

人民教育出版社印刷厂印装

统一书号：13012·0248　字数：20 千

开本：787×1092 毫米　1/32　印张：$1\frac{1}{4}$　插页：1

1964 年 2 月新一版

1979 年 4 月第三次印刷

北京：86,801—386,800 册

定价 0.15 元

編者的話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

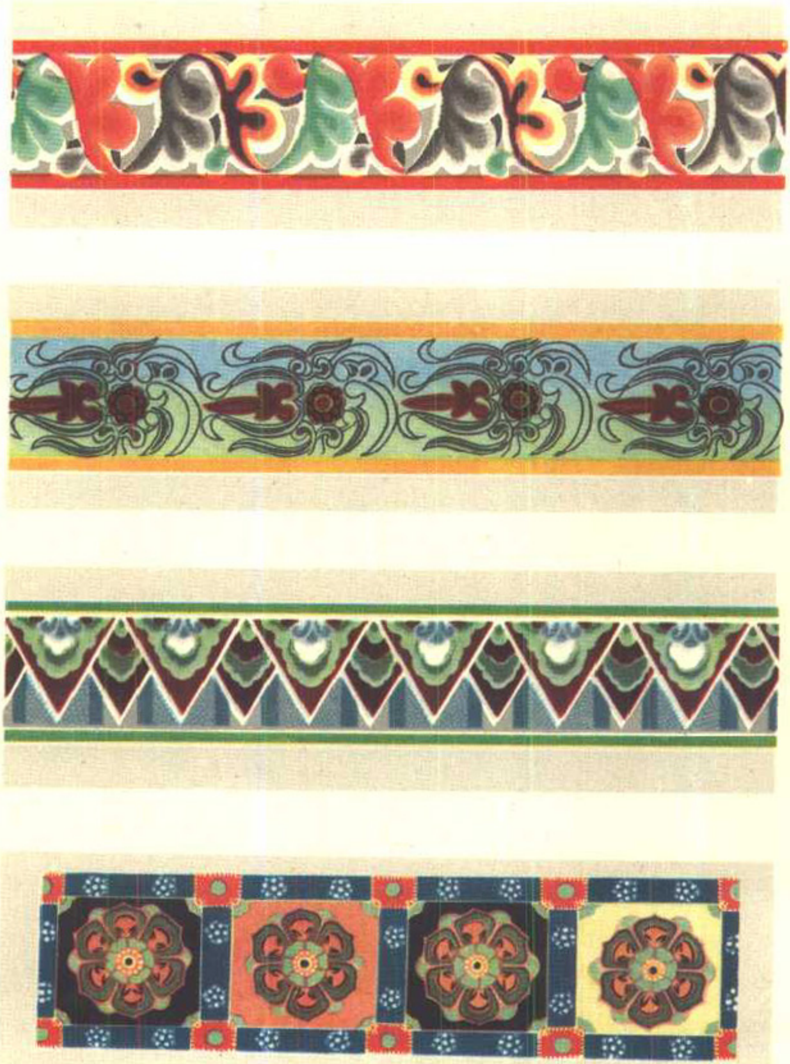
这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

目　　次



带饰上的对称（敦煌壁画边饰）

写在前面

对称，照字面来講，就是两个东西相对而又相称(或者說相仿，相等)。因此，把这两个东西对换一下，好像沒有动过一样。

对称的概念，可以說和近世代数学中"群"的概念是分不开的。当然，群的一般抽象定义一直到上世紀末才完全确立，就是比較具体而特殊的"排列群"的定义，也只不过早有了几十年光景；而对称的概念，尤其是几何方面对称的概念，却是老早就有了的。实际上，在建筑設計方面，在衣物装飾方面，对称的概念一直起着重要的作用。自然界中，矿物結晶体显示出对称。人的身体的外形，也是左右对称的。

这本小册子，主要是向大家介紹有关对称的数学：先講代数对称；再講几何对称，包括对于装飾和結晶体的应用；最后引出群的定义。通过这些内容，还希望能够帮助大家了解：数学理論是由具体实际中抽象出来的，而又有具体实际的应用。一方面，数学理論有高度的抽象性，它往往把一些表面上看来好像沒有什么关系的东西从量的側面很紧密地联系和統一起来。另一方面，数学理論有广泛的实际应用，它往往可以应用到极其广泛而不同的方面去。

一　代数对称——对称多项式和推广

1．一元二次方程的根的对称多项式

假設 a, b, c 都是实数，而且 $a\neq 0$，又假設 x 是未知数（变数或文字），那末 x 的二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

和

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

依照判别式 $b^2-4ac\gtreqless 0$ 三种不同情况，两根 x_1, x_2 或是不相等的两个实数，或是相等的两个实数，或是共軛的两个复数。

更一般些，假設 $a(\neq 0), b, c$ 是任何复数，x_1, x_2 仍是方程(1)的两个根（因为把它們代进 ax^2+bx+c 就得0），而且也是复数，这是因为任何复数（如 b^2-4ac）的平方根还是复数。

事实上，假設 $a+bi$ 是个复数，这里 a 和 b 是实数。我們也可以写成：

$$a+bi=\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$\rho=+\sqrt{a^2+b^2},\qquad \theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}. \tag{3}$$

根据棣美弗(De Moivre)公式，有：

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

和

$$\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{4}$$

其中$\sqrt{\rho}$取非負的值.

我們也可以換一个方法来做．假設

$$\sqrt{a+bi}=c+di, \tag{5}$$

其中 c 和 d 都是实数，那末

$$a+bi=(c+di)^2=(c^2-d^2)+2cdi, \tag{6}$$

所以

$$c^2-d^2=a, \quad 2cd=b \tag{7}$$

由此

$$\begin{aligned} c^2+d^2&=\sqrt{(c^2+d^2)^2}\\ &=\sqrt{(c^2-d^2)^2+(2cd)^2}=\sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

所以

$$\begin{aligned} c^2&=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0,\\ d^2&=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0 \end{aligned} \tag{9}$$

c 有两值，d 有两值，但 c 定后 d 也决定了，因为 $2cd=b$，(可設$b\neq 0$)．这样决定了的两个 $c+di$ 平方起来确实是 $a+bi$，因此就是 $a+bi$ 的两个平方根.

韦达(Viète)定理告訴我們，一元二次方程的两个根有如下的关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{10}$$

x_1+x_2 和 x_1x_2 都有这样性質：把 x_1 和 x_2 对换，結果仍然不变，因为

$$x_1+x_2=x_2+x_1, \quad x_1x_2=x_2x_1. \tag{11}$$

凡是有这样性質的 x_1 和 x_2 的多項式叫做**对称多項式**，例如 $x_1^2+x_2^2$，$x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 等也都是，但是 x_1-x_2 不是．x_1+x_2 和 x_1x_2 叫做**初等对称多項式**．可以証明，凡是 x_1 和 x_2 的对称多項式都可以用这两个初等对称多項式表出来．例如(这不是証明！)：

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\left(\therefore=\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)$$

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)\left(\therefore=-\frac{bc}{a^2}\right). \tag{12}$$

2. 一元 n 次方程的根的对称多項式

我们现在来看看一般情况. 假设 n 是一个正整数, 又假设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是复数, 且 $a_0\neq 0$, 现在有一元 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{13}$$

著名的代数基本定理告诉我们, 这样的方程有 n 个根, 都是复数, 假设就是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 其中可以有相同的. 根据因子定理, 应有

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \tag{14}$$

这个重要定理的证明方法是很多的. 最先一个证明是德国高斯(Gauss)在 1799 年作出的, 他还作出了另外三个证明. 各个证明有的用初等数学方法但是比较长, 有的用高等数学方法(如用复变数函数论), 只有几行, 不过无论如何都要用到连续性质, 即多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是 x 的连续函数. 这就是说, 当 x 的值变动得很小的时候, $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的值也变动得很小①.

这是一种存在定理, 只是说有, 但是没有说怎样求. 对于

---

① 关于代数基本定理的证明, 可以参看張禾瑞郝炳新編《高等代数》(人民教育出版社出版, 1960 年合訂本第一版)第 287-294 頁

$n=3$ 和 4 的情形，求根有一般的公式[1]. 当 $n\geqslant 5$ 的时候，求根没有像二次那样一般的公式. 求出实数根的近似值（即和正确值相接近的值）的一般方法，尤其是当 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是实数的情形，是我国南宋秦九韶在 1247 年首先作出的，比英国霍纳(Horner)的发现（1819 年）要早得多. 对于复数根的情形，是俄国罗巴切夫斯基（Лобочевский）作出的（1834 年）[2].

和二次的情形相仿，韦达公式给出：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}, \quad (15)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

像 $x_1+x_2+\cdots+x_n$，$x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n, \cdots$，$x_1x_2\cdots x_n$ 等这样多项式，不论我们把哪两个根 x_i 和 $x_j(i\neq j)$ 对换一下，因之也就是不论我们对于 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 作怎样的排列（因为任何的排列都可以用两个根 x_i 和 x_j 对换的办法经过几次对换得来）都不变动，所以就叫做 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式. 它们也叫做初等对称多项式，因为根的任一个对称多项式都可以用这些初等对称多项式的多

① 关于三次、四次方程根的公式，参看張禾瑞郝炳新編《高等代數》第 295–304 頁.

② 关于根的近似計算，参看張禾瑞郝炳新編《高等代數》第 318–330 頁.

项式表示出来．这就是所谓对称多项式的基本定理，我们在这里不去证明，只提一下，有一种证明是利用所谓字典排列法，那就是说，假定有两个项 $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 和 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$，依次比较它们所含的 x_1，$x_2,\cdots,x_n$ 的指数，如果第一个不是 0 的差 l_i-m_i 是正数，我们就说第一项是在第二项的前面．例如 $x_1^6x_2^3$ 就在 $x_1^6x_2^2x_3x_4$ 的前面，因为 x_1 的指数差是 $6-6=0$，而 x_2 的指数差是 $3-2=1$①．

我们现在证明一个比较简单的情形，就是牛顿 (Newton) 公式，也就是来证明，

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k\geqslant 1\text{ 的整数}) \tag{16}$$

都可以用这些初等对称多项式的多项式表出来．这里符号 s_k 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 k 次方幂的和．

我们先看一看 $n=2$ 的情形．为了简单起见，可以假设 $a=1$，那样就有

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2). \tag{17}$$

我们已有 $$s_1=x_1+x_2=-b,\quad x_1x_2=c. \tag{18}$$

因为 $$x_1^2+bx_1+c=0,\ x_2^2+bx_2+c=0, \tag{19}$$

相加，得：

$$s_2+bs_1+2c=0,$$

① 关于对称多项式的基本定理的詳細证明，可以参看張禾瑞郝炳新編《高等代数》第 268-275 頁．

或

$$s_2=-bs_1-2c=b^2-2c. \tag{20}$$

因为 $$x_1^3+bx_1^2+cx_1=0,\quad x_2^3+bx_2^2+cx_2=0, \tag{21}$$

相加，得：

$$s_3+bs_2+cs_1=0,$$

或 $$s_3=-bs_2-cs_1=-b^3+3bc, \tag{22}$$

同样 $$s_4+bs_3+cs_2=0,$$

或 $$s_4=b^4-4b^2c+2c^2, \tag{23}$$

$$s_5+bs_4+cs_3=0,$$

或 $$s_5=-b^5+5b^3c-5bc^2. \tag{24}$$

…………………………………

对于任意 n 的情形，我們也可以同样进行． 下面我們引进符号 $\sum$，例如用 $\sum x_1^{k-1}x_2$ 表

$$x_1^{k-1}x_2+\cdots+x_1^{k-1}x_n+x_2^{k-1}x_1+\cdots$$

$$+x_2^{k-1}x_n+\cdots+x_n^{k-1}x_1+\cdots+x_n^{k-1}x_{n-1}.$$

若 $k\leqslant n$，就有

$$s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=s_k+\sum x_1^{k-1}x_2,$$

$$s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)=\sum x_1^{k-1}x_2+\sum x_1^{k-2}x_2x_3, \tag{25}$$

…………………………

$$s_{k-i}(x_1x_2\cdots x_i+\cdots)=\sum x_1^{k-i+1}x_2\cdots x_i+\sum x_1^{k-i}x_2\cdots x_{i+1},$$

……………………………………

$$s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)=\sum x_1^2x_2\cdots x_{k-1}+k\sum x_1x_2\cdots x_k.$$

以 $-1,+1,-1,\cdots$依次乘各式，然后加起来，就得到：

$$-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)$$
$$=-s_k+(-1)^{k-1}k\sum x_1x_2\cdots x_k,$$

或

$$s_k-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)$$
$$+(-1)^k k(x_1x_2\cdots x_k+\cdots)=0,$$

或 $$a_0s_k+a_1s_{k-1}+a_2s_{k-2}+\cdots+ka_k=0. \tag{26}$$

若 $k>n$，那末(25)中最后一式应是

$$s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n)=\sum x_1^{k-n+1}x_2\cdots x_n, \tag{27}$$

从而得到

$$s_k-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)$$
$$+\cdots+(-1)^n s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n)=0,$$

或 $$a_0s_k+a_1s_{k-1}+a_2s_{k-2}+\cdots+a_ns_{k-n}=0. \tag{28}$$

对 $k>n$，也可簡单利用下面式子

$$0=x_i^{k-n}(a_0x_i^n+a_1x_i^{n-1}+\cdots+a_n)$$

$$=a_0x_i^k+a_1x_i^{k-1}+\cdots+a_nx_i^{k-n} \tag{29}$$

而得到(28)。利用(26)和(28)等公式，由 $k=1$ 开始，可以依次把 s_k 表为 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的多項式。

我们还可以作一些推广.

设 $n=3$, 那末 $x_1+x_2+x_3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 等都是对称多项式, 可是 x_1+x_2, x_1-x_2, $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ 等都不是. 我们可以更仔细地区别一下:

x_1-x_2 只有当 x_1, x_2, x_3 都不变时才不变, 也就是说, 只对排列$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$才不变.

x_1+x_2 对排列$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$不变.

$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$对排列$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$不变.

这一些事实启发我们去考虑 n 个文字的某些排列的集合, 它们之中任意两个接连实施的结果仍然是原来那些排列中的一个(这叫做群), 并且考虑对于这些排列来讲是不变的或者对称的多项式. 这种想法最初是由法国伽罗华(Galois, 1811-1832)搞清楚的, 并引导着他彻底解决了五次和五次以上的一般方程不能用根式来解的问题. 他不但证明了, 不存在求根的一般公式, 按照这个公式从一般方程的系数出发只经过加, 减, 乘, 除以及开方(根式)等代数运算就能得到根(挪威阿倍尔(Abel, 1802-1829)也解决了这一部分); 而且也证明了, 存在着不能用代数运算来解的具

体方程，还説明了方程能不能用代数运算来解的理由。

我們再举一个例子讓讀者去作練习：$n=4$。$x_1x_2+x_3x_4$ 对于下列八个排列的群不变：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

而 $x_1x_2-x_3x_4$ 只对前面四个排列的群不变。

二　几何对称

1. 平面上的对称

在平面上，我們可以考虑对于一直綫的对称（或反射）以及对于一点的对称。

首先，如图 1，点 A 和点 A' 叫做对于直綫 l 是对称的，或以 l 为**对称軸**，如果：

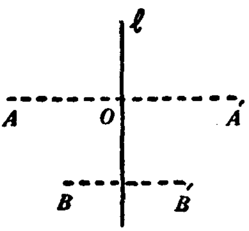


图 1.

$$AA' \perp l \text{ 于 } O \text{ 点},$$

$$\text{且 } AO=OA'.$$

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面在空間中繞 l 作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋轉（或翻轉）。